Schaffner



P. S. 3. 6

~~F. 3. 9. Arch. inf.~~

~~M. 5. 5. 9. (16)~~

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *JS. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

QA
803
.A2
1687

OCLC#15629050

2/1/2010

ILLUSTRISSIMÆ
SOCIETATI REGALI
a Sereniſſimo
REGE CAROLO II.
AD
PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM
FUNDATÆ,
ET AUSPICIIS
POTENTISSIMI MONARCHÆ
JACOBI II.
FLORENTI.

Tractatum hunc humillime *D. D. D.*

JS. NEWTON.

PRÆFATIO
AD
LECTOREM.

CUm *Veteres* Mechanicam *(uti Author eſt* Pappus*) in rerum Naturalium inveſtigatione maximi fecerint, & recentiores, miſſis formis ſubſtantialibus & qualitatibus occultis, Phænomena Naturæ ad leges Mathematicas revocare aggreſſi ſint: Viſum eſt in hoc Tractatu* Matheſin *excolere quatenus ea ad* Philoſophiam *ſpectat.* Mechanicam *vero duplicem Veteres conſtituerunt:* Rationalem *quæ per Demonſtrationes accurate procedit, &* Practicam. *Ad practicam ſpectant Artes omnes Manuales, a quibus utiq;* Mechanica *nomen mutuata eſt. Cum autem Artifices parum accurate operari ſoleant, fit ut* Mechanica *omnis a* Geometria *ita diſtinguatur, ut quicquid accuratum ſit ad* Geometriam *referatur, quicquid minus accuratum ad* Mechanicam. *Attamen errores non ſunt Artis ſed Artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior eſt Mechanicus, & ſi quis accuratiſſime operari poſſet, hic foret Mechanicus omnium perfectiſſimus. Nam & Linearum rectarum & Circulorum deſcriptiones in quibus* Geometria *fundatur, ad* Mechanicam *pertinent. Has lineas deſcribere* Geometria *non docet ſed poſtulat. Poſtulat enim ut Tyro eaſdem accurate deſcribere prius didicerit quam limen attingat* Geometriæ; *dein, quomodo per has operationes Problemata ſolvantur, docet. Rectas & circulos deſcribere Problemata ſunt ſed non Geometrica.* Ex Mechanica *poſtulatur horum ſolutio, in* Geometria *docetur ſolutorum uſus. Ac gloriatur* Geometria *quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præſtet. Fundatur igitur* Geometria *in praxi Mechanica, & nihil aliud eſt quam* Mechanicæ univerſalis *pars illa quæ artem menſurandi accurate proponit ac demonſtrat. Cum autem artes Manuales in corporibus movendis præcipue verſentur, fit ut* Geometria *ad magnitudinem,* Mechanica *ad motum vulgo referatur. Quo ſenſu* Mechanica rationalis *erit Scientia Motuum qui ex viribus quibuſcunq; reſultant, & virium quæ ad motus quoſcunq; requiruntur, accurate propoſita ac demonſtrata. Pars hæc* Mechanicæ *a Veteribus in* Potentiis quinque *ad artes manuales ſpectantibus exculta fuit, qui Gravitatem (cum potentia manualis non ſit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis conſiderarunt. Nos autem non Artibus ſed Philoſophiæ conſulentes, deq; potentiis non manualibus ſed naturalibus ſcribentes, ea maxime tractamus quæ ad Gravitatem, levitatem, vim Elaſticam, reſiſten-*

tiam

tiam Fluidorum & ejuſmodi vires ſeu attractivas ſeu impulſivas ſpectant: Et ea propter hæc noſtra tanquam Philoſophiæ principia Mathematica proponimus. Omnis enim Philoſophiæ difficultas in eo verſari videtur, ut a Phænomenis motuum inveſtigemus vires Naturæ, deinde ab his viribus demonſtremus phænomena reliqua. Et hæc ſpectant Propoſitiones generales quas Libro primo & ſecundo pertractavimus. In Libro autem tertio exemplum hujus rei propoſuimus per explicationem Syſtematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cæleſtibus, per Propoſitiones in Libris prioribus Mathematice demonſtratas, derivantur vires gravitatis quibus corpora ad Solem & Planetas ſingulos tendunt. Deinde ex his viribus per Propoſitiones etiam Mathematicas deducuntur motus Planetarum, Cometarum, Lunæ & Maris. Utinam cætera Naturæ phænomena ex principiis Mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent ut nonnihil ſuſpicer ea omnia ex viribus quibuſdam pendere poſſe, quibus corporum particulæ per cauſas nondum cognitas vel in ſe mutuo impelluntur & ſecundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, Philoſophi hactenus Naturam fruſtra tentarunt. Spero autem quod vel huic Philoſophandi modo, vel veriori alicui, Principia hic poſita lucem aliquam præbebunt.

In his edendis, Vir acutiſſimus & in omni literarum genere eruditiſſimus Edmundus Halleius *operam navavit, nec ſolum Typothetarum* Sphalmata *correxit & Schemata incidi curavit, ſed etiam Author fuit ut horum editionem aggrederer. Quippe cum demonſtratam a me figuram Orbium cæleſtium impetraverat, rogare non deſtitit ut eadem cum* Societate Regali *communicarem, Quæ deinde hortatibus & benignis ſuis auſpiciis effecit ut de eadem in lucem emittenda cogitare inciperem. At poſtquam Motuum Lunarium inæqualitates aggreſſus eſſem, deinde etiam alia tentare cæpiſſem quæ ad leges & menſuras Gravitatis & aliarum virium, ad figuras a corporibus ſecundum datas quaſcunque leges attractis deſcribendas, ad motus corporum plurium inter ſe, ad motus corporum in Mediis reſiſtentibus, ad vires, denſitates & motus Mediorum, ad Orbes Cometarum & ſimilia ſpectant, editionem in aliud tempus differendam eſſe putavi, ut cætera rimarer & una in publicum darem. Quæ ad motus Lunares ſpectant, (imperfecta cum ſint,) in Corollariis Propoſitionis* LXVI. *ſimul complexus ſum, ne ſingula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, & ſigillatim demonſtrare tenerer, & ſeriem reliquarum Propoſitionum interrumpere. Nonnulla ſero inventa locis minus idoneis inſerere malui, quam numerum Propoſitionum & citationes mutare. Ut omnia candide legantur, & defectus, in materia tam difficili non tam reprehendantur, quam novis Lectorum conatibus inveſtigentur, & benigne ſuppleantur, enixe rogo.*

IN

VIRI PRÆSTANTISSIMI

D. ISAACI NEWTONI

OPUS HOCCE

MATHEMATICO-PHYSICUM

Sæculi Gentiſque noſtræ Decus egregium.

EN tibi norma Poli, & divæ libramina Molis,
Computus atque Jovis; quas, dum primordia rerum
Pangeret, omniparens Leges violare Creator
Noluit, æternique operis fundamina fixit.
Intima panduntur victi penetralia cæli,
Nec latet extremos quæ Vis circumrotat Orbes.
Sol ſolio reſidens ad ſe jubet omnia prono
Tendere deſcenſu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vaſtum per inane moveri;
Sed rapit immotis, ſe centro, ſingula Gyris.
Jam patet horrificis quæ ſit via flexa Cometis;
Jam non miramur barbati Phænomena Aſtri.
Diſcimus hinc tandem qua cauſa argentea Phœbe
Paſſibus haud æquis graditur; cur ſubdita nulli
Hactenus Aſtronomo numerorum fræna recuſet:
Cur remeant Nodi, curque Auges progrediuntur.
Diſcimus & quantis refluum vaga Cynthia Pontum
Viribus impellit, dum fractis fluctibus Ulvam

Deſerit

Deſerit, ac Nautis ſuſpectas nudat arenas;
Alternis vicibus ſuprema ad littora pulſans.
Quæ toties animos veterum torſere Sophorum,
Quæque Scholas fruſtra rauco certamine vexant
Obvia conſpicimus nubem pellente Matheſi.
Jam dubios nulla caligine prægravat error
Queis Superum penetrare domos atque ardua Cœli
Scandere ſublimis Genii conceſſit acumen.
Surgite Mortales, terrenas mittite curas
Atque hinc cœligenæ vires dignoſcite Mentis
A pecudum vita longe lateque remotæ.
Qui ſcriptis juſſit Tabulis compeſcere Cædes
Furta & Adulteria,& perjuræ crimina Fraudis;
Quive vagis populis circumdare mœnibus Urbes
Autor erat; Cereriſve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen preſſit ab Uva;
Vel qui Niliaca monſtravit arundine pictos
Conſociare ſonos, oculiſque exponere Voces;
Humanam ſortem minus extulit; utpote pauca
Reſpiciens miſeræ ſolummodo commoda vitæ.
Jam vero Superis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita cœcæ
Clauſtra patent Terræ, rerumque immobilis ordo,
Et quæ præteriti latuerunt ſæcula mundi.
Talia monſtrantem mecum celebrate Camænis,
Vos qui cœleſti gaudetis nectare veſci,
NEWTONUM clauſi reſerantem ſcrinia Veri,
NEWTONUM Muſis charum, cui pectore puro
Phœbus adeſt, totoque inceſſit Numine mentem:
Nec fas eſt propius Mortali attingere Divos.

EDM. HALLEY.

PHILO-

PHILOSOPHIÆ NATURALIS Principia MATHEMATICA.

Definitiones.

Def. I.

Quantitas Materiæ eſt menſura ejuſdem orta ex illius Denſitate & Magnitudine conjunctim.

AEr duplo denſior in duplo ſpatio quadruplus eſt. Idem intellige de Nive et Pulveribus per compreſſionem vel liquefactionem condenſatis. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ per cauſas quaſcunq; diverſimode condenſantur. Medii interea, ſi quod fuerit, interſtitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem quantitatem ſub nomine corporis vel Maſſæ in ſequentibus paſſim intelligo. Innoteſcit ea per corporis cujuſq; pondus. Nam ponderi proportionalem eſſe reperi per experimenta pendulorum accuratiſſime inſtituta, uti poſthac docebitur.

Def. II.

Quantitas motus eſt menſura ejuſdem orta ex Velocitate et quantitate Materiæ conjunctim.

Motus totius eſt ſumma motuum in partibus ſingulis, adeoq; in corpore duplo majore æquali cum Velocitate duplus eſt, et dupla cum Velocitate quadruplus.

Def. III.

Materiæ vis inſita eſt potentia reſiſtendi, qua corpus unumquodq;, quantum in ſe eſt, perſeverat in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc ſemper proportionalis eſt ſuo corpori, neq; differt quicquam ab inertia Maſſæ, niſi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ fit ut corpus omne de ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis inſita nomine ſignificantiſſimo vis inertiæ dici poſſit. Exercet vero corpus hanc vim ſolummodo in mutatione ſtatus ſui per vim aliam in ſe impreſſam facta, eſtq; exercitium ejus ſub diverſo reſpectu et Reſiſtentia et Impetus: Reſiſtentia quatenus corpus ad conſervandum ſtatum ſuum reluctatur vi impreſſæ; Impetus quatenus corpus idem, vi reſiſtentis obſtaculi difficulter cedendo, conatur ſtatum ejus mutare. Vulgus Reſiſtentiam quieſcentibus et Impetum moventibus tribuit; ſed motus et quies, uti vulgo concipiuntur, reſpectu ſolo diſtinguuntur ab invicem, neq; ſemper vere quieſcunt quæ vulgo tanquam quieſcentia ſpectantur.

Def. IV.

Vis impreſſa eſt actio in corpus exercita, ad mutandum ejus ſtatum vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum.

Conſiſtit hæc vis in actione ſola, neq; poſt actionem permanet in corpore. Perſeverat enim corpus in ſtatu omni novo per ſolam

vim

vim inertiæ. Eſt autem vis impreſſa diverſarum originum, ut ex ictu, ex preſſione, ex vi centripeta.

Def. V.

Vis centripeta eſt qua corpus verſus punctum aliquod tanquam ad centrum trahitur, impellitur, vel utcunq; tendit.

Hujus generis eſt gravitas, qua corpus tendit ad centrum Terræ: Vis magnetica, qua ferrum petit centrum Magnetis, et vis illa, quæcunq; ſit, qua Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, et in lineis curvis revolvi coguntur. Eſt autem vis centripetæ quantitas trium generum, abſoluta, acceleratrix et motrix.

Def. VI.

Vis centripetæ quantitas abſoluta eſt menſura ejuſdem major vel minor pro efficacia cauſæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Uti virtus Magnetica major in uno magnete, minor in alio.

Def. VII.

Vis centripetæ quantitas acceleratrix eſt ipſius menſura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti Virtus Magnetis ejuſdem major in minori Diſtantia, minor in majori: vel vis gravitans major in Vallibus, minor in cacuminibus præaltorum montium (ut experimento pendulorum conſtat) atq; adhuc minor (ut poſthac patebit) in majoribus diſtantiis a Terra; in æqualibus autem diſtantiis eadem undiq; propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) ſublata Aeris reſiſtentia, æqualiter accelerat.

Def. VIII.

Vis centripetæ quantitas motrix eſt ipſius menſura proportionalis motui, quem dato tempore generat.

Uti pondus majus in majori corpore, minus in minore; inq; cor-

pore eodem majus prope terram, minus in cælis. Hæc vis eſt corporis totius centripetentia ſeu propenſio in centrum & (ut ita dicam) pondus, & innoteſcit ſemper per vim ipſi contrariam & æqualem, qua deſcenſus corporis impediri poteſt.

Haſce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires abſolutas, acceleratrices & motrices, & diſtinctionis gratia referre ad corpora, ad corporum loca, & ad centrum virium: Nimirum vim motricem ad corpus, tanquam conatum & propenſionem totius in centrum, ex propenſionibus omnium partium compoſitum; & vim acceleratricem ad locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca ſingula in circuitu diffuſam, ad movenda corpora quæ in ipſis ſunt; vim autem abſolutam ad centrum, tanquam cauſa aliqua præditum, ſine qua vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; ſive cauſa illa ſit corpus aliquod centrale (quale eſt Magnes in centro vis Magneticæ vel Terra in centro vis gravitantis) ſive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus ſaltem eſt hic conceptus. Nam virium cauſas & ſedes phyſicas jam non expendo.

Eſt igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate ducta in quantitatem Materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice ducta in quantitatem ejuſdem materiæ. Nam ſumma actionum vis acceleratricis in ſingulas corporis particulas eſt vis motrix totius. Unde juxta Superficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix ſeu vis gravitans in corporibus univerſis eadem eſt, gravitas motrix ſeu pondus eſt ut corpus: at ſi in regiones aſcendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritq; ſemper ut corpus in gravitatem acceleratricem ductum. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor eſt, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel ſextuplo minus.

Porro attractiones et impulſus eodem ſenſu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem attractionis, impulſus vel propenſionis cujuſcunq in centrum, indifferenter et pro ſe mutuo promiſcue uſurpo, has vires non phyſice ſed Mathematice tantum conſiderando

rando

rando. Unde caveat lector ne per hujuſmodi voces cogitet me ſpeciem vel modum actionis cauſamve aut rationem phyſicam alicubi definire, vel centris (quæ ſunt puncta Mathematica) vires vere et phyſice tribuere, ſi forte aut centra trahere, aut vires centrorum eſſe dixero.

Scholium.

Hactenus voces minus notas, quo in ſenſu in ſequentibus accipiendæ ſunt, explicare viſum eſt. Nam tempus, ſpatium, locum et motum ut omnibus notiſſima non definio. Dicam tamen quod vulgus quantitates haſce non aliter quam ex relatione ad ſenſibilia concipit. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit eaſdem in abſolutas & relativas, veras & apparentes, Mathematicas et vulgares diſtingui.

I. Tempus abſolutum verum & Mathematicum, in ſe & natura ſua abſq; relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioq; nomine dicitur Duratio; relativum apparens & vulgare eſt ſenſibilis & externa quævis Durationis per motum menſura, (ſeu accurata ſeu inæquabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Menſis, Annus.

II. Spatium abſolutum natura ſua abſq; relatione ad externum quodvis ſemper manet ſimilare & immobile; relativum eſt ſpatii hujus menſura ſeu dimenſio quælibet mobilis, quæ a ſenſibus noſtris per ſitum ſuum ad corpora definitur, & a vulgo pro ſpatio immobili uſurpatur: uti dimenſio ſpatii ſubterranei, aerei vel cæleſtis definita per ſitum ſuum ad Terram. Idem ſunt ſpatium abſolutum & relativum, ſpecie & magnitudine, ſed non permanent idem ſemper numero. Nam ſi Terra, verbi gratia, movetur, ſpatium Aeris noſtri quod relative & reſpectu Terræ ſemper manet idem, nunc erit una pars ſpatii abſoluti in quam Aer tranſit, nunc alia pars ejus, & ſic abſolute mutabitur perpetuo.

III. Locus eſt pars ſpatii quam corpus occupat, eſtq; pro ratione

tione ſpatii vel abſolutus vel relativus. Partem dico ſpatii, non ſitum corporis vel ſuperficiem ambientem. Nam ſolidorum æqualium æquales ſemper ſunt loci; Superficies autem ob diſſimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales ſunt; ſitus vero proprie loquendo quantitatem non habent, neq; tam ſunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem eſt cum ſumma motuum partium, hoc eſt, tranſlatio totius de ipſius loco eadem cum ſumma tranſlationum partium de locis ſuis, adeoq; locus totius idem cum ſumma locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. Motus abſolutus eſt tranſlatio corporis de loco abſoluto in locum abſolutum, relativus de relativo in relativum. Sic in Navi quæ velis paſſis fertur, relativus corporis locus eſt navis regio illa in qua corpus verſatur, ſeu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæq; adeo movetur una cum Navi: & Quies relativa eſt permanſio corporis in eadem illa navis regione vel parte cavitatis. At Quies vera eſt permanſio corporis in eadem parte ſpatii illius immoti in qua Navis ipſa una cum cavitate ſua & contentis univerſis movetur. Unde ſi Terra vere quieſcit, corpus quod relative quieſcit in Navi, movebitur vere et abſolute ea cum Velocitate qua Navis movetur in Terra. Sin Terra etiam movetur, orietur verus et abſolutus corporis motus partim ex Terræ motu vero in ſpatio immoto, partim ex Navis motu relativo in Terra: et ſi corpus etiam movetur relative in Navi, orietur verus ejus motus partim ex vero motu Terræ in ſpatio immoto, partim ex relativis motibus tum Navis in Terra, tum corporis in Navi, et ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terra. Ut ſi Terræ pars illa ubi Navis verſatur moveatur vere in Orientem, cum Volocitate partium 10010, et velis ventoq; feratur Navis in Occidentem cum Velocitate partium decem, Nauta autem ambulet in Navi Orientem verſus cum Velocitatis parte una, movebitur Nauta vere et abſolute in ſpatio immoto cum Velocitatis partibus 10001 in Orientem, et relative in Terra Occidentem verſus cum Velocitatis partibus novem.

Tempus abſolutum a relativo diſtinguitur in Aſtronomia per Æquationem Temporis vulgi. Inæquales enim ſunt dies Naturales, qui vulgo tanquam æquales pro Menſura Temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Aſtronomi ut ex veriore Tempore menſurent motus cæleſtes. Poſſibile eſt ut nullus ſit motus æquabilis quo Tempus accurate menſuretur. Accelerari & retardari poſſunt motus omnes, ſed fluxus Temporis abſoluti mutari nequit. Eadem eſt duratio ſeu perſeverantia exiſtentiæ rerum, ſive motus ſint celeres, ſive tardi, ſive nulli; proinde hæc a menſuris ſuis ſenſibilibus merito diſtinguitur, & ex ijſdem colligitur per Æquationem Aſtronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis neceſſitas, tum per experimentum Horologii oſcillatorii, tum etiam per Eclipſes Satellitum Jovis evincitur.

Ut partium Temporis ordo eſt immutabilis, ſic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæ de locis ſuis, & movebuntur (ut ita dicam) de ſeipſis. Nam Tempora & Spatia ſunt ſui ipſorum & rerum omnium quaſi loca. In Tempore quoad ordinem ſucceſſionis; in Spatio quoad ordinem ſitus locantur univerſa. De illorum Eſſentia eſt ut ſint loca, & loca primaria moveri abſurdum eſt. Hæc ſunt igitur abſoluta loca, & ſolæ tranſlationes de his locis ſunt abſoluti motus.

Verum quoniam hæ ſpatii partes videri nequeunt, & ab invicem per ſenſus noſtros diſtingui, earum vice adhibemus menſuras ſenſibiles. Ex poſitionibus enim & diſtantiis rerum a corpore aliquo, quod ſpectamus ut immobile, definimus loca univerſa; deinde etiam & omnes motus æſtimamus cum reſpectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iiſdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum abſolutorum relativis utimur, nec incommode in rebus humanis: in Philoſophicis autem abſtrahendum eſt a ſenſibus. Fieri etenim poteſt ut nullum revera quieſcat corpus, ad quod loca motuſq; referantur.

Diſtinguuntur autem Quies & Motus abſoluti & relativi ab invicem per eorum proprietates, cauſas & effectus. Quietis proprietas

eſt

eſt, quod corpora vere quieſcentia quieſcunt inter ſe. Ideoq; cum poſſibile ſit ut corpus aliquod in regionibus fixarum, aut longe ultra, quieſcat abſolute; ſciri autem non poſſit ex ſitu corporum ad invicem in regionibus noſtris, utrum horum aliquod ad longinquum illud datam poſitionem ſervet, quies vera ex horum ſitu inter ſe definiri nequit.

Motus proprietas eſt, quod partes quæ datas ſervant poſitiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam gyrantium partes omnes conantur recedere de axe motus, et progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium ſingularum. Igitur motis corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relative quieſcunt. Et propterea motus verus et abſolutus definiri nequit per tranſlationem e vicinia corporum, quæ tanquam quieſcentia ſpectantur. Debent corpora externa non ſolum tanquam quieſcentia ſpectari, ſed etiam vere quieſcere. Alioquin incluſa omnia, præter tranſlationem e vicinia ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros, et ſublata illa tranſlatione non vere quieſcent, ſed tanquam quieſcentia ſolummodo ſpectabuntur; ſunt enim ambientia ad incluſa ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, abſq; tranſlatione de vicinia corticis, ceu pars totius, movetur.

Præcedenti proprietati affinis eſt, quod moto loco movetur una locatum, adeoq; corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci ſui motum. Igitur motus omnes, qui de locis motis fiunt, ſunt partes ſolummodo motuum integrorum et abſolutorum, et motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco ſuo primo, et motu loci hujus de loco ſuo, et ſic deinceps, uſq; dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ ſupra memorato. Unde motus integri et abſoluti non niſi per loca immota definiri poſſunt, et propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia ſupra retuli: Loca autem immota non ſunt, niſi quæ omnia ab infinito in infinitum datas ſervant

vant

vant poſitiones ad invicem, atq; adeo ſemper manent immota, ſpatiumq; conſtituunt quod immobile appello.

Cauſæ, quibus motus veri et relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt vires in corpora impreſſæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur niſi per vires in ipſum corpus motum impreſſas: at motus relativus generari et mutari poteſt abſq; viribus impreſſis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia ſolum corpora ad quæ fit relatio, ut ijs cedentibus mutetur relatio illa in qua hujus quies vel motus relativus conſiſtit. Rurſus motus verus a viribus in corpus motum impreſſis ſemper mutatur, at motus relativus ab his viribus non mutatur neceſſario. Nam ſi eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, ſic imprimantur ut ſitus relativus conſervetur, conſervabitur relatio in qua motus relativus conſiſtit. Mutari igitur poteſt motus omnis relativus ubi verus conſervatur, et conſervari ubi verus mutatur; et propterea motus verus in ejuſmodi relationibus minime conſiſtit.

Effectus quibus motus abſoluti et relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nude relativo hæ vires nullæ ſunt, in vero autem et abſoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat ſitula a filo prælongo, agaturq; perpetuo in orbem donec filum a contorſione admodum rigeſcat, dein impleatur aqua, et una cum aqua quieſcat; tum vi aliqua ſubitanea agatur motu contrario in orbem, et filo ſe relaxante, diutius perſeveret in hoc motu: ſuperficies aquæ ſub initio plana erit, quemadmodum ante motum vaſis, at poſtquam, vi in aquam paulatim impreſſa, effecit vas, ut hæc quoq; ſenſibiliter revolvi incipiat, recedet ipſa paulatim e medio, aſcendetq; ad latera vaſis, figuram concavam induens, (ut ipſe expertus ſum) et incitatiore ſemper motu aſcendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vaſe temporibus peragendo, quieſcat in eodem relative. Indicat hic aſcenſus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innoteſcit & menſuratur motus aquæ circularis verus & abſolutus, motuiq; relativo hic

omnino contrarius. Initio ubi maximus erat aquæ motus relativus in vaſe, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: Aqua non petebat circumferentiam aſcendendo ad latera vaſis, ſed plana manebat, & propterea motus illius circularis verus nondum inceperat. Poſtea vero ut aquæ motus relativus decrevit, aſcenſus ejus ad latera vaſis indicabat conatum recedendi ab axe, atq; hic conatus monſtrabat motum illius circularem verum perpetuo creſcentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quieſcebat in vaſe relative. Igitur conatus iſte non pendet a tranſlatione aquæ reſpectu corporum ambientium, & propterea motus circularis verus per tales tranſlationes definiri nequit. Unicus eſt corporis cujuſq; revolventis motus vere circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui reſpondens; motus autem relativi pro varijs relationibus ad externa innumeri ſunt, & relationum inſtar, effectibus veris omnino deſtituuntur, niſi quatenus de vero illo & unico motu participant. Unde & in Syſtemate eorum qui Cælos noſtros infra Cælos fixarum in orbem revolvi volunt, & Planetas ſecum deferre; Planetæ & ſingulæ Cælorum partes, qui relative quidem in Cælis ſuis proximis quieſcunt, moventur vere. Mutant enim poſitiones ſuas ad invicem (ſecus quam fit in vere quieſcentibus) unaq; cum cælis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Igitur quantitates relativæ non ſunt eæ ipſæ quantitates quarum nomina præ ſe ferunt, ſed earum menſuræ illæ ſenſibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco menſuratarum utitur. At ſi ex uſu definiendæ ſunt verborum ſignificationes; per nomina illa Temporis, Spatij, Loci & Motus proprie intelligendæ erunt hæ menſuræ; & ſermo erit inſolens & pure Mathematicus ſi quantitates menſuratæ hic ſubintelligantur. Proinde vim inferunt Sacris literis qui voces haſce de quantitatibus menſuratis ibi interpretantur. Neq; minus contaminant Matheſin & Philoſophiam qui quantitates veras cum ipſarum relationibus & vulgaribus menſuris confundunt.

Motus

Motus quidem veros corporum ſingulorum cognoſcere, & ab apparentibus actu diſcriminare, difficillimum eſt; propterea quod partes ſpatij illius immobilis in quo corpora vere moventur, non incurrunt in ſenſus. Cauſa tamen non eſt prorſus deſperata. Nam ſuppetunt argumenta partim ex motibus apparentibus, qui ſunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ ſunt motuum verorum cauſæ & effectus. Ut ſi globi duo ad datam ab invicem diſtantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innoteſceret ex tenſione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari poſſet. Deinde ſi vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum ſimul imprimerentur, innoteſceret ex aucta vel diminuta fili tenſione augmentum vel decrementum motus; & inde tandem inveniri poſſent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur, id eſt facies poſticæ, ſive quæ in motu circulari ſequuntur. Cognitis autem faciebus quæ ſequuntur & faciebus oppoſitis quæ præcedunt, cognoſceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri poſſet & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenſo, ubi nihil extaret externum & ſenſibile, quocum globi conferri poſſent. Si jam conſtituerentur in ſpatio illo corpora aliqua longinqua datam inter ſe poſitionem ſervantia, qualia ſunt ſtellæ fixæ in regionibus noſtris: ſciri quidem non poſſet ex relativa globorum tranſlatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus eſſet motus. At ſi attenderetur ad filum & inveniretur tenſionem ejus illam ipſam eſſe quam motus globorum requireret; concludere liceret motum eſſe globorum, & tum demum ex tranſlatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum cauſis, effectibus & apparentibus differentijs colligere, & contra, ex motibus ſeu veris ſeu apparentibus, eorum cauſas & effectus, docebitur fuſius in ſequentibus. Hunc enim in finem Tractatum ſequentem compoſui.

AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS.

Lex. I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

PRojectilia perſeverant in motibus ſuis niſi quatenus a reſiſtentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt ſeſe a motibus rectilineis, non ceſſat rotari niſi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſive impreſſa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur, ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel oblique adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſq; determinationem componitur.

Lex. III.

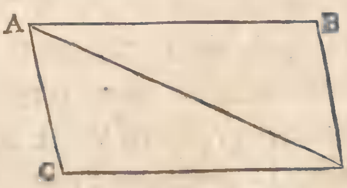
Lex. III.

Actioni contrariam ſemper & æqualem eſſe reactionem : ſive corporum duorum actiones in ſe mutuo ſemper eſſe æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Siquis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi allegatum trahit, retrahetur etiam & equus æqualiter in lapidem: nam funis utrinq; diſtentus eodem relaxandi ſe conatu urgebit Equum verſus lapidem, ac lapidem verſus equum, tantumq; impediet progreſſum unius quantum promovet progreſſum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi ſua quomodocunq: mutaverit, idem quoque viciſſim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem preſſionis mutuæ) ſubibit. His actionibus æquales fiunt mutationes non velocitatum ſed motuum, (ſcilicet in corporibus non aliunde impeditis :) Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, ſunt corporibus reciproce proportionales.

Corol. I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore deſcribere, quo latera ſeparatis.



Si corpus dato tempore, vi ſola *M*, ferretur ab *A* ad *B*, & vi ſola *N*, ab *A* ad *C*, compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraq; feretur id eodem tempore ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit ſecundum lineam *AC* ipſi *BD* parallelam, hæc vis nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *B D* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *B D* ſive vis *N* imprimatur, ſive non, atq; adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea

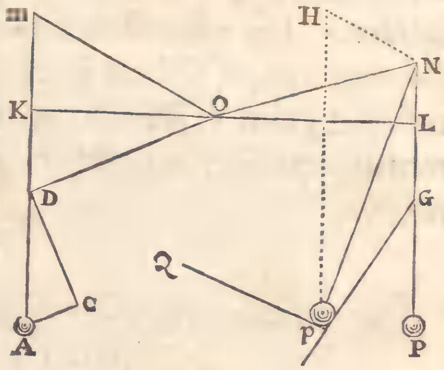
illa

illa *BD*. Eodem argumento in fine temporis ejuſdem reperietur alicubi in linea *CD*, & idcirco in utriuſq; lineæ concurſu *D* reperiri neceſſe eſt.

Corol. II.

Et hinc patet compoſitio vis directæ AD ex viribus quibuſvis obliquis AB & BD, & viciſſim reſolutio vis cujuſvis directæ AD in obliquas quaſcunq; AB & BD. Quæ quidem Compoſitio & reſolutio abunde confirmatur ex Mechanica.

Ut ſi de rotæ alicujus centro O exeuntes radij inæquales *OM*, *ON* filis *MA*, *NP* ſuſtineant pondera *A* & *P*, & quærantur vires ponderum ad movendam rotam: per centrum O agatur recta *KOL* filis perpendiculariter occurrens in *K* & *L*, centroq; O & intervallorum *OK*, *OL* majore *OL* deſcribatur circulus occurrens filo *MA* in *D*: & actæ rectæ *OD* parallela ſit *AC* & perpendicularis *DC*. Quoniam nihil refert utrum filorum puncta *K*, *L*, *D* affixa ſint vel non affixa ad planum rotæ, pondera idem valebunt ac ſi ſuſpenderentur a punctis *K* & *L* vel *D* & *L*. Ponderis autem *A* exponatur vis tota per lineam *AD*, & hæc reſolvetur in vires *AC*, *CD*, quarum *AC* trahendo radium *OD* directe a centro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera *DC*, trahendo radium *DO* perpendiculariter, idem valet ac ſi perpendiculariter traheret radium *OL* ipſi *OD* æqualem; hoc eſt idem atq; pondus *P*, quod ſit ad pondus *A* ut vis *DC* ad vim *DA*, id eſt (ob ſimilia triangula *ADC*, *DOK*,) ut *DO* (ſeu *OL*) ad *OK*. Pondera igitur *A* & *P*, quæ ſunt reciproce ut radii in directum poſiti *OK* & *OL*, idem pollebunt & ſic conſiſtent in æquilibrio: (quæ eſt proprietas notiſſima Libræ,



Vectis

Vectis & Axis in Peritrochio:) ſin pondus alterutrum ſit majus quam in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

Quod ſi pondus *p* ponderi *P* æquale partim ſuſpendatur filo *Np*, partim incumbat plano obliquo *pG*: agantur *pH*, *NH*, prior horizonti, poſterior plano *pG* perpendicularis; & ſi vis ponderis *p* deorſum tendens, exponatur per lineam *pH*, reſolvi poteſt hæc in vires *pN*, *HN*. Si filo *pN* perpendiculare eſſet planum aliquod *pQ* ſecans planum alterum *pG* in linea ad horizontem parallela; & pondus *p* his planis *pQ*, *pG* ſolummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus *pN*, *HN* perpendiculariter, nimirum planum *pQ* vi *pN* & planum *pG* vi *HN*. Ideoque ſi tollatur planum *pQ* ut pondus tendat filum, quoniam filum ſuſtinendo pondus, jam vicem præſtat plani ſublati, tendetur illud eadem vi *pN*, qua planum antea urgebatur. Unde tenſio fili hujus obliqui erit ad tenſionem fili alterius perpendicularis *PN*, ut *pN* ad *pH*. Ideoq; ſi pondus *p* ſit ad pondus *A* in ratione quæ componitur ex ratione reciproca minimarum diſtantiarum filorum ſuorum *AM*, *pN* a centro rotæ, & ratione directa *pH* ad *pN*; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atq; adeo ſe mutuo ſuſtinebunt, ut quilibet experiri poteſt.

Pondus autem *p* planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fiſſi facies internas: & inde vires cunei & mallei innoteſcunt: utpote cum vis qua pondus *p* urget planum *pQ* ſit ad vim, qua idem vel gravitate ſua vel ictu mallei impellitur ſecundum lineam *pH* in plano, ut *pN* ad *pH*; atq; ad vim qua urget planum alterum *pG* ut *pN* ad *NH*. Sed & vis Cochleæ per ſimilem virium diviſionem colligitur; quippe quæ cuneus eſt a vecte impulſus. Uſus igitur Corollarij hujus latiſſime patet, & late patendo veritatem ejus evincit, cum pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Authoribus diverſimode demonſtrata. Ex hiſce enim facile derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, radijs volubilibus, nervis tenſis & ponderibus directe vel oblique aſcendentibus, cæteriſq; potentijs Mechanicis

nicis componi ſolent, ut & vires Nervorum ad animalium oſſa movenda.

Corol. III.

Quantitas motus quæ colligitur capiendo ſummam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter ſe.

Etenim actio eiq; contraria reactio æquales ſunt per Legem 3, adeoq; per legem 2, æquales in motibus efficiunt mutationes verſus contrarias partes. Ergo ſi motus fiunt ad eandem partem, quicquid additur motui corporis fugientis ſubducetur motui corporis inſequentis ſic, ut ſumma maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant, æqualis erit ſubductio de motu utriuſq;, adeoq; differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut ſi corpus ſphæricum *A* ſit triplo majus corpore ſphærico *B*, habeatq; duas velocitatis partes, et *B* ſequatur in eadem recta cum velocitatis partibus decem, adeoq; motus ipſius *A* ſit ad motum ipſius *B* ut ſex ad decem: ponantur motus illis eſſe partium ſex & decem, & ſumma erit partium ſexdecim. In corporum igitur concurſu, ſi corpus *A* lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinq; corpus *B* amittet partes totidem, adeoq; perget corpus *A* poſt reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & *B* cum partibus ſeptem vel ſex vel quinq; exiſtente ſemper ſumma partium ſexdecim ut prius. Sin corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, adeoq; progrediatur poſt concurſum cum partibus quindecim vel ſexdecim vel ſeptendecim vel octodecim; corpus *B* amittendo, tot partes quot *A* lucratur, vel progredietur cum una parte, amiſſis partibus novem, vel quieſcet amiſſo motu ſuo progreſſivo partium decem, vel regredietur cum una parte amiſſo motu ſuo & (ut ita dicam) una parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progreſſivum partium duodecim. Atq; ita ſummæ motuum conſpirantium $15+1$ vel $16+0$, differentiæ contrario-

rum

17–1 & 18–2 ſemper erunt partium ſexdecim ut ante concurſum & reflexionem. Cognitis autem motibus quibuſcum corpora poſt reflexionem pergent, invenietur cujuſq; velocitas ponendo eam eſſe ad velocitatem ante reflexionem ut motus poſt ad motum ante. Ut in caſu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium ſex ante reflexionem & partium octodecim poſtea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium ſex poſt reflexionem, dicendo, ut motus partes ſex ante reflexionem ad motus partes octodecim poſtea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes ſex poſtea.

Quod ſi corpora vel non Sphærica vel diverſis in rectis moventia incidant in ſe mutuo oblique, & requirantur eorum motus poſt reflexionem, cognoſcendus eſt ſitus plani a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concurſus; dein corporis utriuſq; motus (per Corol. 2.) diſtinguendus eſt in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in ſe invicem ſecundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi ſunt iidem poſt reflexionem atq; antea, & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ ſunt ſic, ut ſumma conſpirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujuſmodi reflexionibus oriri etiam ſolent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos caſus in ſequentibus non conſidero, & nimis longum eſſet omnia huc ſpectantia demonſtrare.

Corol. IIII.

Commune gravitatis centrum ab actionibus corporum inter ſe non mutat ſtatum ſuum vel motus vel quietis, & propterea corporum omnium in ſe mutuo agentium (excluſis actionibus & impedimentis externis) commune centrum gravitatis vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum.

Nam ſi puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis & diſtantia eorum dividatur in ratione data, punctum dividens

dens vel quieſcet vel progredietur uniformiter in linea arecta. Hoc poſtea in Lemmate xxiii demonſtratur in plano, & eadem ratione demonſtrari poteſt in loco ſolido. Ergo ſi corpora quotcunq; moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis, vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta, propterea quod linea horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione data: ſimiliter & commune centrum horum duorum & tertii cujuſvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta, propterea quod ab eo dividitur diſtantia centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in data ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujuſvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta, propterea quod ab eo dividitur diſtantia inter centrum commune trium & centrum quarti in data ratione, & ſic in infinitum. Igitur in ſyſtemate corporum quæ actionibus in ſe invicem, alijsq; omnibus in ſe extrinſecus impreſſis, omnino vacant, adeoq; moventur ſingula uniformiter in rectis ſingulis, commune omnium centrum gravitatis vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum.

Porro in ſyſtemate duorum corporum in ſe invicem agentium, cum diſtantiæ centrorum utriuſq; a communi gravitatis centro ſint reciproce ut corpora, erunt motus relativi corporum eorundem vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter ſe. Proinde centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atq; adeo ab actionibus horum corporum inter ſe, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in ſtatu ſuo quoad motum vel quietem. In ſyſtemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in ſe mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat ſtatum ſuum; & reliquorum, quibuscum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; diſtantia autem horum duorum centrorum dividitur, a communi corporum omnium centro, in partes ſummis totalibus corporum, quorum

rum ſunt centra, reciproce proportionales, adeoq; centris illis duobus ſtatum ſuum movendi vel quieſcendi ſervantibus, commune omnium centrum ſervat etiam ſtatum ſuum; manifeſtum eſt quod commune illud omnium centrum, ob actiones binorum corporum inter ſe, nunquam mutât ſtatum ſuum quoad motum & quietem. In tali autem ſyſtemate actiones omnes corporum inter ſe, vel inter bina ſunt corpora, vel ab actionibus inter bina compoſitæ, & propterea communi omnium centro mutationem in ſtatu motus ejus vel Quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in ſe invicem, vel quieſcit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter, perget idem, non obſtantibus corporum actionibus inter ſe, vel ſemper quieſcere, vel ſemper progredi uniformiter in directum, niſi a viribus in ſyſtema extrinſecus impreſſis deturbetur de hoc ſtatu. Eſt igitur ſyſtematis corporum plurium Lex eadem quæ corporis ſolitarii, quoad perſeverantiam in ſtatu motus vel quietis. Motus enim progreſſivus ſeu corporis ſolitarii ſeu ſyſtematis corporum ex motu centri gravitatis æſtimari ſemper debet.

Corol. V.

Corporum dato ſpatio incluſorum ijdem ſunt motus inter ſe, ſive ſpatium illud quieſcat, ſive moveatur idem uniformiter in directum abſq; motu circulari.

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & ſummæ tendentium ad contrarias, eædem ſunt ſub initio in utroq; caſu (ex hypotheſi) & ex his ſummis vel differentiis oriuntur congreſſus & impetus quibus corpora ſe mutuo feriunt. Ergo per Legem 2 æquales erunt congreſſuum effectus in utroq; caſu, & propterea manebunt motus inter ſe in uno caſu æquales motibus inter ſe in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo ſe habent in Navi, ſive ea quieſcat, ſive moveatur uniformiter in directum.

 Corol. VI.

Corol. VI.

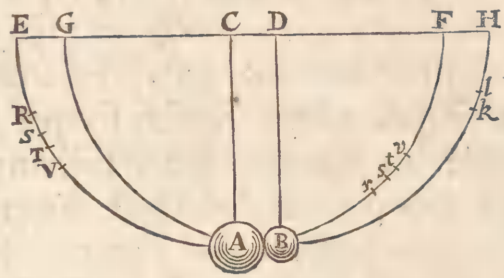
Si corpora moveantur quomodocunq; inter ſe & a viribus acceleratricibus æqualibus ſecundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter ſe ac ſi viribus illis non eſſent incitata.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum) & ſecundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per Legem 2.) adeoq; nunquam mutabunt poſitiones & motus eorum inter ſe.

Scholium

Hactenus principia tradidi a Mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per leges duas primas & Corollaria duo prima adinvenit *Galilæus* deſcenſum gravium eſſe in duplicata ratione temporis, & motum projectilium fieri in Parabola, conſpirante experientia, niſi quatenus motus illi per aeris reſiſtentiam aliquantulum retardantur. Ab ijſdem Legibus & Corollariis pendent demonſtrata de temporibus oſcillantium Pendulorum, ſuffragante Horologiorum experientia quotidiana. Ex his ijſdem & Lege tertia *D. Chriſtopherus Wrennus* Eques auratus, *Johannes Walliſius S.T.D.* & *D. Chriſtianus Hugenius*, hujus ætatis Geometrarum facile Principes, regulas congreſſuum & reflexionum duorum corporum ſeorſim adinvenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regia* communicarunt, inter ſe (quoad has leges) omnino conſpirantes; Et primus quidem *D. Walliſius*, dein *D. Wrennus* & *D. Hugenius* inventum prodidit. Sed & veritas comprobata eſt a *D. Wrenno* coram *Regia Societate* per experimentum Pendulorum, quod etiam *Clariſſimus Mariottus* Libro integro exponere mox dignatus eſt. Verum ut hoc experimentum cum Theorijs ad amuſſim congruat, habenda eſt ratio tum reſiſtentiæ aeris, tum etiam vis Elaſticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora *A*, *B* filis parallelis *A C*, *B D* a centris *C*, *D*. His centris & intervallis

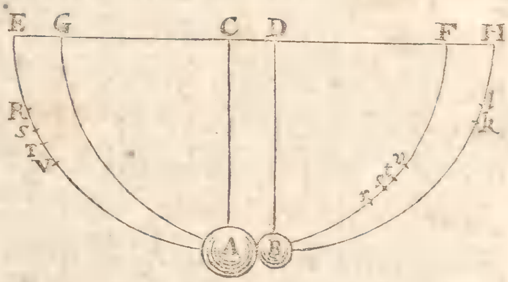
vallis deſcribantur ſemicirculi *EAF*, *GBH* radijs *CA*, *DB* biſecti. Trahatur corpus *A* ad arcus *EAF* punctum quodvis *R*, & (ſubducto corpore *B*) demittatur inde, redeatq; poſt unam oſcillationem ad punctum *V*. Eſt *RV* retardatio ex reſiſtentia aeris. Hujus *RV* fiat *ST* pars quarta ſita in medio, & hæc exhibebit retardationem in deſcenſu ab *S* ad *A* quam proxime. Reſtituatur corpus *B* in locum ſuum. Cadat corpus *A* de puncto *S*, & velocitas ejus in loco reflexionis *A*,



abſq; errore ſenſibili, tanta erit ac ſi in vacuo cecidiſſet de loco *T*. Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcus *TA*. Nam velocitatem Penduli in puncto infimo eſſe ut chorda arcus quem cadendo deſcripſit, Propoſitio eſt Geometris notiſſima. Poſt reflexionem perveniat corpus *A* ad locum *s*, & corpus *B* ad locum *k*. Tollatur corpus *B* & inveniatur locus *v*, a quo ſi corpus *A* demittatur & poſt unam oſcillationem redeat ad locum *r*, ſit *st* pars quarta ipſius *rv* ſita in medio, & per chordam arcus *tA* exponatur velocitas quam corpus *A* proxime poſt reflexionem habuit in loco *A*. Nam *t* erit locus ille verus & correctus ad quem corpus *A*, ſublata aeris reſiſtentia, aſcendere debuiſſet. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus *B* aſcendit, & inveniendus locus *l*, ad quem corpus illud aſcendere debuiſſet in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia perinde ac ſi in vacuo conſtituti eſſemus. Tandem ducendum erit corpus *A* in chordam arcus *TA* (quæ velocitatem ejus exhibet) ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime ante reflexionem, deinde in chordam arcus *tA* ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime poſt reflexionem. Et ſic corpus B ducendum erit in chordam arcus B*l*, ut habeatur motus ejus proxime poſt reflexionem. Et ſimili methodo ubi corpora duo ſimul demittuntur de locis diverſis, inveniendi ſunt motus utriuſq; tam ante, quam poſt reflexionem; & tum

de-

demum conferendi ſunt motus inter ſe & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in Pendulis pedum decem rem tentando, idq; in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis ampliſſimis, puta pedum octo, duodecim vel ſexdecim concurrerent, reperi ſemper ſine errore trium digitorum in menſuris,ubi corpora ſibi mutuo directe occurrebant,quod in partes contrarias mutatio motus erat corpori utriq; illata, atq; adeo quod actio & reactio ſemper erant æquales. Ut ſi corpus *A* incidebat in corpus *B* cum novem partibus motus, & amiſſis ſeptem partibus pergebat poſt reflexionem cum duabus, corpus *B* reſiliebat cum partibus iſtis ſeptem. Si corpora obviam ibant, *A* cum duodecim partibus & *B* cum ſex & redibat *A* cum duabus, redibat *B* cum octo, facta detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipſius *A* ſubducantur partes duodecim & reſtabit nihil; ſubducantur aliæ partes duæ & fiet motus duarum partium in plagam contrariam. & ſic de motu corporis *B* partium ſex ſubducendo partes quatuordecim,fiunt partes octo in plagam contrariam. Quod ſi corpora ibant ad eandem plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim & *B* tardius cum partibus quinq; & poſt reflexionem pergebat *A* cum quinq; partibus, pergebat B cum quatuordecim, facta tranſlatione partium novem de *A* in B. Et ſic in reliquis.



A congreſſu & colliſione corporum nunquam mutabatur quantitas motus quæ ex ſumma motuum conſpirantium & differentia contrariorum colligebatur.Namq; errorem digiti unius & alterius in menſuris tribuerim difficultati peragendi ſingula ſatis accurate. Difficile erat tum pendula ſimul demittere ſic, ut corpora in ſe mutuo impingerent in loco infimo *A* B, tum loca *s*, *k* notare ad quæ corpora aſcendebant poſt concurſum. Sed & in ipſis pilis inæqualis partium denſitas, & textura aliis de cauſis irregularis errores inducebant.

Porro

Porro nequis objiciat Regulam ad quam probandam inventum eſt hoc experimentum præſupponere corpora vel abſolute dura eſſe, vel ſaltem perfecte elaſtica, cujuſmodi nulla reperiuntur in compoſitionibus naturalibus; addo quod experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum a conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam ſi conditio illa in corporibus non perfecte duris tentanda eſt, debebit ſolummodo reflexio minui in certa proportione pro quantitate vis Elaſticæ. In Theoria *Wrenni* & *Hugenij* corpora abſolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congreſſus. Certius id affirmabitur de perfecte Elaſticis. In imperfecte Elaſticis velocitas reditus minuenda eſt ſimul cum vi Elaſtica; propterea quod vis illa, (niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub malleo patiuntur,) certa ac determinata ſit (quantum ſentio) faciatq; corpora redire ab invicem cum velocitate relativa quæ ſit ad relativam velocitatem concurſus in data ratione. Id in pilis ex lana arcte conglomerata & fortiter conſtricta ſic tentavi. Primum demittendo Pendula & menſurando reflexionem, inveni quantitatem vis Elaſticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis caſibus concurſuum, & reſpondebant experimenta. Redibant ſemper pilæ ab invicem cum velocitate relativa, quæ eſſet ad velocitatem relativam concurſus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex ſubere cum paulo minore. In vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atq; hoc pacto Lex tertia quoad ictus & reflexiones per Theoriam comprobata eſt, quæ cum experientia plane congruit.

In attractionibus rem ſic breviter oſtendo. Corporibus duobus quibusvis *A*, *B* ſe mutuo trahentibus, concipe obſtaculum quodvis interponi quo congreſſus eorum impediatur. Si corpus alterutrum *A* magis trahitur verſus corpus alterum *B*, quam illud alterum *B* in prius *A*, obſtaculum magis urgebitur preſſione corporis *A* quam preſſione corporis *B*; proindeq; non manebit in æquilibrio. Prævalebit preſſio fortior, facietq; ſyſtema corporum duorum

rum & obſtaculi moveri in directum in partes verſus *B*, motuq; in ſpatiis liberis ſemper accelerato abire in infinitum. Quod eſt abſurdum & Legi primæ contrarium. Nam per Legem primam debebit ſyſtema perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, proindeq; corpora æqualiter urgebunt obſtaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Tentavi hoc in Magnete & ferro. Si hæc in vaſculis propriis ſeſe contingentibus ſeorſim poſita, in aqua ſtagnante juxta fluitent, neutrum propellet alterum, ſed æqualitate attractionis utrinq; ſuſtinebunt conatus in ſe mutuos, ac tandem in æquilibrio conſtituta quieſcent.

Ut corpora in concurſu & reflexione idem pollent, quorum velocitates ſunt reciproce ut vires inſitæ: ſic in movendis Inſtrumentis Mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis ſe mutuo ſuſtinent, quorum velocitates ſecundum determinationem virium æſtimatæ, ſunt reciproce ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia Libræ, quæ oſcillante Libra, ſunt reciproce ut eorum velocitates ſurſum & deorſum: hoc eſt pondera, ſi recta aſcendunt & deſcendunt, æquipollent, quæ ſunt reciproce ut punctorum a quibus ſuſpenduntur diſtantiæ ab axe Libræ; ſin planis obliquis aliiſve admotis obſtaculis impedita aſcendunt vel deſcendunt oblique, æquipollent quæ ſunt ut aſcenſus & deſcenſus quatenus facti ſecundum perpendiculum: id adeo ob determinationem gravitatis deorſum. Similiter in Trochlea ſeu Polyſpaſto vis manus funem directe trahentis, quæ ſit ad pondus vel directe vel oblique aſcendens ut velocitas aſcenſus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, ſuſtinebit pondus. In horologiis & ſimilibus inſtrumentis, quæ ex rotulis commiſſis conſtructa ſunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum ſi ſunt reciproce ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, ſuſtinebunt ſe mutuo. Vis Cochleæ ad premendum corpus eſt ad vim manus manubrium circumagentis, ut circularis velocitas Manubrii ea in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progreſſivam Cochleæ verſus corpus preſſum. Vires quibus cuneus

neus urget partes duas ligni fiſſi eſt ad vim mallei in cuneum, ut progreſſus cunei ſecundum determinationem vis a malleo in ipſum impreſſæ, ad velocitatem qua partes ligni cedunt cuneo, ſecundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par eſt ratio Machinarum omnium.

Harum efficacia & uſus in eo ſolo conſiſtit ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde ſolvitur in omni aptorum inſtrumentorum genere Problema; *Datum pondus data vi movendi*, aliamve datam reſiſtentiam vi data ſuperandi. Nam ſi Machinæ ita formentur ut velocitates Agentis & Reſiſtentis ſint reciproce ut vires, Agens reſiſtentiam ſuſtinebit, & majori cum velocitatum diſparitate eandem vincet. Certe ſi tanta ſit velocitatum diſparitas ut vincatur etiam reſiſtentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter ſe labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem ſeparandorum cohæſione & elevandorum ponderibus oriri ſolet; ſuperata omni ea reſiſtentia, vis redundans accelerationem motus ſibi proportionalem, partim in partibus Machinæ, partim in corpore reſiſtente producet. Cæterum Mechanicam tractare non eſt hujus inſtituti. Hiſce volui tantum oſtendere quam late pateat, quamq; certa ſit Lex tertia motus. Nam ſi æſtimetur Agentis actio ex ejus vi & velocitate conjunctim; & Reſiſtentis reactio ex ejus partium ſingularum velocitatibus & viribus reſiſtendi ab earum attritione, cohæſione, pondere & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni inſtrumentorum uſu, ſibi invicem ſemper æquales. Et quatenus actio propagatur per inſtrumentum & ultimo imprimitur in corpus omne reſiſtens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis ſemper erit contraria.

DE
MOTU CORPORUM

Liber PRIMUS

SECT I.

De Methodo Rationum primarum & ultimarum, cujus ope ſequentia demonſtrantur.

LEMMA I.

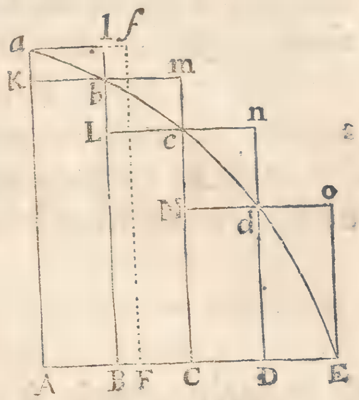
Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem dato tempore conſtanter tendunt & eo pacto propius ad invicem accedere poſſunt quam pro data quavis differentia; fiunt ultimo æquales.

Si negas, ſit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia *D*: contra hypotheſin.

Lem-

Lemma II.

Si in figura quavis AacE *rectis* Aa, AE, *& curva* AcE *comprehenſa, inſcribantur parallelogramma quotcunq;* Ab, Bc, Cd, &c. *ſub baſibus* AB, BC, CD, &c. *æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, &c. *figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, &c, *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes, quas habent ad ſe invicem figura inſcripta* AKbLcMdD, *circumſcripta* AalbmcndoE, *& curvilinea* AabcdE, *ſunt rationes æqualitatis.*



Nam figuræ inſcriptæ & circumſcriptæ differentia eſt ſumma parallelogrammorum $Kl + Lm + Mn + Do$, hoc eſt (ob æquales omnium baſes) rectangulum ſub unius baſi Kb & altitudinum ſumma Aa, id eſt rectangulum $ABla$. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus AB in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo, per Lemma I, figura inſcripta & circumſcripta & multo magis figura curvilinea intermedia fiunt ultimo æquales. *Q. E. D.*

Lemma III.

Eædem rationes ultimæ ſunt etiam æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB, BC, CD, *&c. ſunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim AF æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum $FAaf$. Hoc erit majus quam differentia figuræ inſcriptæ & figuræ circumſcriptæ, at latitudine ſua AF in

in infinitum diminuta, minus fiet quam datum quodvis rectangulum.

Corol. 1. Hinc ſumma ultima parallelogrammorum evaneſcentium coincidit omni ex parte cum figura curvilinea.

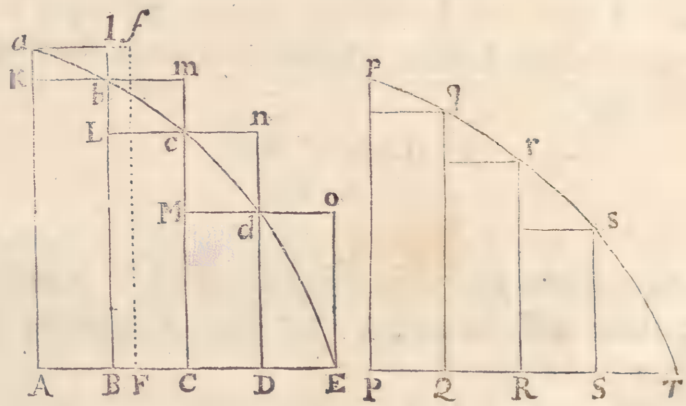
Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evaneſcentium arcuum *ab*, *bc*, *cd*, *&c.* comprehenditur, coincidit ultimo cum figura curvilinea.

Corol. 3. Ut & figura rectilinea quæ tangentibus eorundem arcuum circumſcribitur.

Corol. 4. Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *acE*,) non ſunt rectilineæ, ſed rectilinearum limites curvilinei.

Lemma IV.

Si in duabus figuris AacE, PprT, *inſcribantur* (*ut ſupra*) *duæ parallelogrammorum ſeries, ſitq; idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una figura ad parallelogramma in altera, ſingulorum ad ſingula, ſint eædem; dico quod figuræ duæ* AacE, PprT, *ſunt ad invicem in eadem illa ratione.*



Etenim ut ſunt parallelogramma ſingula ad ſingula, ita (componendo) fit ſumma omnium ad ſummam omnium, & ita figura ad

ad figuram; exiſtente nimirum figura priore (per Lemma 111.) ad ſummam priorem, & poſteriore figura ad ſummam poſteriorem in ratione æqualitatis.

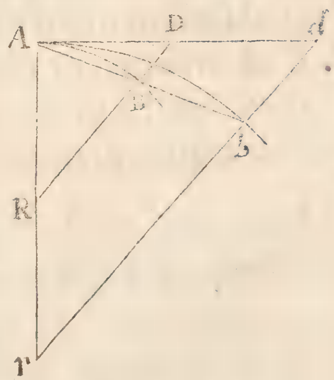
Corol. Hinc ſi duæ cujuſcunq; generis quantitates in eundem partium numerum utcunq; dividantur, & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, ſecunda ad ſecundam cæteræq; ſuo ordine ad cæteras; erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam ſi in Lemmatis hujus figuris ſumantur parallelogramma inter ſe ut partes, ſummæ partium ſemper erunt ut ſummæ parallelogrammorum; atq; adeo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id eſt (per hypotheſin) in ultima ratione partis ad partem.

Lemma V.

Similium figurarum latera omnia, quæ ſibi mutuo reſpondent, ſunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea, & areæ ſunt in duplicata ratione laterum.

Lemma VI.

Si arcus quilibet poſitione datus AB *ſubtendatur chorda* AB, *& in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ continuæ, tangatur a recta utrinq; producta* AD; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant & coeant; dico quod angulus* BAD *ſub chorda & tangente contentus minuetur in infinitum & ultimo evaneſcet.*



Nam producatur *AB* ad *b* & *AD* ad *d*, & punctis *A*, *B* coeuntibus, nullaq; adeo ipſius *Ab* parte *AB* jacente amplius intra curvam, manifeſtum eſt quod hæc recta A*b*

ve,

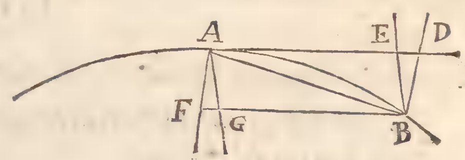
vel coincidet cum tangente A *d*, vel ducetur inter tangentem & curvam. Sed caſus poſterior eſt contra naturam Curvaturæ, ergo prior obtinet. *Q. E. D.*

Lemma. VII.

Iiſdem poſitis, dico quod ultima ratio arcus, chordæ & tangentis ad invicem eſt ratio æqualitatis. Vide Fig. *Lem.* 6 *&* 8 *vi.*

Nam producantur A *B* & A *D* ad *b* & *d* & ſecanti B D parallela agatur *b d*. Sitq; arcus A *b* ſimilis arcui A B. Et punctis A, *B* coeuntibus, angulus *d* A *b*, per Lemma ſuperius, evaneſcet; adeoq; rectæ A *b*, A *d* & arcus intermedius A *b* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hiſce ſemper proportionales rectæ A B, A D, & arcus intermedius A B rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde ſi per B ducatur tangenti parallela *B F* rectam quamvis A *F* per A tranſeuntem perpetuo ſecans in F, hæc ultimo ad arcum evaneſcentem A B rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo A F B-D, rationem ſemper habet æqualitatis ad A D.



Corol. 2. Et ſi per B & A ducantur plures rectæ B E, *B D*, A F, A *G*, ſecantes tangentem A D & ipſius parallelam *B F*, ratio ultima abſciſſarum omnium A D, A E, *B F*, *B G*, chordæq; & arcus A *B* ad invicem erit ratio æqualitatis.

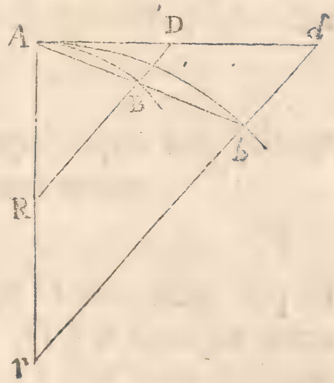
Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ in omni de rationibus ultimis argumentatione pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

Lemma VIII.

Si rectæ datæ A R, B R *cum arcu A* B, *chorda A* B *& tangente A D, triangula tria A R* B, *A R* B, *A R D conſtituunt, dein puncta A*, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evaneſcentium eſt ſimilitudinis, & ultima ratio æqualitatis.*

Nam

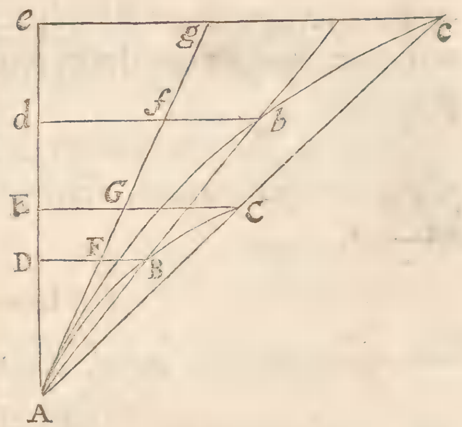
Nam producantur AB, A*D*, A*R* ad *b*, *d* & *r*. Ipſi *RD* agatur parallela *rbd*, & arcui AB ſimilis ducatur arcus A*b*. Coeuntibus punctis A, B, angulus *b*A*d* evaneſcet, & propterea triangula tria *rAb*, *rAb*, *rAd* coincident, ſuntq; eo nomine ſimilia & æqualia. Unde & hiſce ſemper ſimilia & proportionalia *RAB*, *RA*B, *RAD* fient ultimo ſibi invicem ſimilia & æqualia. *Q. E. D.*



Corol. Et hinc triangula illa in omni de rationibus ultimis argumentatione pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

Lemma IX.

Si recta AE & Curva AC poſitione datæ ſe mutuo ſecent in angulo dato A, & ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur BD, EC, curvæ occurrentes in B, C; dein puncta B, C accedant ad punctum A: dico quod areæ triangulorum ADB, AEC erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum.



Etenim in *AD* producta capiantur *Ad*, *Ae* ipſis *AD*, *AE* proportionales, & erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis *DB*, *EC* parallelæ & proportionales. Producatur *AC* ad *c*, ducatur curva A*bc* ipſi A*BC* ſimilis, & recta A*g* tangatur curva utraq; in A; & ſecantur ordinatim applicatæ in *F*, *G*, *f*, *g*. Tum coeant puncta *B*, *C* cum puncto A, & angulo *c*A*g* evaneſcente, coincident areæ curvilineæ A*bd*, A*ce* cum rectilineis A*fd*, A*ge*, adeoq; per Lemma V, erunt in duplicata

plicata ratione laterum *Ad*, *Ae*: Sed his areis proportionales ſemper ſunt areæ *ABD*, *ACE*, & his lateribus latera *AD*, *AE*. Ergo & areæ *ABD*, *AC*E ſunt ultimo in duplicata ratione laterum *AD*, *AE*. *Q. E. D.*

Lemma X.

Spatia, quæ corpus urgente quacunq; vi regulari deſcribit, ſunt ipſo motus initio in duplicata ratione temporum.

Exponantur tempora per lineas *AD*, A*E*, & velocitates genitæ per ordinatas *DB*, *EC*, & ſpatia his velocitatibus deſcripta erunt ut areæ A*BD*, A*C*E his ordinatis deſcriptæ, hoc eſt ipſo motus initio (per Lemma IX) in duplicata ratione temporum A*D*, A*E*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum ſimiles ſimilium figurarum partes temporibus proportionalibus deſcribentium errores, qui viribus æqualibus in partibus iſtis ad corpora ſimiliter applicatis generantur, & menſurantur a locis figurarum, ad quæ corpora temporibus ijſdem proportionalibus abſq; viribus iſtis pervenirent, ſunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proxime.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus ſimiliter applicatis generantur, ſunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

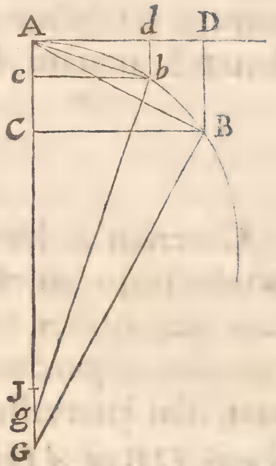
Lemma XI.

Subtenſa evaneſcens anguli contactus eſt ultimo in ratione duplicata ſubtenſæ arcus contermini.

Cas. 1. Sit arcus ille AB, tangens ejus A*D*, ſubtenſa anguli contactus ad tangentem perpendicularis *BD*, ſubtenſa arcus AB. Huic ſubtenſæ AB & tangenti AD perpendiculares erigantur A*G*, BG, concurrentes in G; dein accedant puncta D, B, G, ad puncta *d*, *b*, *g*, ſitq; *J* interſectio linearum BG, AG ultimo facta ubi puncta D, B accedunt uſq; ad A. Manifeſtum eſt quod diſtan-

tia

tia *G J* minor eſſe poteſt quam aſſignata quævis. Eſt autem (ex natura circulorum per puncta *ABG*, *Abg* tranſeuntium) *AB quad.* æquale *AG* x *B* D & *Ab quad.* æquale A*g* x *bd*, adeoq; ratio AB *quad.* ad A*b quad.* componitur ex rationibus A*G* ad A*g* & B*D* ad *bd*. Sed quoniam *JG* aſſumi poteſt minor longitudine quavis aſſignata, fieri poteſt ut ratio A*G* ad *Ag* minus differat a ratione æqualitatis quam pro differentia quavis aſſignata, adeoq; ut ratio *AB quad.* ad *Ab quad.* minus differat a ratione *BD* ad *bd* quam pro differentia quavis aſſignata. Eſt ergo, per Lemma I, ratio ultima *AB quad.* ad *Ab quad.* æqualis rationi ultimæ B*D* ad *bd*. *Q. E. D.*



Caſ. 2. Inclinetur jam *BD* ad *AD* in angulo quovis dato, & eadem ſemper erit ratio ultima *BD* ad *bd* quæ prius, adeoq; eadem ac *AB quad.* ad *Ab quad.* *Q. E. D.*

Caſ. 3. Et quamvis angulus *D* non detur, tamen anguli *D*,*d* ad æqualitatem ſemper vergent & propius accedent ad invicem quam pro differentia quavis aſſignata, adeoq; ultimo æquales erunt, per Lem. I. & propterea lineæ *B*D, *bd* in eadem ratione ad invicem ac prius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde cum tangentes *AD*, *Ad*, arcus *A*B, A*b* & eorum ſinus B*C*, *bc* fiant ultimo chordis AB, A*b* æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut ſubtenſæ B*D*, *bd*.

Corol. 2. Triangula rectilinea A*D*B, A*db* ſunt ultimo in triplicata ratione laterum A*D*, A*d*, inq; ſeſquiplicata laterum *D*B, *db*: Utpote in compoſita ratione laterum A*D* & *D*B, A*d* & *db* exiſtentia. Sic & triangula AB*C*, A*bc* ſunt ultimo in triplicata ratione laterum B*C*, *bc*.

Corol. 3. Et quoniam *DB*, *db* ſunt ultimo parallelæ & in duplicata ratione ipſarum *AD*, *Ad*; erunt areæ ultimæ curvilineæ

ADB, *Adb* (ex natura Parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum *ADB*, *Adb*, & ſegmenta *AB*, *Ab* partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc ſegmenta erunt in triplicata ratione tum tangentium *AD*, *Ad*; tum chordarum & arcuum *AB*, *Ab*.

Scholium.

Cæterum in his omnibus ſupponimus angulum contactus nec infinite majorem eſſe angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus ſuis, nec iiſdem infinite minorem ; hoc eſt curvaturam ad punctum *A*, nec infinite parvam eſſe nec infinite magnam, ſeu intervallum *AJ* finitæ eſſe magnitudinis. Capi enim poteſt *DB* ut AD^3: quo in caſu circulus nullus per punctum *A* inter tangentem *AD* & curvam *AB* duci poteſt, proindeq; angulus contactus erit infinite minor circularibus. Et ſimili argumento ſi fiat *DB* ſucceſſive ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur ſeries angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet poſterior eſt infinite minor priore. Et ſi fiat *DB* ſucceſſive ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia ſeries infinita angulorum contactus, quorum primus eſt ejuſdem generis cum circularibus, ſecundus infinite major, & quilibet poſterior infinite major priore. Sed & inter duos quoſvis ex his angulis poteſt ſeries utrinq; in infinitum pergens angulorum intermediorum inſeri, quorum quilibet poſterior erit infinite major priore. Ut ſi inter terminos AD^2 & AD^3 inſeratur ſeries $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rurſus inter binos quoſvis angulos hujus ſeriei inſeri poteſt ſeries nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neq; novit natura limitem.

Quæ de curvis lineis deq; ſuperficiebus comprehenſis demonſtrata ſunt, facile applicantur ad ſolidorum ſuperficies curvas & con-

contenta. Præmiſi vero hæc Lemmata ut effugerem tædium deducendi perplexas demonſtrationes, more veterum Geometrarum, ad abſurdum. Contractiores enim redduntur demonſtrationes per methodum indiviſibilium. Sed quoniam durior eſt indiviſibilium Hypotheſis; & propterea Methodus illa minus Geometrica cenſetur, malui demonſtrationes rerum ſequentium ad ultimas quantitatum evaneſcentium ſummas & rationes, primaſq; naſcentium, id eſt, ad limites ſummarum & rationum deducere, & propterea limitum illorum demonſtrationes qua potui breuitate præmittere. His enim idem præſtatur quod per methodum indiviſibilium, & principiis demonſtratis jam tutius utemur. Proinde in ſequentibus, ſiquando quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel ſi pro rectis uſurpavero lineolas curvas, nolim indiviſibilia ſed evaneſcentia diviſibilia, non ſummas & rationes partium determinatarum, ſed ſummarum & rationum limites ſemper intelligi, vimq; talium demonſtrationum ad methodum præcedentium Lemmatum ſemper revocari.

Objectio eſt, quod quantitatum evaneſcentium nulla ſit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non eſt ultima, ubi evanuerunt, nulla eſt. Sed & eodem argumento æque contendi poſſet nullam eſſe corporis ad certum locum pergentis velocitatem ultimam. Hanc enim, antequam corpus attingit locum, non eſſe ultimam, ubi attigit, nullam eſſe. Et reſponſio facilis eſt. Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur neq; antequam attingit locum ultimum & motus ceſſat, neq; poſtea, ſed tunc cum attingit, id eſt illam ipſam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum & quacum motus ceſſat. Et ſimiliter per ultimam rationem quantitatum evaneſcentium intelligendam eſſe rationem quantitatum non antequam evaneſcunt, non poſtea, ſed quacum evaneſcunt. Pariter & ratio prima naſcentium eſt ratio quacum naſcuntur. Et ſumma prima & ultima eſt quacum eſſe (vel augeri & minui) incipiunt & ceſſant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere poteſt, non autem tranſgredi.

Hæc eſt velocitas ultima. Et par eſt ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & ceſſantium. Cumq; hic limes ſit certus & definitus, Problema eſt vere Geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis Geometricis determinandis ac demonſtrandis legitime uſurpantur.

Contendi etiam poteſt, quod ſi dentur ultimæ quantitatum evaneſcentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines; & ſic quantitas omnis conſtabit ex indiviſibilibus, contra quam *Euclides* de incommenſurabilibus, in libro decimo Elementorum, demonſtravit. Verum hæc Objectio falſæ innititur hypotheſi. Ultimæ rationes illæ quibuſcum quantitates evaneſcunt, revera non ſunt rationes quantitatum ultimarum, ſed limites ad quos quantitatum ſine limite decreſcentium rationes ſemper appropinquant, & quas propius aſſequi poſſunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero tranſgredi, neq; prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligetur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data eſt differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ ſeu maximæ quarum iſta eſt ratio. Igitur in ſequentibus, ſiquando facili rerum imaginationi conſulens, dixero quantitates quam minimas, vel evaneſcentes vel ultimas, cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, ſed cogita ſemper diminuendas ſine limite.

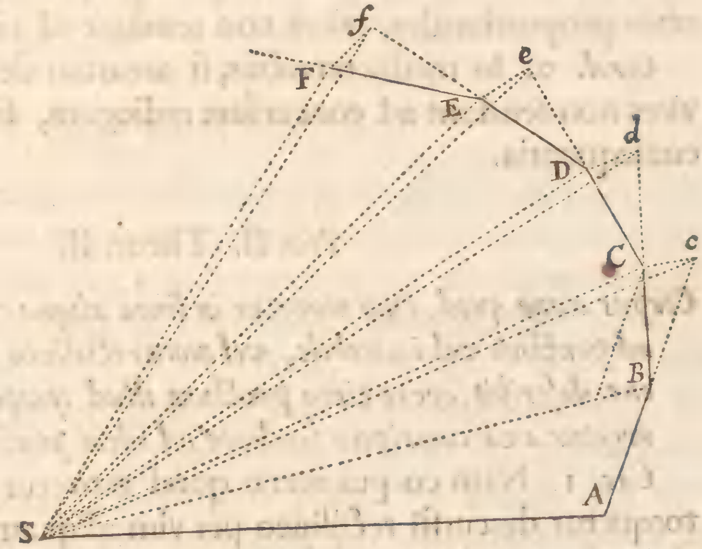
SECT. II.

De Inventione Virium Centripetarum.

Prop. I. Theorema. I.

Areas quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis deſcribunt, & in planis immobilibus conſiſtere, & eſſe temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte deſcribat corpus vi inſita rectam *AB*. Idem ſecunda temporis parte, ſi nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per Leg. I) deſcribens lineam *Bc* æqualem ipſi *A*B, adeo ut radiis *AS*, B*S*, *cS* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *A*SB, B*Sc*. Verum ubi corpus venit ad B, agat vis centripeta impulſu unico ſed magno, faciatq; corpus a recta B*c* deflectere & pergere in recta B*C*. Ipſi B*S* parallela agatur *c C* occurrens B*C* in *C*, & completa ſecunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. 1) reperietur in *C*, in eodem plano cum triangulo A*SB*. Junge *SC*, & triangulum *SBC*, ob parallelas S*B*, *Cc*, æquale erit triangulo *SBc*, atq; adeo etiam triangulo *SAB*. Simili argumento ſi



vis

vis centripeta ſucceſſive agat in *C*, *D*, *E*, &c. faciens ut corpus ſingulis temporis particulis ſingulas deſcribat rectas *CD*, *DE* *EF*, &c. jacebunt hæ in eodem plano, & triangulum *SCD* triangulo *SBC* & *SDE* ipſi *SCD* & *SEF* ipſi *SDE* æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto deſcribuntur: & componendo, ſunt arearum ſummæ quævis S*ADS*, *SAFS* inter ſe, ut ſunt tempora deſcriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum, & eorum ultima perimeter *ADF*,(per Corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva; adeoq; vis centripeta qua corpus de tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indeſinenter; areæ vero quævis deſcriptæ *S AD* S, S *AF* S temporibus deſcriptionum ſemper proportionales, erunt iiſdem temporibus in hoc caſu proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. In mediis non reſiſtentibus, ſi areæ non ſunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concurſum radiorum.

Corol. 2. In mediis omnibus, ſi arearum deſcriptio acceleratur, vires non tendunt ad concurſum radiorum, ſed inde declinant in conſequentia.

Pro. II. Theor. II.

Corpus omne quod, cum movetur in linea aliqua curva, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, deſcribit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum.

Cas. 1. Nam corpus omne quod movetur in linea curva, detorquetur de curſu rectilineo per vim aliquam in ipſum agentem. (per Leg. 1.) Et vis illa qua corpus de curſu rectilineo detorquetur & cogitur triangula quam minima *SAB*, S*BC*, *SCD* &c. circa punctum immobile S, temporibus æqualibus æqualia deſcribere, agit in loco *B* ſecundum lineam parallelam ipſi *cC* (per Prop. 40 Lib. I Elem. & Leg. II.) hoc eſt ſecundum lineam

BS, & in loco *C* ſecundum lineam ipſi *d D* parallelam, hoc eſt ſecundum lineam *C S*, &c. Agit ergo ſemper ſecundum lineas tendentes ad punctum illud immobile S. *Q. E. D.*

Cas. 2. Et, per Legum Corollarium quintum, perinde eſt ſive quieſcat ſuperficies in qua corpus deſcribit figuram curvilineam, ſive moveatur eadem una cum corpore, figura deſcripta & puncto ſuo S uniformiter in directum.

Scholium.

Urgeri poteſt corpus a vi centripeta compoſita ex pluribus viribus In hoc caſu ſenſus Propoſitionis eſt, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. Porro ſi vis aliqua agat ſecundum lineam ſuperficiei deſcriptæ perpendicularem, hæc faciet corpus deflectere a plano ſui motus, ſed quantitatem ſuperficiei deſcriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compoſitione virium negligenda eſt.

Prop. III. Theor. III.

Corpus omne quod, radio ad centrum corporis alterius utcunq; moti ducto, deſcribit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compoſita ex vi centripeta tendente ad corpus alterum & ex vi omni acceleratrice, qua corpus alterum urgetur.

Nam (per Legum Corol. 6.) ſi vi nova, quæ æqualis & contraria ſit illi qua corpus alterum urgetur, urgeatur corpus utrumq; ſecundum lineas parallelas, perget corpus primum deſcribere circa corpus alterum areas eaſdem ac prius: vis autem qua corpus alterum urgebatur, jam deſtruetur per vim ſibi æqualem & contrariam, & propterea (per Leg. 1.) corpus illud alterum vel quieſcet vel movebitur uniformiter in directum, & corpus primum, urgente differentia virium, perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum deſcribere. Tendit igitur (per Theor. 2.) differentia virium ad corpus illud alterum ut centrum. *Q. E. D.*

Co-

Corol. 1. Hinc ſi corpus unum radio ad alterum ducto deſcribit areas temporibus proportionales, atq; de vi tota (ſive ſimplici, ſive ex viribus pluribus, juxta Legum Corollarium ſecundum, compoſita,) qua corpus prius urgetur, ſubducatur (per idem Legum Corollarium) vis tota acceleratrix qua corpus alterum urgetur; vis omnis reliqua qua corpus prius urgetur tendet ad corpus alterum ut centrum.

Corol. 2. Et ſi areæ illæ ſunt temporibus quamproxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum quamproxime.

Corol. 3. Et vice verſa, ſi vis reliqua tendit quamproxime ad corpus alterum, erunt areæ illæ temporibus quamproxime proportionales.

Corol. 4. Si corpus radio ad alterum corpus ducto deſcribit areas quæ, cum temporibus collatæ, ſunt valde inæquales, & corpus illud alterum vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum; actio vis centripetæ ad corpus illud alterum tendentis, vel nulla eſt, vel miſcetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: Viſq; tota ex omnibus, ſi plures ſunt vires, compoſita, ad aliud (ſive immobile ſive mobile) centrum dirigitur, circum quod æquabilis eſt arearum deſcriptio. Idem obtinet ubi corpus alterum motu quocunq; movetur, ſi modo vis centripeta ſumatur, quæ reſtat poſt ſubductionem vis totius agentis in corpus illud alterum.

Scholium

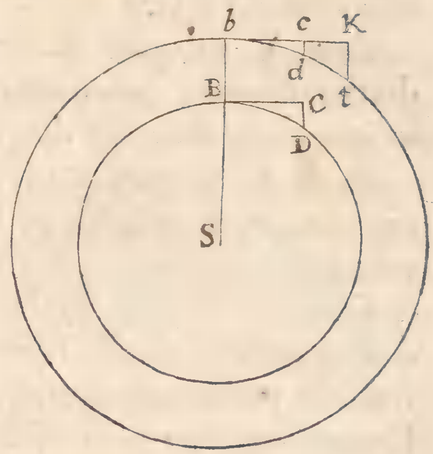
Quoniam æquabilis arearum deſcriptio Index eſt centri quod vis illa reſpicit qua corpus maxime afficitur, corpus autem vi ad hoc centrum tendente retinetur in orbita ſua, & motus omnis circularis recte dicitur circa centrum illud fieri, cujus vi corpus retrahitur de motu rectilineo & retinetur in Orbita: quidni uſurpemus in ſequentibus æquabilem arearum deſcriptionem ut Indicem centri circum quod motus omnis circularis in ſpatiis liberis peragitur?

Prop.

Prop. IV. Theor. IV.

Corporum quæ diverſos circulos æquabili motu deſcribunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere, & eſſe inter ſe ut arcuum ſimul deſcriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

Corpora *B*, *b* in circumferentiis circulorum *BD*, *bd* gyrantia, ſimul deſcribant arcus *BD*, *bd*. Quoniam ſola vi inſita deſcriberent tangentes *BC*, *bc* his arcubus æquales, manifeſtum eſt quod vires centripetæ ſunt quæ perpetuo retrahunt corpora de tangentibus ad circumferentias circulorum, atq; adeo hæ ſunt ad invicem in ratione prima ſpatiorum naſcentium *CD*, *cd*: tendunt vero ad centra circulorum per Theor. II, propterea quod areæ radiis deſcriptæ ponuntur temporibus proportionales. Fiat figura *tkb* figuræ *DCB* ſimilis, & per Lemma V, lineola *CD* erit ad lineolam *kt* ut arcus B*D* ad arcum *bt*: nec non, per Lemma XI, lineola naſcens *tk* ad lineolam naſcentem *dc* ut *bt quad.* ad *bd quad.* & ex æquo lineola naſcens *DC* ad lineolam naſcentem *dc* ut B*D* x *bt* ad *bd quad.* ſeu quod perinde eſt, ut $\frac{BD \times bt}{Sb}$ ad $\frac{bd \textit{ quad.}}{Sb}$, adeoq; (ob æquales rationes $\frac{bt}{Sb}$ & $\frac{BD}{SB}$) ut $\frac{BD \textit{ quad.}}{SB}$ ad $\frac{bd \textit{ quad.}}{Sb}$. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc vires centripetæ ſunt ut velocitatum quadrata applicata ad radios circulorum.

Corol. 2. Et reciproce ut quadrata temporum periodicorum ap-

plicata ad radios ita ſunt hæ vires inter ſe. Id eſt (ut cum Geometris loquar) hæ vires ſunt in ratione compoſita ex duplicata ratione velocitatum directe & ratione ſimplici radiorum inverſe: necnon in ratione compoſita ex ratione ſimplici radiorum directe & ratione duplicata temporum periodicorum inverſe.

Corol. 3. Unde ſi tempora periodica æquantur, erunt tum vires centripetæ tum velocitates ut radii, & vice verſa.

Corol. 4. Si quadrata temporum periodicorum ſunt ut radii, vires centripetæ ſunt æquales, & velocitates in dimidiata ratione radiorum: Et vice verſa.

Corol. 5. Si quadrata temporum periodicorum ſunt ut quadrata radiorum, vires centripetæ ſunt reciproce ut radii, & velocitates æquales: Et vice verſa.

Corol. 6. Si quadrata temporum periodicorum ſunt ut cubi radiorum, vires centripetæ ſunt reciproce ut quadrata radiorum; velocitates autem in radiorum dimidiata ratione: Et vice verſa.

Corol. 7. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus & viribus, quibus corpora ſimiles figurarum quarumcunq; ſimilium, centraq; ſimiliter poſita habentium, partes deſcribunt, conſequuntur ex Demonſtratione præcedentium ad hoſce caſus applicata.

Scholium

Caſus Corollarii ſexti obtinet in corporibus cæleſtibus (ut ſeorſum colligerunt etiam noſtrates *Wrennus*, *Hookius & Halleus*) & propterea quæ ſpectant ad vim centripetam decreſcentem in duplicata ratione diſtantiarum a centris decrevi fuſius in ſequentibus exponere.

Porro præcedentis demonſtrationis beneficio colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis eſt ea gravitatis. Nam cum vis illa, quo tempore corpus percurrit arcum *BC*, impellat ipſum per ſpatium *CD*, quod ipſo motus initio æquale eſt quadrato arcus illius *BD* ad circuli diametrum applicato; & corpus omne vi eadem in eandem ſemper plagam con-

continuata, deſcribat ſpatia in duplicata ratione temporum: Vis illa, quo tempore corpus revolvens arcum quemvis datum deſcribit, efficiet ut corpus idem recta progrediens deſcribat ſpatium quadrato arcus illius ad circuli diametrum applicato æquale; adeoq; eſt ad vim gravitatis ut ſpatium illud ad ſpatium quod grave cadendo eodem tempore deſcribit. Et hujuſmodi Propoſitionibus *Hugenius*, in eximio ſuo Tractatu de Horologio oſcillatorio, vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

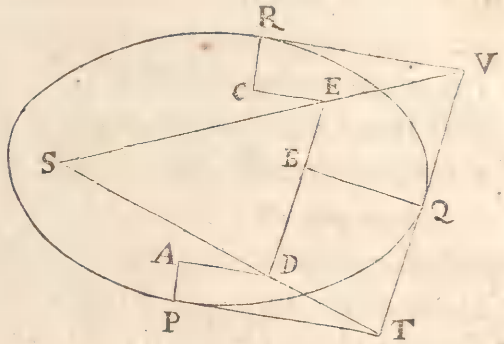
Demonſtrari etiam poſſunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis deſcribi intelligatur Polygonum laterum quotcunq; Et ſi corpus in Polygoni lateribus data cum velocitate movendo, ad ejus angulos ſingulos a circulo reflectatur; vis qua ſingulis reflexionibus impingit in circulum erit ut ejus velocitas, adeoq; ſumma virium in dato tempore erit ut velocitas illa & numerus reflexionum conjunctim, hoc eſt (ſi Polygonum detur ſpecie) ut longitudo dato illo tempore deſcripta & longitudo eadem applicata ad Radium circuli, id eſt ut quadratum longitudinis illius applicatum ad Radium; adeoq; ſi Polygonum lateribus infinite diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore deſcripti applicatum ad radium. Hæc eſt vis qua corpus urget circulum, & huic æqualis eſt vis contraria qua circulus continuo repellit corpus centrum verſus.

Prop. V. Prob. I.

Data quibuſcunq; in locis velocitate, qua corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus deſcribit, centrum illud invenire.

Figuram deſcriptam tangant rectæ tres *PT*, *TQV*, *VR* in punctis totidem *P*, *Q*, *R*, concurrentes in *T* & *V*. Ad tangentes erigantur perpendicula *PA*, *QB*, *RC*, velocitatibus corporis in punctis illis *P*, *Q*, *R* a quibus eriguntur reciproce proportionalia; id eſt ita ut ſit *PA* ad *QB* ut velocitas in *Q* ad velocitatem in *P*, & *QB* ad *RC* ut velocitas in *R* ad velocitatem in

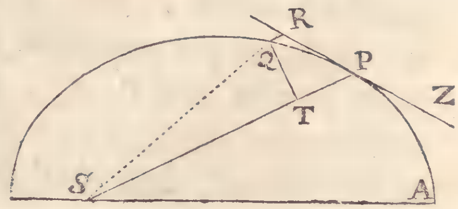
in *Q*. Per perpendiculorum terminos *A*, *B*, *C* ad angulos rectos ducantur *AD*, *DBE*, *EC* concurrentia in *D* & *E*: Et actæ *TD*, *VE* concurrent in centro quæſito *S*.



Nam cum corpus in *P* & *Q* radiis ad centrum ductis areas deſcribat temporibus proportionales, ſintq; areæ illæ ſimul deſcriptæ ut velocitates in *P* & *Q* ductæ reſpective in perpendicula a centro in tangentes *PT*, *QT* demiſſa: Erunt perpendicula illa ut velocitates reciproce, adeoq; ut perpendicula *AP*, *BQ* directe, id eſt ut perpendicula a puncto *D* in tangentes demiſſa. Unde facile colligitur quod puncta *S*, *D*, *T* ſunt in una recta. Et ſimili argumento puncta *S*, *E*, *V* ſunt etiam in una recta; & propterea centrum *S* in concurſu rectarum *TD*, *V*E verſatur. *Q. E. D.*

Pro. VI. Theor. V.

Si corpus P revolvendo circa centrum S, deſcribat lineam quamvis curvam APQ, tangat vero recta ZPR curvam illam in puncto quovis P, & ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto Q agatur QR diſtantiæ SP parallela, ac demittatur QT perpendicularis ad diſtantiam SP: Dico quod vis centripeta ſit reciproce ut ſolidum $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$, *ſi modo ſolidi illius ea ſemper ſumatur quantitas quæ ultimo fit ubi coeunt puncta P & Q.*



Namq; in figura indefinite parva *QRPT* lineola naſcens *QR*, dato tempore, eſt ut vis centripeta (per Leg. II.) & da-

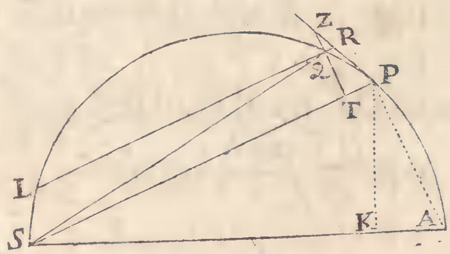
data vi, ut quadratum temporis (per Lem. X.) atq; adeo, neutro dato, ut vis centripeta & quadratum temporis conjunctim, adeoq; vis centripeta ut lineola *QR* directe & quadratum temporis inverſe. Eſt autem tempus ut area *S* P *Q*, ejusve dupla *S* P x *QT*, id eſt ut S P & *QT* conjunctim, adeoq; vis centripeta ut *QR* directe atq; SP *quad.* in *QT* *quad.* inverſe, id eſt ut $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$ inverſe. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi detur figura quævis, & in ea punctum ad quod vis centripeta dirigitur; inveniri poteſt lex vis centripetæ quæ corpus in figuræ illius perimetro gyrari faciet. Nimirum computandum eſt ſolidum $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$ huic vi reciproce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis ſequentibus.

Prop. VII. Prob. II.

Gyretur corpus in circumferentia circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum aliquod in circumferentia datum.

Eſto circuli circumferentia S *QP A*, centrum vis centripetæ S, corpus in circumferentia latum P, locus proximus in quem movebitur *Q*. Ad diametrum S *A* & rectam S P demitte perpendicula P K, *QT*, & per *Q* ipſi S P parallelam age *L R* occurrentem circulo in L & tangenti P *R* in *R*, & coeant *TQ*, P *R* in *Z*.



Ob ſimilitudinem triangulorum Z *QR*, *ZT* P, S P *A* erit *R* P *quad.* (hoc eſt *QR* L) ad *QT* *quad.* ut S *A* *quad.* ad S P *quad.* Ergo $\frac{QRL \times SP\ quad.}{SA\ quad.}$ æquatur *QT* *quad.* Ducantur hæc æqua-

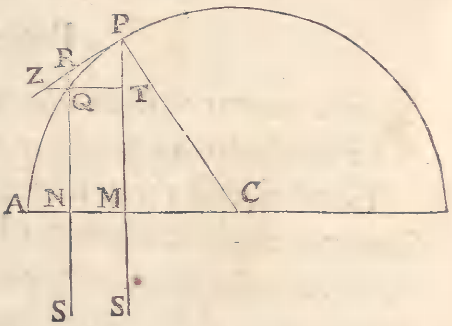
lia

lia in $\frac{SP\ quad.}{QR}$, & punctis P & Q coeuntibus, ſcribatur SP pro *RL* *S*ic fiet $\frac{SP\,qc}{SAq}$ æquale $\frac{QTq \times SPq}{QR}$. Ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce eſt ut $\frac{SP\,qc}{SAq}$, id eſt (ob datum S *A quad*) ut quadrato-cubus diſtantiæ SP. Quod erat inveniendum.

Prop. VIII. Prob. III.

Moveatur corpus in circulo P Q A : ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum, ut lineæ omnes PS, *R*S *ad id ductæ, pro parallelis haberi poſſint.*

A circuli centro *C* agatur ſemidiameter *C A* parallelas iſtas perpendiculariter ſecans in *M* & *N*, & jungantur *C*P. Ob ſimilia triangula *C*P*M*, & *T*P*Z*, vel (per Lem. VIII.) *T*P*Q*, eſt *C*P*q*. ad P*Mq*. ut P*Qq*. vel (per Lem. VII.) P*Rq*. ad *QTq*. & ex natura circuli rectangulum $QR \times RN + QN$ æquale eſt P*R* quadrato. Coeuntibus autem punctis P, *Q* ſit $RN + QN$ æqualis 2P*M*. Ergo eſt *C*P *quad.* ad P*M quad.* ut $QR \times 2\,PM$ ad *QT quad.* adeoq; $\frac{QT\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2\,PM\ cub.}{CP\ quad.}$, & $\frac{QT\ quad. \times SP\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2\,PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$. Eſt ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2\,PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$ hoc eſt (neglecta ratione determinata $\frac{2\,SP\ quad.}{CP\ quad.}$) reciproce ut P*M cub.* *Q. E. J.*



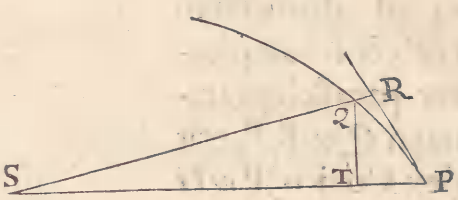
Scho-

Scholium.

Et ſimili argumento corpus movebitur in Ellipſi vel etiam in Hyperbola vel Parabola, vi centripeta quæ ſit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

Prop. IX. Prob. IV.

Gyretur corpus in ſpirali P *QS ſecante radios omnes* SP, S*Q*, *&c. in angulo dato: Requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ſpiralis.*



Detur angulus indefinite parvus PS*Q*, & ob datos omnes angulos dabitur ſpecie figura SP*QRT*. Ergo datur ratio $\frac{QT}{RQ}$, eſtq; $\frac{QT\ quad.}{QR}$ ut *QT*, hoc eſt ut SP. Mutetur jam utcunq; angulus PS*Q*, & recta *QR* angulum contactus *Q*PR ſubtendens mutabitur (per Lemma XI.) in duplicata ratione ipſius PR vel *QT*. Ergo manebit $\frac{QT\ quad.}{QR}$ eadem quæ prius, hoc eſt ut SP. Quare $\frac{QTq \times SPq}{QR}$ eſt ut SP *cub.* id eſt (per Corol. Theor. V.) vis centripeta ut cubus diſtantiæ SP. *Q.E.J.*

Lemma XII.

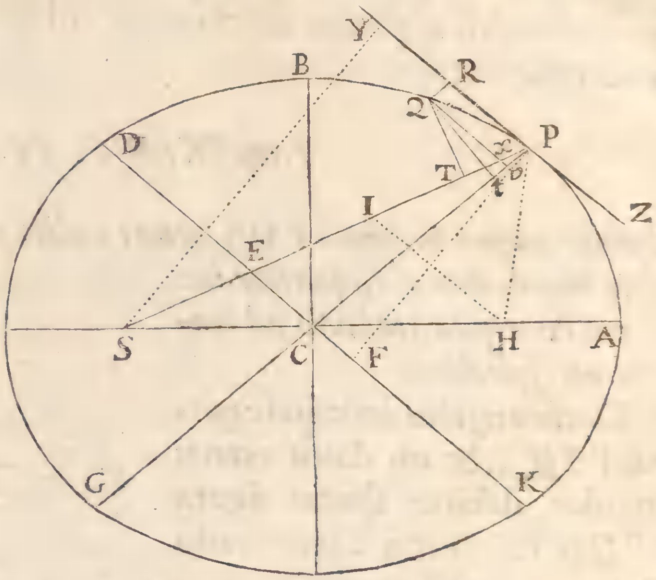
Parallelogramma omnia circa datam Ellipſin deſcripta eſſe inter ſe æqualia. Idem intellige de Parallelogrammis in Hyperbola circum diametros ejus deſcriptis.

Conſtat utrumq; ex Conicis.

Prop.

Prop. X. Prob. V.

Gyretur corpus in Ellipſi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipſeos.



Sunto CA, CB ſemiaxes Ellipſeos; GP, DK diametri conjugatæ; PF, Qt perpendicula ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP; & ſi compleatur parallelogrammum $QvRP$, erit (ex Conicis) PvG ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (ob ſimilia triangula Qvt, PCF) Qv *quad.* eſt ad Qt *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* & conjunctis rationibus, PvG ad Qt *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & PC *quad.* ad PF *quad.* id eſt vG ad $\frac{Qt\ quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq}{PCq}$. Scribe QR pro Pv, & (per Lemma xii.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non (punctis P & Q coeuntibus) $2PC$ pro vG, & ductis extremis & medijs in ſe mutuo, fiet $\frac{Qtq \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$ Eſt ergo (per Corol. Theor.V.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$, id eſt

(ob

(ob datum 2 $BCq. \times CAq.$) ut $\frac{1}{PC}$, hoc eſt, directe ut diſtantia PC. *Q. E. I.*

Corol. 1. Unde viciſſim ſi vis ſit ut diſtantia, movebitur corpus in Ellipſi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem Ellipſis migrare poteſt.

Corol. 2. Et æqualia erunt revolutionum in Figuris univerſis circa centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in Ellipſibus ſimilibus æqualia ſunt per Corol. 3 & 7 Prop. IV: In Ellipſibus autem communem habentibus axem majorem, ſunt ad invicem ut Ellipſeon areæ totæ directe & arearum particulæ ſimul deſcriptæ inverſe; id eſt ut axes minores directe & corporum velocitates in verticibus principalibus inverſe, hoc eſt ut axes illi directe & ordinatim applicatæ ad axes alteros inverſe, & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inverſarum) in ratione æqualitatis.

Scholium.

Si Ellipſis, centro in infinitum abeunte, vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hac Parabola, & vis ad centrum infinite diſtans jam tendens, evadet æquabilis. Hoc eſt Theorema *Galilei.* Et ſi Coniſectio Parabolica, inclinatione plani ad conum ſectum mutata, vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro, vi centripeta in centrifugam verſa.

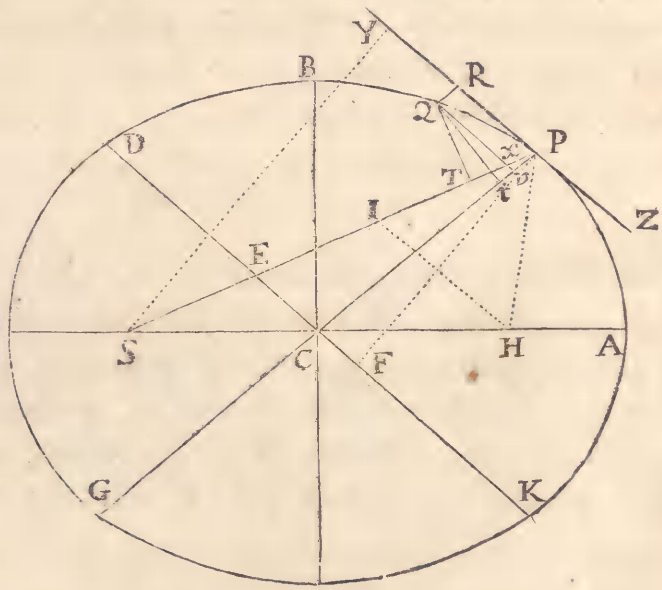
SECT. III.

De motu Corporum in Conicis Sectionibus excentricis.

Prop. XI. Prob. VI.

Revolvatur corpus in Ellipſi: Requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipſeos.

Eſto Ellipſeos ſuperioris umbilicus S. Agatur SP ſecans Ellipſeos tum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & compleatur parallelogrammum $QxPR$. Patet EP æqualem eſſe ſemiaxi majori AC, eo quod acta ab altero Ellipſeos umbilico H linea HI ipſi EC parallela, (ob æquales CS, CH) æquentur ES, EI, adeo ut EP ſemiſumma ſit ipſarum PS, PI, id eſt (ob parallelas HI, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipſorum PS, PH, quæ conjunctim axem totum $2AC$ adæquant. Ad SP demittatur perpendicularis QT, & Ellipſeos latere recto principali (ſeu $\frac{2BC\ quad.}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv; id eſt ut PE (ſeu AC) ad PC: & $L \times Pv$ ad GvP ut L ad Gv;



&

& *Gv* P ad *Qv quad.* ut *C* P *quad.* ad *CD quad*; & (per Lem. VIII.) *Qv quad.* ad *Qx quad.* punctis *Q* & P coeuntibus, eſt ratio æqualitatis, & *Qx quad.* ſeu *Qv quad.* eſt ad *QT quad.* ut E P *quad.* ad P *F quad*, id eſt ut *CA quad.* ad P *F quad.* ſive (per Lem. XII.) ut *CD quad.* ad *CB quad.* Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR$ fit ad *QT quad.* ut *AC* ad $PC+L$ ad $Gv+CPq$ ad $CDq+CDq.$ ad $CBq.$ id eſt ut $AC \times L$ (ſeu $2CBq.$) $\times CPq.$ ad $PC \times Gv \times CBq.$ ſive ut $2PC$ ad Gv. Sed punctis *Q* & P coeuntibus, æquantur $2PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & *QT quad.* æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq.}{QR}$ & fiet $L \times SPq.$ æquale $\frac{SPq. \times QTq}{QR}$. Ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce eſt ut $L \times SPq.$ id eſt reciproce in ratione duplicata diſtantiæ SP. *Q. E. I.*

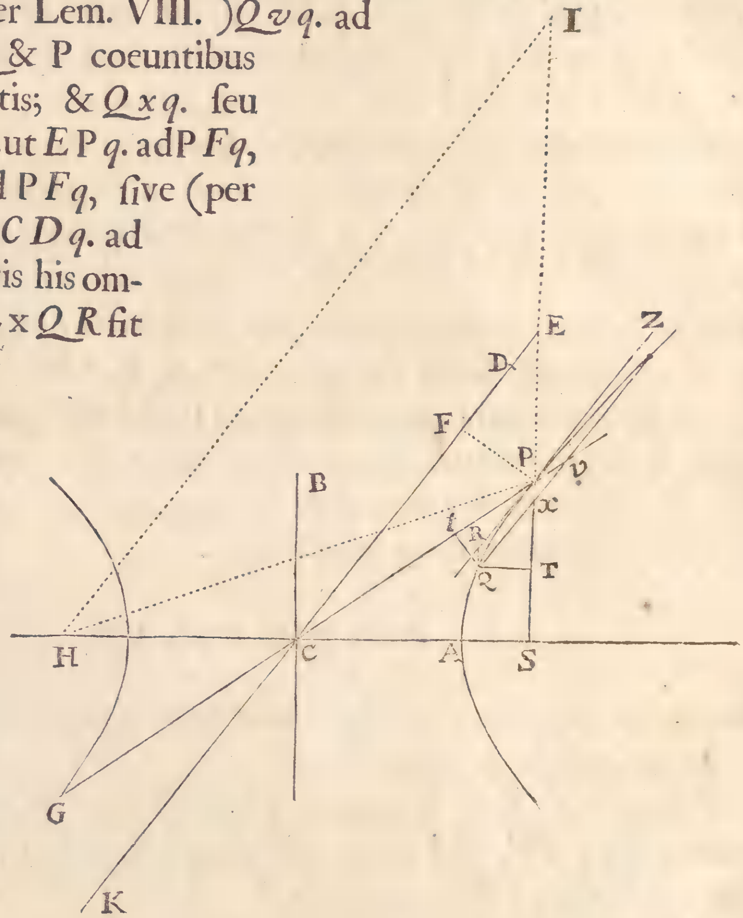
Eadem brevitate qua traduximus Problema quintum ad Parabolam, & Hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem Problematis & uſum ejus in ſequentibus, non pigebit caſus cæteros demonſtratione confirmare.

Prop. XII. Prob. VII.

Moveatur corpus in Hyperbola: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto *CA*, *CB* ſemi-axes Hyperbolæ; P*G*, *KD* diametri conjugatæ; PF, *Qt* perpendicula ad diametros; & *Qv* ordinatim applicata ad diametrum *G*P. Agatur SP ſecans tum diametrum *DK* in E, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *QR*P*x*. Patet *E*P æqualem eſſe ſemiaxi tranſverſo *AC*, eo quod, acta ab altero Hyperbolæ umbilico *H* linea *HI* ipſi *EC* parallela, ob æquales *CS*, *CH*, æquentur *ES*, *EI*; adeo ut *E*P ſemidifferentia ſit ipſarum PS, P*I*, id eſt (ob parallelas *HI*, P*R* & angulos æquales *I*P*R*, *H*P*Z*) ipſarum P*I*, P*H*, quarum differentia axem totum 2 *AC* adæquat. Ad S*P* de-

demittatur perpendicularis *QT*. Et Hyperbolæ latere recto principali (ſeu $\frac{2\,BCq}{AC}$) dicto *L*, erit *L* x *QR* ad *L* x P*v* ut *QR* ad P*v*, id eſt, ut P*E* (ſeu *AC*) ad *PC*; Et *L* x P*v* ad *Gv*P ut *L* ad *Gv*; & *Gv*P ad *Qvq*. ut *C*P*q*. ad *CDq*; & (per Lem. VIII.) *Qvq*. ad *Qxq*, punctis *Q* & P coeuntibus fit ratio æqualitatis; & *Qxq*. ſeu *Qvq*. eſt ad *QTq*. ut *E*P*q*. ad P*Fq*, id eſt ut *CAq*. ad P*Fq*, ſive (per Lem. XII.) ut *CDq*. ad *CBq*: & conjunctis his omnibus rationibus *L* x *QR* fit ad *QTq*. ut *AC* ad P*C* + *L* ad *Gv* + *CPq*. ad *CDq*. + *CDq*. ad *CBq*: id eſt ut *AC* x *L* (ſeu 2 *BCq*.) x *P*-*Cq*. ad *PC* x *Gv* x *C*B *quad.* ſive ut 2 *PC* ad *Gv*, ſed punctis *Q* & P coeuntibus æquantur 2 *PC* & *Gv*.



Ergo & his proportionalia *L* x *QR* & *QTq*. æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq.}{QR}$ & fiet *L* x S*Pq*. æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce eſt ut L x SP*q*, id eſt in ratione duplicata diſtantiæ SP. *Q. E. I.*

Eo-

Eodem modo demonſtratur quod corpus, hac vi centripeta in centrifugam verſa, movebitur in Hyperbola conjugata.

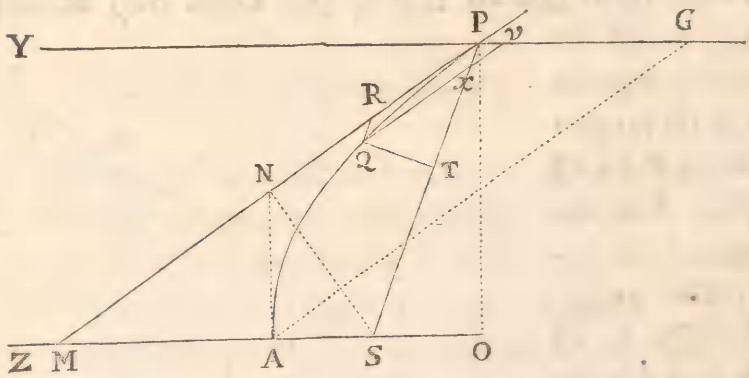
Lemma XIII.

Latus rectum Parabolæ ad verticem quemvis pertinens, eſt quadruplum diſtantiæ verticis illius ab umbilico figuræ. Patet ex Conicis.

Lemma XIV.

Perpendiculum quod ab umbilico Parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium eſt proportionale inter diſtantias umbilici a puncto contactus & a vertice principali figuræ.

Sit enim *A* P *Q* Parabola, S umbilicus ejus, *A* vertex principalis, P punctum contactus, P *O* ordinatim applicata ad diametrum principalem, *P M* tangens diametro principali occurrens in *M*, & *S N* linea perpendicularis ab umbilico in tangentem.



Jungatur *A N*, & ob æquales *M S* & *S P*, *M N* & *N P*, *M A* & *A O*, parallelæ erunt rectæ *A N* & *O P*, & inde triangulum *S A N* rectangulum erit ad *A* & ſimile triangulis æqualibus *S M N*, *S P N*, Ergo *P* S eſt ad *S N* ut *S N* ad S *A*. *Q. E. D.*

Corol. 1. *P* S *q*. eſt ad *S N q*. ut *P S* ad S *A*.

Corol. 2. Et ob datam S *A*, eſt S *N q*. ut P S.

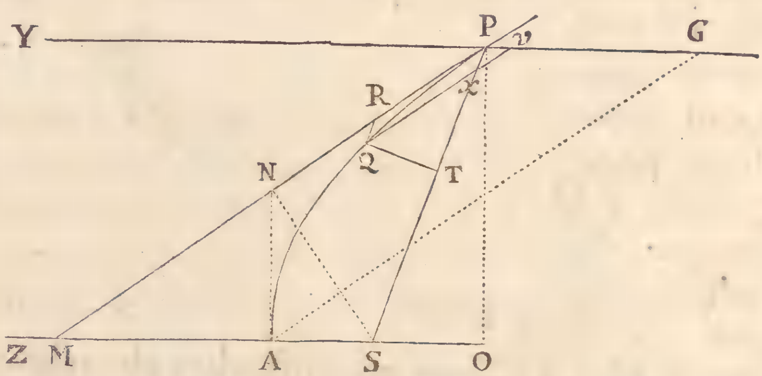
Corol. 3. Et concurſus tangentis cujuſvis P *M* cum recta S *N* quæ ab umbilico in ipſam perpendicularis eſt, incidit in rectam *A N*, quæ Parabolam tangit in vertice principali.

Prop.

Prop. XIII. Prob. VIII.

Moveatur corpus in perimetro Parabolæ: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Maneat conſtructio Lemmatis, ſitq; P corpus in perimetro Parabolæ, & a loco *Q* in quem corpus proxime movetur, age ipſi S P Parallelam *QR* & perpendicularem *QT*, necnon *Qv* tangenti parallelam & occurentem tum diametro *YPG* in *v*, tum diſtantiæ SP in *x*. Jam ob ſimilia triangula P*xv*, *M*SP & æqualia unius latera *SM*, SP, æqualia ſunt alterius latera P*x* ſeu *QR* & P*v*. Sed, ex Conicis, quadratum ordinatæ *Qv* æquale eſt rectangulo ſub latere recto & ſegmento diametri P*v*, id eſt (per Lem. XIII.) rectangulo 4 P*S* x P*v* ſeu 4 PS x *QR*; & punctis P & *Q* coeuntibus, ratio *Qv* ad *Qx* (per Lem. 8.) fit æqualitatis. Ergo *Qxq.* eo in caſu, æquale eſt rectangulo 4 PS x Q*R*. Eſt autem (ob æquales angulos *QxT*, *M*P*S*, P*MO*) *Qxq.* ad Q*Tq.*



ut P*S q.* ad *SNq.* hoc eſt (per Corol. I. Lem. X IV.) ut P*S* ad *AS*, id eſt ut 4 P*S* x *QR* ad 4 *AS* x *QR*, & inde (per Prop. 9. Lib. V Elem.) *QTq.* & 4 *AS* x Q*R* æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP\,q.}{QR}$, & fiet $\frac{SP\,q. \times QT\,q.}{QR}$ æquale SP*q.* x 4 *AS*: & propterea (per Corol. Theor. V.) vis centripeta eſt reciproce ut *S*P*q.* x 4 *A*S, id eſt, ob datam 4 *A*S, reciproce in duplicata ratione diſtantiæ SP. Q. *E. I.*

Corol.

Corol. I. Ex tribus noviſſimis Propoſitionibus conſequens eſt, quod ſi corpus quodvis P, ſecundum lineam quamvis rectam P *R*, quacunq; cum velocitate exeat de loco P, & vi centripeta quæ ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ a centro, ſimul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua ſectionum Conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra.

Corol. II. Et ſi velocitas, quacum corpus exit de loco ſuo P, ea ſit, qua lineola P *R* in minima aliqua temporis particula deſcribi poſſit, & vis centripeta potis ſit eodem tempore corpus idem movere per ſpatium *QR*: movebitur hoc corpus in Conica aliqua ſectione cujus latus rectum eſt quantitas illa $\frac{QTq.}{QR}$ quæ ultimo ſit ubi lineolæ P *R*, *QR* in infinitum diminuuntur. Circulum in his Corollariis refero ad Ellipſin, & caſum excipio ubi corpus recta deſcendit ad centrum.

Prop. XIV. Theor. VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta decreſcat in duplicata ratione diſtantiarum a centro; dico quod Orbium Latera recta ſunt in duplicata ratione arearum quas corpora, radiis ad centrum ductis, eodem tempore deſcribunt.

Nam per Corol. II. Prob. VIII. Latus rectum *L* æquale eſt quantitati $\frac{QTq.}{QR}$ quæ ultimo ſit ubi coeunt puncta P & *Q*. Sed linea minima *QR*, dato tempore, eſt ut vis centripeta generans, hoc eſt (per Hypotheſin) reciproce ut S*P q*. Ergo $\frac{QTq.}{QR}$ eſt ut *QTq*. x S*P q*. hoc eſt, latus rectum L in duplicata ratione areæ *QT* x S P. *Q. E. D.*

Corol. Hinc Ellipſeos area tota, eiq; proportionale rectangulum ſub axibus, eſt in ratione compoſita ex dimidiata ratione lateris recti & integra ratione temporis periodici.

Prop.

Prop. XV. Theor. VII.

Jisdem poſitis, dico quod tempora periodica in Ellipſibus ſunt in ratione ſeſquiplicata tranſverſorum axium.

Namq; axis minor eſt medius proportionalis inter axem majorem (quem tranſverſum appello) & latus rectum, atq; adeo rectangulum ſub axibus eſt in ratione compoſita ex dimidiata ratione lateris recti & ſeſquiplicata ratione axis tranſverſi. Sed hoc rectangulum, per Corollarium Theorematis Sexti, eſt in ratione compoſita ex dimidiata ratione lateris recti & integra ratione periodici temporis. Dematur utrobiq; dimidiata ratio lateris recti & manebit ſeſquiplicata ratio axis tranſverſi æqualis rationi periodici temporis. *Q. E. D.*

Corol. Sunt igitur tempora periodica in Ellipſibus eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus Ellipſeon.

Prop. XVI. Theor. VIII.

Jisdem poſitis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demiſſiſq; ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum ſunt in ratione compoſita ex ratione perpendiculorum inverſe & dimidiata ratione laterum rectorum directe. VideFig. Prop. X. &. XI.

Ab umbilico S ad tangentem *P* R demitte perpendiculum S*Y* & velocitas corporis *P* erit reciproce in dimidiata ratione quantitatis $\frac{SYq.}{L}$ Nam velocitas illa eſt ut arcus quam minimus *PQ* in data temporis particula deſcriptus, hoc eſt (per Lem. VII.) ut tangens *P*R, id eſt (ob proportionales *P R* ad *QT* & *S*P ad S*Y*) ut $\frac{SP \times QT}{SY}$, ſive ut S*Y* reciproce & *S*P x *QT* directe ; eſtq;

SPx

SP x *QT* ut area dato tempore deſcripta, id eſt, per Theor. VI. in dimidiata ratione lateris recti *Q. E. D.*

Corol. 1. Latera recta ſunt in ratione compoſita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum in maximis & minimis ab umbilico communi diſtantiis, ſunt in ratione compoſita ex ratione diſtantiarum inverſe & dimidiata ratione laterum rectorum directe. Nam perpendicula jam ſunt ipſæ diſtantiæ.

Corol. 3. Ideoq; velocitas in Conica ſectione, in minima ab umbilico diſtantia, eſt ad velocitatem in circulo in eadem a centro diſtantia, in dimidiata ratione lateris recti ad diſtantiam illam duplicatam.

Corol. 4. Corporum in Ellipſibus gyrantium velocitates in mediocribus diſtantiis ab umbilico communi ſunt eædem quæ corporum gyrantium in circulis ad eaſdem diſtantias, hoc eſt (per Corol. VI. Theor. IV.) reciproce in dimidiata ratione diſtantiarum. Nam perpendicula jam ſunt ſemi-axes minores, & hi ſunt ut mediæ proportionales inter diſtantias & latera recta. Componatur hæc ratio inverſe cum dimidiata ratione laterum rectorum directe, & fiet ratio dimidiata diſtantiarum inverſe.

Corol. 5. In eadem vel æqualibus figuris, vel etiam in figuris inæqualibus, quarum latera recta ſunt æqualia, velocitas corporis eſt reciproce ut perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. In Parabola, velocitas eſt reciproce in dimidiata ratione diſtantiæ corporis ab umbilico figuræ, in Ellipſi minor eſt, in Hyperbola major quam in hac ratione. Nam (per Corol. 2 Lem. XIV.) perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem Parabolæ eſt in dimidiata ratione diſtantiæ.

Corol. 7. In Parabola, velocitas ubiq; eſt ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem diſtantiam, in dimidiata ratione numeri binarii ad unitatem; in Ellipſi minor eſt, in Hyperbola ma-

jor quam in hac ratione. Nam per hujus Corollarium ſecundum, velocitas in vertice Parabolæ eſt in hac ratione, & per Corollaria ſexta hujus & Theorematis quarti, ſervatur eadem proportio in omnibus diſtantiis. Hinc etiam in Parabola velocitas ubiq; æqualis eſt velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam diſtantiam, in Ellipſi minor eſt, in Hyperbola major.

Corol. 8. Velocitas gyrantis in Sectione quavis Conica eſt ad velocitatem gyrantis in circulo in diſtantia dimidii lateris recti Sectionis, ut diſtantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem Sectionis demiſſum. Patet per Corollarium quintum.

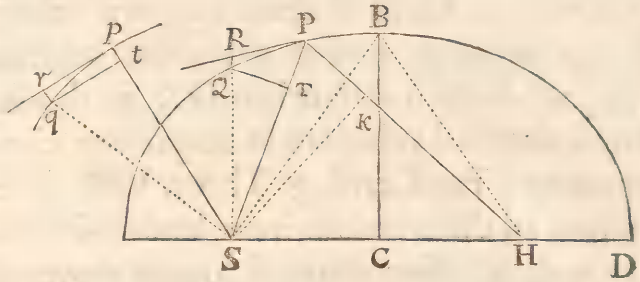
Corol. 9. Unde cum (per Corol. 6. Theor. IV.) velocitas gyrantis in hoc circulo ſit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio, reciproce in dimidiata ratione diſtantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in Conica ſectione ad velocitatem gyrantis in circulo in eadem diſtantia, ut media proportionalis inter diſtantiam illam communem & ſemiſſem lateris recti ſectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem ſectionis demiſſum.

Prop. XVII. Prob. IX.

Poſito quod vis centripeta ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ a centro, & quod vis illius quantitas abſoluta ſit cognita; requiritur linea quam corpus deſcribit, de loco dato cum data velocitate ſecundum datam rectam egrediens.

Vis centripeta tendens ad punctum S ea ſit quæ corpus *p* in orbita quavis data *p q* gyrare faciat, & cognoſcatur hujus velocitas in loco *p*. De loco P ſecundum lineam P *R* exeat corpus P cum data velocitate, & mox inde, cogente vi centripeta, deflectat illud in Coniſectionem *P Q*. Hanc igitur recta *P* R tanget in *P*. Tangat itidem recta aliqua *p r* orbitam *p q* in *p*, & ſi ab S ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per Corol. 1. Theor. VIII.) latus rectum Coniſectionis ad latus rectum-

um orbitæ datæ, in ratione compoſita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum, atq; adeo datur. Sit iſtud *L*. Datur præterea Coniſectionis umbilicus S. Anguli *R*PS complementum ad duos rectos fiat angulus *R*P*H*, & dabitur poſitione linea P*H*, in qua umbilicus alter H locatur.



Demiſſo ad P*H* perpendiculo *S* K, & erecto ſemiaxe conjugato *BC*, eſt $SPq. - 2KPH + PHq.$ (per Prop. 13. *Lib.* II. Elem.) $= SHq. = 4CHq. = 4BHq. - 4BCq. = \overline{SP+PH}\,quad. - L \times \overline{SP+PH} = SPq. + 2SPH + PHq. - L \times \overline{SP+PH}$. Addantur utrobiq; $2KPH + L \times \overline{SP+PH} - SPq. - PHq.$ & fiet $L \times \overline{SP+PH} = 2SPH + 2KPH$, ſeu $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L. Unde datur P*H* tam longitudine quam poſitione. Nimirum ſi ea ſit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam $2SP + 2KP$, jacebit P*H* ad eandem partem tangentis P*R* cum linea P*S*, adeoq; figura erit Ellipſis, & ex datis umbilicis S, *H*, & axe principali $SP + PH$, dabitur: Sin tanta ſit corporis velocitas ut latus rectum *L* æquale fuerit $2SP + 2KP$, longitudo P*H* infinita erit, & propterea figura erit Parabola axem habens *SH* parallelum lineæ P*K*, & inde dabitur. Quod ſi corpus majori adhuc cum velocitate de loco ſuo P exeat, capienda erit longitudo P*H* ad alteram partem tangentis, adeoq; tangente inter umbilicos pergente, figura erit Hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum S P & P*H*, & inde dabitur. *Q. E. I.*

Corol. 1 Hinc in omni Coniſectione ex dato vertice principali *D*, latere recto L, & umbilico S, datur umbilicus alter H capiendo *DH* ad *D*S ut eſt latus rectum ad differentiam inter latus

tus rectum & $4DS$. Nam proportio $SP+PH$ ad PH ut $2SP$ ad L, in caſu hujus Corollarii, ſit $DS+DH$ ad DH ut $4DS$ ad L, & diviſim DS ad DH ut $4DS-L$ ad L.

Corol. 2. Unde ſi datur corporis velocitas in vertice principali D, invenietur Orbita expedite, capiendo ſcilicet latus rectum ejus, ad duplam diſtantiam DS, in duplicata ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad diſtantiam DS gyrantis: (Per Corol. 3. Theor. VIII.) dein DH ad DS ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$.

Corol. 3. Hinc etiam ſi corpus moveatur in Sectione quacunq; Conica, & ex orbe ſuo impulſu quocunq; exturbetur; cognoſci poteſt orbis in quo poſtea curſum ſuum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo quem impulſus ſolus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulſus loco, ſecundum rectam poſitione datam, exibit.

Corol. 4. Et ſi corpus illud vi aliqua extrinſecus impreſſa continuo perturbetur, innoteſcet curſus quam proxime, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibuſdam inducit, & ex ſeriei analogia, mutationes continuas in locis intermediis æſtimando.

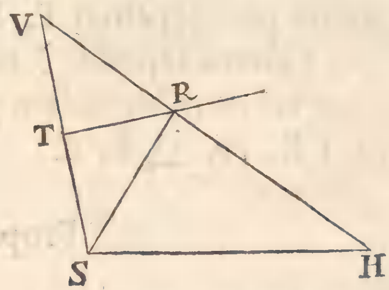
SECT.

SECT. IV.

De Inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex umbilico dato.

Lemma XV.

Si ab Ellipſeos vel Hyperbolæ cujuſvis umbilicis duobus S,H,*ad punctum quodvis tertium V inflectantur rectæ duæ* S*V*,H*V, quarum una* H*V æqualis ſit axi tranſverſo figuræ, altera* S*V a perpendiculo* T R *in ſe demiſſo biſecetur in* T; *perpendiculum illud* T R *ſectionem Conicam alicubi tangit: & contra, ſi tangit, erit V* H *æqualis axi figuræ.*



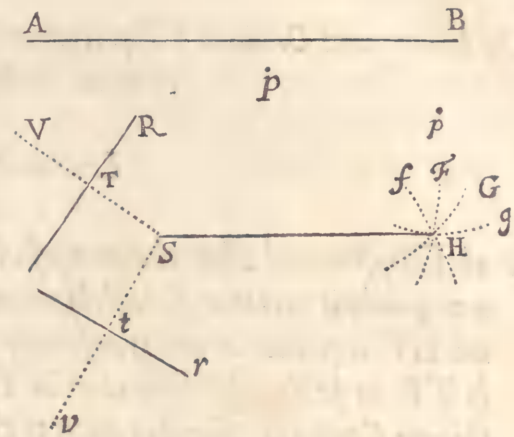
Secet enim *V*H ſectionem conicam in *R*, & jungatur S *R*. Ob æquales rectas *T*S, *TV*, æquales erunt anguli *TR*S, *TRV*. Biſecat ergo *RT* angulum *VR*S & propterea figuram tangit: & contra. *Q. E. D.*

Prop. XVIII. Prob. X.

Datis umbilico & axibus tranſverſis deſcribere Trajectorias Ellipticas & Hyperbolicas, *quæ tranſibunt per puncta data, & rectas poſitione datas contingent.*

Sit S communis umbilicus figuraram; *AC* longitudo axis tranſverſi Trajectoriæ cujuſvis; P punctum per quod Trajectoria debet tranſire; & *TR* recta quam debet tangere. Centro P intervallo *AB* − S P, ſi orbita ſit Ellipſis, vel *AB* + S P, ſi ea ſit Hyperbola, deſcribatur circulus H*G*. Ad tangentem *TR* demittatur perpen-

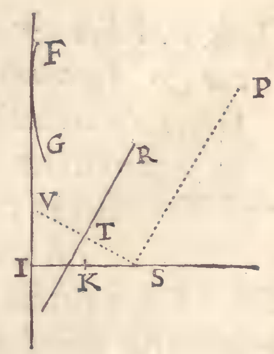
pendiculum ST, & producatur ea ad V, ut ſit TV æqualis ST; centroq; V & intervallo AC deſcribatur circulus FH. Hac methodo ſive dentur duo puncta P, p, ſive duæ tangentes TR, tr, ſive punctum P & tangens TR, deſcribendi ſunt circuli duo. Sit H eorum interſectio communis, & umbilicis S, H, axe illo dato deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Nam Trajectoria deſcripta (eo quod PH + SP in Ellipſi, & PH − SP in Hyperbola æquatur axi) tranſibit per punctum P, & (per Lemma ſuperius) tanget rectam TR. Et eodem argumento vel tranſibit eadem per puncta duo P, p, vel tanget rectas duas TR, tr. *Q. E. F.*



Prop. XIX. Prob. XI.

Circa datum umbilicum Trajectoriam Parabolicam deſcribere, quæ tranſibit per puncta data, & rectas poſitione datas continget.

Sit S umbilicus, P punctum & TR tangens trajectoriæ deſcribendæ. Centro P, intervallo PS deſcribe circulum FG. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem ST, & produc eam ad V, ut ſit TV æqualis ST. Eodem modo deſcribendus eſt alter circulus fg, ſi datur alterum punctum p; vel inveniendum alterum punctum v, ſi datur altera tangens tr; dein ducenda recta IF quæ tangat duos circulos FG, fg ſi dantur duo puncta P,



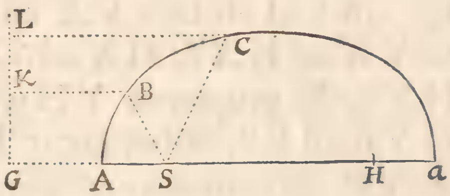
p, vel

p; vel tranſeat per duo puncta *V*,*v*, ſi dantur duæ tangentes *TR*, *tr*, vel tangat circulum *FG* & tranſeat per punctum *V*, ſi datur punctum P & tangens *TR*. Ad *FI* demitte perpendicularem *SI*, eamq; biſeca in *K*; & axe S*K*, vertice principali *K* deſcribatur Parabola. Dico factum. Nam Parabola ob æquales S*K* & *I* K, SP & *F*P tranſibit per punctum P; & (per Lemmatis XIV. Corol. 3.) ob æquales *ST* & *TV* & angulum rectum S*TR*, tanget rectam *TR*. *Q. E. F.*

Prop. XX. Prob. XII.

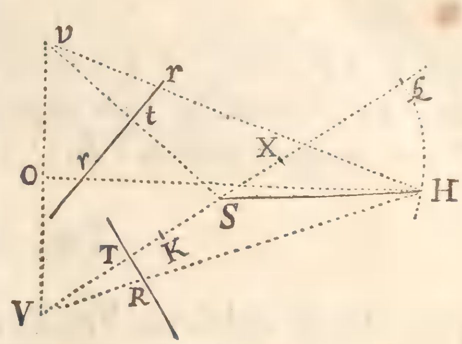
Circa datum umbilicum Trajectoriam quamvis ſpecie datam deſcribere, quæ per data puncta tranſibit & rectas tanget poſitione datas.

Cas. 1. Dato umbilico S, deſcribenda ſit Trajectoria *ABC* per puncta duo *B*, *C*. Quoniam Trajectoria datur ſpecie, dabitur ratio axis tranſverſi ad diſtantiam umbilicorum. In ea ratione cape *KB* ad *B*S, & *LC* ad *C S*. Centris *B*, *C*, intervallis *BK*, *CL*, deſcribe circulos duos, & ad rectam *K L*, quæ tangat eoſdem in *K* & *L*, demitte perpendiculum *S G*, idemq; ſeca in *A* & *a*, ita ut ſit *S A* ad *A G* & S*a* ad *a* G, ut eſt *S B* ad *B K*, & axe *A a*, verticibus *A*, *a*, deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Sit enim H umbilicus alter figuræ deſcriptæ, & cum ſit *S A* ad *A* G ut *S a* ad *a* G, erit diviſim *S a* − *S A* ſeu S H ad *a* G − *A G* ſeu *A a* in eadem ratione, adeoq; in ratione quam habet axis tranſverſus figuræ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus; & propterea figura deſcripta eſt ejuſdem ſpeciei cum deſcribenda. Cumq; ſint *K B* ad B S & *L C* ad *C* S in eadem ratione, tranſibit hæc Figura per puncta *B*, *C*, ut ex Conicis manifeſtum eſt.



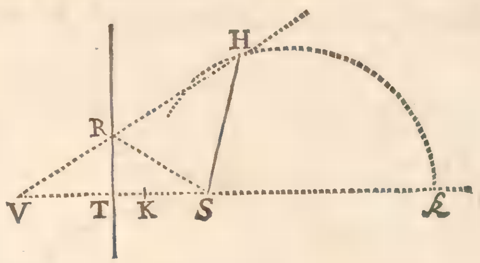
Cas.

Cas. 2. Dato umbilico *S*, deſcribenda ſit Trajectoria quæ rectas duas *TR*, *tr* alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula S*T*, S*t* & produc eadem ad *V*, *v*, ut ſint *TV*, *tv* æquales *T* S, *ts*. Biſeca *Vv* in *O*, & erige perpendiculum infinitum *O*H, rectamq; *V*S infinite productam ſeca in *K* & *k* ita, ut ſit *VK* ad *K*S & *Vk* ad *k*S ut eſt Trajectoriæ deſcribendæ axis tranſverſus ad umbilicorum diſtantiam. Super diametro *Kk* deſcribatur circulus ſecans rectam *O*H in H; & umbilicis S, H, axe tranſverſo ipſam VH æquante, deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Nam biſeca *Kk* in *X*, & junge H*X*, HS, HV, H*v*. Quoniam eſt V*K* ad *K*S ut V*k* ad *kS*; & compoſite ut V*K* + V*k* ad *K*S + *k*S; diviſimq; ut V*k* − V*K* ad *k*S − *K*S id eſt ut 2 V*X* ad 2 *KX* & 2 K*X* ad 2 S*X*, adeoq; ut V*X* ad H*X* & H*X* ad *SX*, ſimilia erunt triangula V*X*H, H*X*S, & propterea VH erit ad *S*H ut V*X* ad *X*H, adeoq; ut VK ad KS. Habet igitur Trajectoriæ deſcriptæ axis tranſverſus VH eam rationem ad ipſius umbilicorum diſtantiam SH, quam habet Trajectoriæ deſcribendæ axis tranſverſus ad ipſius umbilicorum diſtantiam, & propterea ejuſdem eſt ſpeciei. Inſuper cum VH, *v*H æquentur axi tranſverſo, & V*S*, *v*S a rectis *TR*, *tr* perpendiculariter biſecentur, liquet, ex Lemmate XV, rectas illas Trajectoriam deſcriptam tangere. *Q. E. F.*

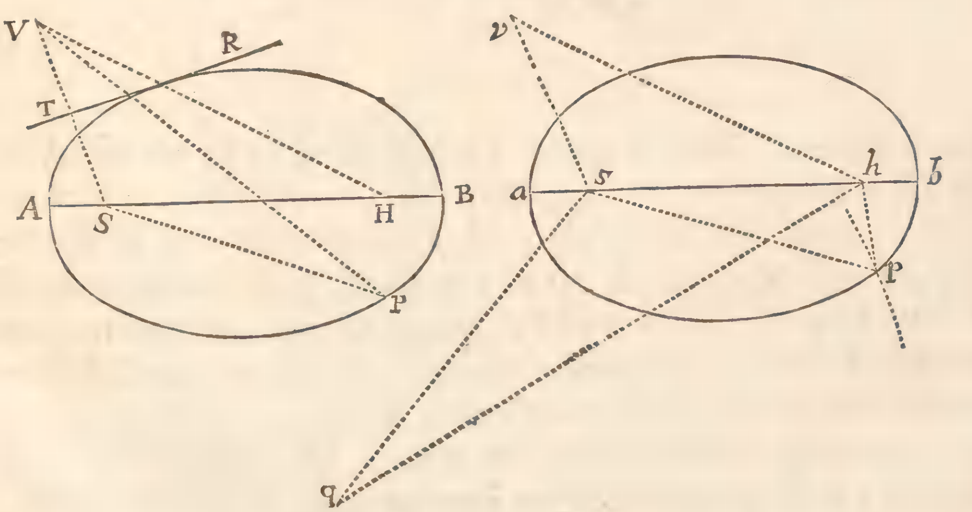


Cas. 3. Dato umbilico *S* deſcribenda ſit Trajectoria quæ rectam *TR* tanget in puncto dato *R*. In rectam *TR* demitte perpendicularem S*T*, & produc eandem ad V, ut ſit *T*V æqualis *ST*. Junge V*R*, & rectam VS infinite productam ſeca in K & *k*, ita ut ſit *V*K ad SK & *Vk* ad S*k* ut Ellipſeos deſcribendæ axis tranſverſus ad diſtantiam umbilicorum; circuloq; ſuper diametro K*k* de-

deſcripto, ſecetur producta recta *VR* in *H*, & umbilicis *S*, *H*, axe tranſverſo rectam *HV* æquante, deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Namq; *VH* eſſe ad *SH* ut *V*K ad SK, atq; adeo ut axis tranſverſus Trajectoriæ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus, patet ex demonſtratis in Caſu ſecundo, & propterea Trajectoriam deſcriptam ejuſdem eſſe ſpeciei cum deſcribenda: rectam vero *TR* qua angulus *VR*S biſecatur, tangere Trajectoriam in puncto *R*, patet ex Conicis *Q. E. F.*

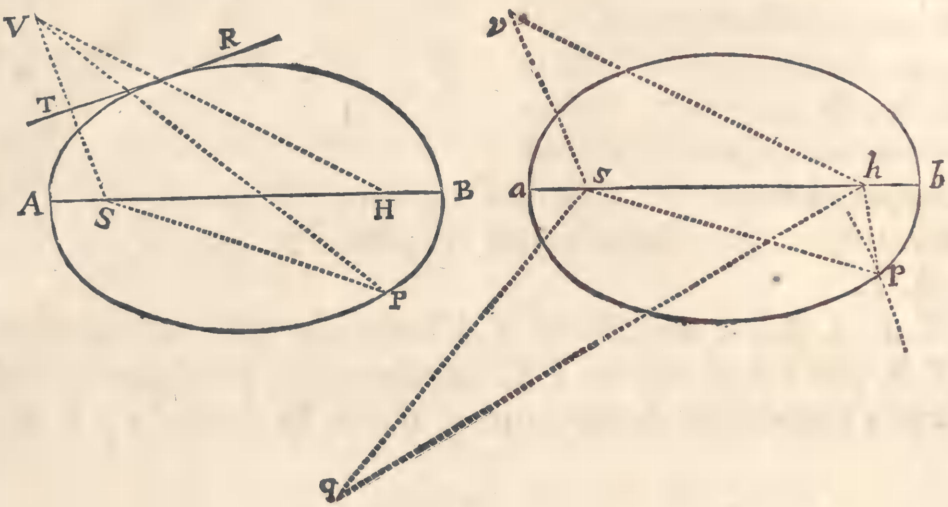


Cas. 4. Circa umbilicum S deſcribenda jam ſit Trajectoria *APB*, quæ tangat rectam *TR*, tranſeatq; per punctum quodvis *P* extra tangentem datum, quæq; ſimilis ſit figuræ *a p b*, axe



tranſverſo *ab* & umbilicis *s*, *h* deſcriptæ. In tangentem *TR* demitte perpendiculum *ST*, & produc idem ad *V*, ut ſit *TV* æqualis *ST*. Angulis autem *VSP*, *SVP* fac angulos *hsq*, *shq* æquales; centroq; *q* & intervallo quod ſit ad *ab* ut *SP* ad V *S* deſcribe

circulum ſecantem figuram *apb* in *p*. Junge *sp* & age *SH* quæ ſit ad *sh* ut eſt *SP* ad *sp*, quæq; angulum *PSH* angulo *psh* & angulum V*SH* angulo *psq* æquales conſtituat. Deniq; umbilicis S, *H*, axe diſtantiam V*H* æquante, deſcribatur ſectio conica.



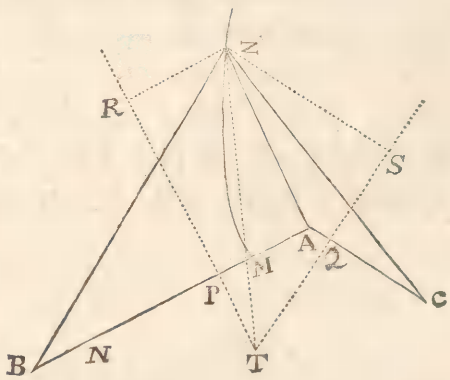
Dico factum. Nam ſi agatur *sv* quæ ſit ad *sp* ut eſt *sh* ad *sq*, quæq; conſtituat angulum *vsp* angulo *hsq* & angulum *vsh* angulo *psq* æquales, triangula *svh*, *spq* erunt ſimilia, & propterea *vh* erit ad *pq* ut eſt *sh* ad *sq*, id eſt (ob ſimilia triangula VS*P*, *hsq*) ut eſt *V*S ad S*P* ſeu *ab* ad *pq*. Æquantur ergo *vh* & *ab*. Porro ob ſimilia triangula *V*S*H*, *vsh*, eſt *VH* ad S*H* ut *vh* ad *sh*, id eſt, axis Conicæ ſectionis jam deſcriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis *ab* ad umbilicorum intervallum *sh*; & propterea figura jam deſcripta ſimilis eſt figuræ *apb*. Tranſit autem hæc figura per punctum *P*, eo quod triangulum *P*S*H* ſimile ſit triangulo *psh*; & quia *V H* æquatur ipſius axi & *V*S biſecatur perpendiculariter a recta *TR*, tangit eadem rectam *TR*. *Q. E. F.*

Lem.

Lemma XVI.

A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ ſunt.

Cas. 1. Sunto puncta illa data *A*, *B*, *C* & punctum quartum *Z*, quod invenire oportet: Ob datam differentiam linearum *AZ*, *BZ*, locabitur punctum *Z* in Hyperbola cujus umbilici ſunt *A* & *B*, & axis tranſverſus differentia illa data. Sit axis ille *MN*. Cape *PM* ad *MA* ut eſt *MN* ad *AB*, & erecto *PR* perpendicular ad *AB*, demiſſoq; *ZR* perpendiculari ad *PR*, erit ex natura hujus Hyperbolæ *ZR* ad *AZ* ut eſt *MN* ad *AB*. Simili diſcurſu punctum *Z* locabitur in alia Hyperbola, cujus umbilici ſunt *A*, *C* & axis tranſverſus differentia inter *AZ* & *CZ*, duciq; poteſt *QS* ipſi *AC* perpendicularis, ad quam ſi ab Hyperbolæ hujus puncto quovis *Z* demittatur normalis *ZS*, hæc fuerit ad *AZ* ut eſt differentia inter *AZ* & *CZ* ad *AC*. Dantur ergo rationes ipſarum *ZR* & *ZS* ad *AZ*, & idcirco datur earundem *ZR* & *ZS* ratio ad invicem; adeoq; rectis *RP*, *SQ* concurrentibus in *T*, locabitur punctum *Z* in recta *TZ* poſitione data. Eadem Methodo per Hyperbolam tertiam, cujus umbilici ſunt *B* & *C* & axis tranſverſus differentia rectarum *BZ*, *CZ*, inveniri poteſt alia recta in qua punctum *Z* locatur. Habitis autem duobus locis rectilineis, habetur punctum quæſitum *Z* in earum interſectione. *Q. E. I.*



Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta *AZ* & *BZ* æquantur, punctum *Z* locabitur in perpendiculo biſecante diſtantiam *AB*, & locus alius rectilineus invenietur ut ſupra. *Q. E. I.*

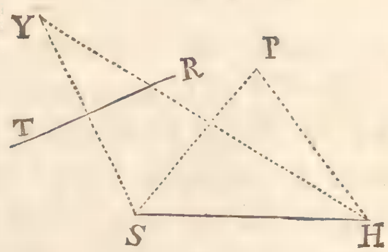
Cas. 3. *Si* omnes tres æquantur, locabitur punctum Z in centro circuli per puncta *A*, *B*, *C* tranſeuntis. *Q. E. I.*

Solvitur etiam hoc Lemma problematicum per Librum Tactionum *Apollonii* a *Vieta* reſtitutum.

Prop. XXI. Prob. XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum deſcribere, quæ tranſibit per puncta data & rectas poſitione datas continget.

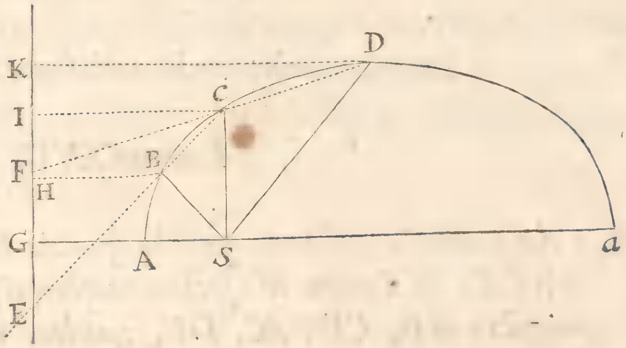
Detur umbilicus S, punctum *P*, & tangens *TR*, & inveniendus ſit umbilicus alter *H*. Ad tangentem demitte perpendiculum S*T*, & produc idem ad *Y*, ut ſit *TY* æqualis S*T*, & erit *YH* æqualis axi tranſverſo. Junge *SP*, *H*P, & erit SP differentia inter *H*P & axem tranſverſum. Hoc modo ſi dentur plures tangentes *T*R, vel plura puncta P, devenietur ſemper ad lineas totidem *YH*, vel P*H*, a dictis punctis *Y* vel P ad umbilicum *H* ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus *S*P differunt ab iiſdem, atq; adeo quæ vel æquantur ſibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per Lemma ſuperius, datur umbilicus ille alter *H*. Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel eſt *YH*, vel ſi Trajectoria Ellipſis eſt, P*H*+SP; ſin Hyperbola, P*H*−SP) habetur Trajectoria. *Q. E. I.*



Scholium.

Caſus ubi dantur tria puncta ſic ſolvitur expeditius. Dentur puncta *B*, *C*, *D*. Junctas *BC*, *CD* produc ad *E*,*F*, ut ſit *EB* ad *EC* ut *SB* ad S*C*, & *FC* ad *FD* ut *SC* ad S*D*. Ad *EF* ductam & productam demitte normales S*G*, B*H*, inq; *G* S infinite producta cape *GA* ad *A*S & *Ga* ad *a*S ut eſt *HB* ad *BS*; & erit *A* ver-

vertex, & *A a* axis tranſverſus Trajectoriæ: quæ, perinde ut *G A* minor, æqualis vel major fuerit quam *A* S, erit Ellipſis, Parabola vel Hyperbola; puncto *a* in primo caſu cadente ad eandem partem lineæ *G K* cum puncto *A*; in ſecundo caſu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ *GK*. Nam ſi demittantur



ad *G F* perpendicula *C I*, *D K*, erit *I C* ad H*B* ut *E C* ad *E B*, hoc eſt ut S*C* ad S*B*; & viciſſim *IC* ad S*C* ut *H B* ad S*B*, ſeu *G A* ad S*A*. Et ſimili argumento probabitur eſſe *K D* ad S*D* in eadem ratione. Jacent ergo puncta *B*, *C*, *D* in Coniſectione circa umbilicum S ita deſcripta, ut rectæ omnes ab umbilico S ad ſingula Sectionis puncta ductæ, ſint ad perpendicula a punctis iiſdem ad rectam *G K* demiſſa in data illa ratione.

Methodo haud multum diſſimili hujus problematis ſolutionem tradit Clariſſimus Geometra *De la Hire*, Conicorum ſuorum Lib. VIII. Prop XXV.

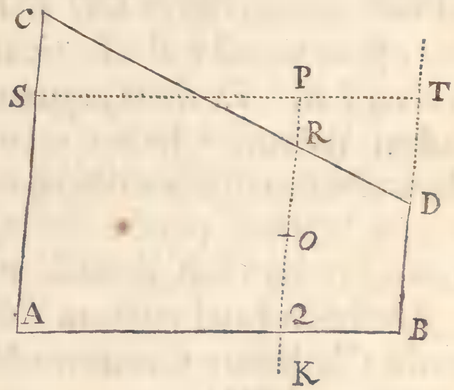
SECT

SECT. V.

Inventio Orbium ubi umbilicus neuter datur.

Lemma XVII.

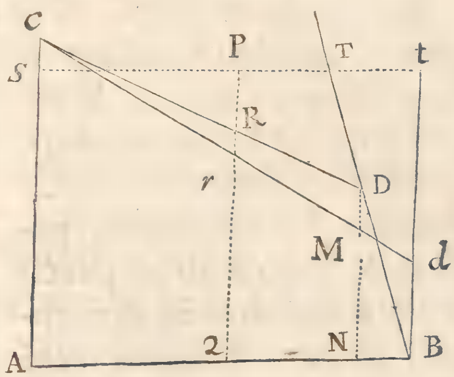
Si a datæ conicæ ſectionis puncto quovis P, ad Trapezii alicujus ABCD, in Conica illa ſectione inſcripti, latera quatuor infinite producta AB, CD, AC, DB, totidem rectæ PQ, PR, PS, PT in datis angulis ducantur, ſingulæ ad ſingula: rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera PQ x PR, erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera oppoſita PS x PT in data ratione.



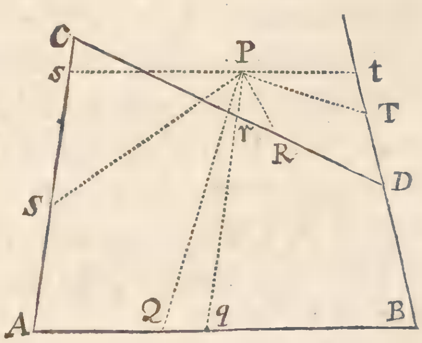
Cas. 1. Ponamus imprimis lineas ad oppoſita latera ductas parallelas eſſe alterutri reliquorum laterum, puta PQ & PR lateri *AC*, & PS ac PT lateri *AB*. Sintq; inſuper latera duo ex oppoſitis, puta *AC* & *BD*, parallela. Et recta quæ biſecat parallela illa latera erit una ex diametris Conicæ ſectionis, & biſecabit etiam *RQ*. Sit *O* punctum in quo *RQ* biſecatur, & erit P*O* ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc P*O* ad *K* ut ſit *OK* æqualis P*O*, & erit *OK* ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta *A*, B, P & K ſint ad Conicam ſectionem, & P*R* ſecet *AB* in dato angulo, erit (per Prop. 17 & 18 Lib. III *Apollonii*) rectangulum P*Q*K ad rectangulum *AQB* in data ratione. Sed *Q*K & P*R* æquales ſunt, utpote æqualium *O*K, *O*P, & *OQ*, *OR* differentiæ, & inde etiam rect-

rectangula P*Q*K & P*Q* x P*R* æqualia ſunt; atq; adeo rectangulum P*Q* x P*R* eſt ad rectangulum *AQ*B, hoc eſt ad rectangulum P*S* x P*T* in data ratione. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponamus jam Trapezii latera oppoſita *AC* & B*D* non eſſe parallela. Age B*d* parallelam *AC* & occurrentem tum rectæ S*T* in *t*, tum Conicæ ſectioni in *d*. Junge *Cd* ſecantem P*Q* in *r*, & ipſi P*Q* parallelam age *DM* ſecantem *Cd* in *M* & *A*B in *N*. Jam ob ſimilia triangula B*Tt*, *D*B*N*, eſt B*t* ſeu P*Q* ad T*t* ut *DN* ad *N*B. Sic & *Rr* eſt ad *AQ* ſeu PS ut *DM* ad *AN*. Ergo ducendo antecedentes in antecedentes & conſequentes in conſequentes, ut rectangulum P*Q* in *Rr* eſt ad rectangulum *Tt* in PS, ita rectangulum *N*-*DM* eſt ad rectangulum *AN*B, & (per Cas. 1) ita rectangulum *Q*P*r* eſt ad rectangulum SP*t*, ac diviſim ita rectangulum *Q*P*R* eſt ad rectangulum PS x P*T*. *Q. E. D.*



Cas. 3. Ponamus deniq; lineas quatuor P*Q*, P*R*, PS, P*T* non eſſe parallelas lateribus *AC*, *A*B, ſed ad ea utcunq; inclinatas. Earum vice age P*q*, P*r* parallelas ipſi *AC*; & P*s*, P*t* parallelas ipſi *A*B; & propter datos angulos triangulorum P*Qq*, P*Rr*, PS*s*, P*Tt*, dabuntur rationes P*Q* ad P*q*, PR ad P*r*, PS ad P*s* & P*T* ad P*t*, atq; adeo rationes compoſitæ P*Q* in PR ad P*q* in P*r*, & PS in P*T* ad P*s* in P*t*. Sed, per ſuperius demonſtrata, ratio P*q* in P*r* ad P*s* in P*t* data eſt: Ergo & ratio P*Q* in PR ad PS in P*T*. *Q. E. D.*

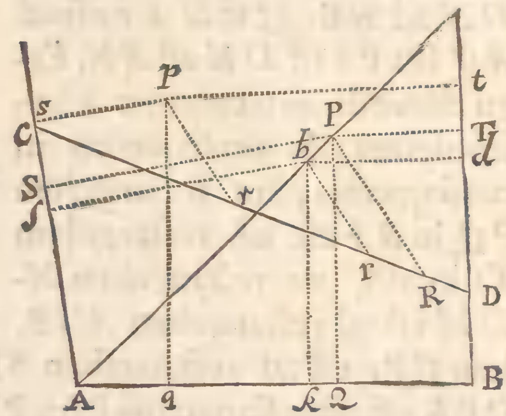


Lem-

Lemma XVIII.

Iiſdem poſitis, ſi rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera Trapezii P Q x P R *ſit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* P S x P T *in data ratione; punctum* P, *a quo lineæ ducuntur, tanget Conicam ſectionem circa Trapezium deſcriptam.*

Per puncta *A*, B, *C*, *D* & aliquod infinitorum punctorum P, puta *p*, concipe Conicam ſectionem deſcribi: dico punctum P hanc ſemper tangere. Si negas, junge *A* P ſecantem hanc Conicam ſectionem alibi quam in P ſi fieri poteſt, puta in *b*. Ergo ſi ab his punctis *p* & *b* ducantur in datis angulis ad latera Trapezii rectæ *pq*, *pr*, *ps*, *pt* & *bk*, *b*r, *bſ*, *bd*; erit ut *bk* x *b*r ad *bd* x *bſ* ita (per Lemma XVII) *pq* x *pr* ad *ps* x *pt* & ita (per hypoth.) P Q x P R ad P S x P T. Eſt & propter ſimilitudinem Trapeziorum *bkAſ*, P Q *A* S, ut *bk* ad *bſ* ita P Q ad P S. Quare applicando terminos prioris propoſitionis ad terminos correſpondentes hujus, erit *b*r ad *bd* ut P *R* ad P *T*. Ergo Trapezia æquiangula *D*r*bd*, *D R* P *T* ſimilia ſunt, & eorum diagonales *Db*, *DP* propterea coincidunt. Incidit itaq; *b* in interſectionem rectarum A P, *D* P adeoq; coincidit cum puncto P. Quare punctum P, ubicunq; ſumatur, incidit in aſſignatam Conicam ſectionem. *Q. E. D.*



Corol. Hinc ſi rectæ tres P Q, P R, P S a puncto communi P ad alias totidem poſitione datas rectas A B, *C D*, A *C*, ſingulæ ad ſingulas, in datis angulis ducantur, ſitq; rectangulum ſub duabus ductis P Q x P *R* ad quadratum tertii, P S *quad.* in data ratione: punctum

Scho-

P, a quibus rectæ ducuntur, locabitur in ſectione Conica quæ tangit lineas *A B*, *C D* in *A* & *C* & contra. Nam coeat linea *B D* cum linea *A C* manente poſitione trium *A* B, *C D*, *A C*; dein coeat etiam linea P *T* cum linea P S: & rectangulum *P* S x P *T* evadet P S *quad.* rectæq; *A B*, *C D* quæ curvam in punctis *A* & *B*, *C* & *D* ſecabant, jam Curvam in punctis illis coeuntibus non amplius ſecare poſſunt ſed tantum tangent.

Scholium.

Nomen Conicæ ſectionis in hoc Lemmate late ſumitur, ita ut ſectio tam rectilinea per verticem Coni tranſiens, quam circularis baſi parallela includatur. Nam ſi punctum *p* incidit in rectam, qua quævis ex punctis quatuor *A*, *B*, *C*, *D* junguntur, Conica ſectio vertetur in geminas rectas, quarum una eſt recta illa in quam punctum *p* incidit, & altera recta qua alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppoſiti ſimul ſumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor P *Q*, P *R*, P S, P *T* ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibuſvis æqualibus, ſitq; rectangulum ſub duabus ductis P S x P R æquale rectangulo ſub duabus aliis P S x P *T*, Sectio conica evadet Circulus. Idem fiet ſi lineæ quatuor ducantur in angulis quibuſvis & rectangulum ſub duabus ductis P *Q* x P *R* ſit ad rectangulum ſub aliis duabus P S x P *T* ut rectangulum ſub ſinubus angulorum S, *T*, in quibus duæ ultimæ P S, P *T* ducuntur, ad rectangulum ſub ſinubus angulorum *Q*, *R*, in quibus duæ primæ P *Q*, P *R* ducuntur. Cæteris in caſibus Locus puncti P erit aliqua trium figurarum quæ vulgo nominantur Sectiones Conicæ. Vice autem Trapezii *A* B *C D* ſubſtitui poteſt quadrilaterum cujus latera duo oppoſita ſe mutuo inſtar diagonalium decuſſant. Sed & e punctis quatuor *A*, *B*, *C*, *D* poſſunt unum vel duo abire in infinitum, eoq; pacto latera figuræ quæ ad puncta illa convergunt,

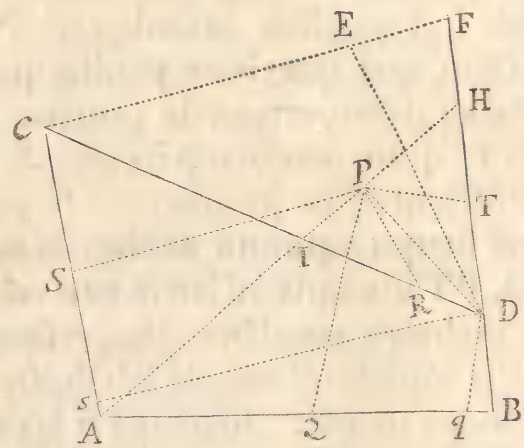
L eva-

evadere parallela: quo in caſu ſectio conica tranſibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

Lemma XIX.

Invenire punctum P, a quo ſi rectæ quatuor P Q, P R, P S, P T ad alias totidem poſitione datas rectas A B, C D, A C, B D ſingulæ ad ſingulas in datis angulis ducantur, rectangulum ſub duabus ductis, P Q x *P R, ſit ad rectangulum ſub aliis duabus,* P *S* x *P T, in data ratione.*

Lineæ *A* B, *C D*, ad quas rectæ duæ *P Q*, *P R*, unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus poſitione datis lineis in punctis *A*, B, *C*, *D*. Ab eorum aliquo *A* age rectam quamlibet *A H*, in qua velis punctum *P* reperiri. Secet ea lineas oppoſitas *B D*, *C D*, nimirum *B D* in *H* & *C D* in *I*, & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes *P Q* ad *P A* & *P A* ad *P S*, adeoq; ratio *P Q* ad *P S*. Auferendo hanc a data ratione *P Q* x *P R* ad *P S* x *P T*, dabitur ratio *P R* ad *P T*, & addendo datas rationes *P I* ad P *R*, & *P T* ad *P H* dabitur ratio *P I* ad *P H* atq; adeo punctum P. *Q. E. I.*

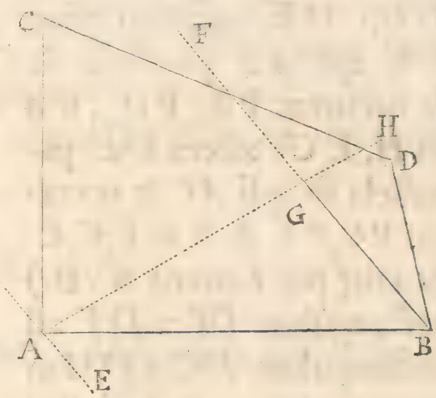


Corol. 1. Hinc etiam ad Loci punctorum infinitorum P punctum quodvis *D* tangens duci poteſt. Nam chorda P *D* ubi puncta P ac *D* conveniunt, hoc eſt, ubi *A H* ducitur per punctum *D*, tangens evadit. Quo in caſu, ultima ratio evaneſcentium *I* P & P *H* invenietur ut ſupra. Ipſi igitur *A* D duc parallelam *C F*, occurrentem B D in *F*, & in ea ultima ratione ſectam in *E*,

&

& *DE* tangens erit, propterea quod *C* F & evaneſcens *IH* parallelæ ſunt, & in *E* & P ſimiliter ſectæ.

Corol. 2. Hinc etiam Locus punctorum omnium P definiri poteſt. Per quodvis punctorum *A*, *B*, *C*, *D*, puta *A*, duc Loci tangentem *AE*, & per aliud quodvis punctum *B* duc tangenti parallelam *BF* occurrentem Loco in *F*. Invenietur autem punctum F per Lemma ſuperius. Biſeca *B*F in *G*, & acta *AG* diameter erit ad quam *BG* & F G ordinatim applicantur. Hæc *AG* occurrat Loco in *H*, & erit *AH* latus tranſverſum, ad quod latus rectum eſt ut *B G q*. ad *AG*-*H*. Si *AG* nullibi occurrit Loco, linea *AH* exiſtente infinita, Locus erit Parabola & latus rectum ejus $\frac{BGq.}{AG}$ Sin ea alicubi occurrit,



Locus Hyperbola erit ubi puncta *A* & *H* ſita ſunt ad eaſdem partes ipſius *G*: & Ellipſis, ubi G intermedium eſt, niſi forte angulus *A*G B rectus ſit & inſuper B G *quad.* æquale rectangulo A G H, quo in caſu circulus habebitur.

Atq; ita Problematis veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incæpti & ab *Apollonio* continuati non calculus, ſed compoſitio Geometrica, qualem Veteres quærebant, in hoc Corollario exhibetur.

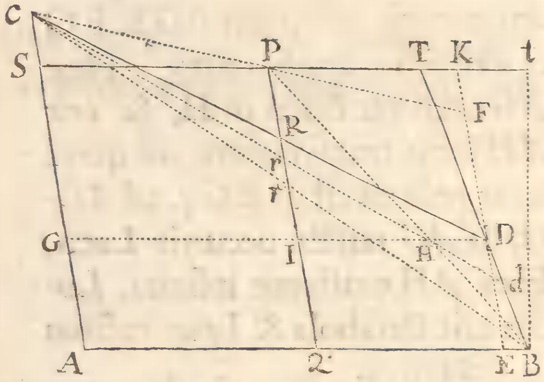
Lemma XX.

Si parallelogrammum quodvis A S P *Q angulis duobus oppoſitis A & P tangit ſectionem quamvis Conicam in punctis A &* P, *& lateribus unius angulorum illorum infinite productis A Q , A S occurrit eidem ſectioni Conicæ in B & C; a punctis autem occur-*

 ſuum

ſuum B *&* C *ad quintum quodvis ſectionis Conicæ punctum D agantur rectæ duæ* B D, C D *occurrentes alteris duobus infinite productis parallelogrammi lateribus* P S, P Q *in T &* R: *erunt ſemper abſciſſæ laterum partes* P R *&* P T *ad invicem in data ratione. Et contra, ſi partes illæ abſciſſæ ſunt ad invicem in data ratione, punctum D tanget Sectionem Conicam per puncta quatuor A, B,* P, *C tranſeuntem.*

Cas. 1. Jungantur B P, *C* P & a puncto *D* agantur rectæ duæ *D G*, *D E*, quarum prior *D G* ipſi *A B* parallela ſit & occurrat P B, P *Q*, *C A* in *H*, *I*, *G*; altera *D E* parallela ſit ipſi *A C* & occurrat P *C*, P *S*, A *B* in *F*, *K*, *E*: & erit (per Lemma XVII.) rectangulum *D*E x *D F* ad rectangulum *D G* x *D H* in ratione data. Sed eſt P *Q* ad *D E* ſeu I *Q*, ut P *B* ad *H B*, adeoq; ut P *T* ad *D H*; & viciſſim P *Q* ad P *T* ut *D E* ad *D H*. Eſt & P *R* ad *D F* ut *R C* ad *D C*, adeoq; ut *I G* vel P *S* ad *D G*, & viciſſim P *R* ad P *S* ut *D* F ad *D G*; & conjunctis rationibus fit rectangulum P *Q* x P *R* ad rectangulum P *S* x P *T* ut rectangulum *D E* x *D* F ad rectangulum *D G* x *D H*, atq; adeo in data ratione. Sed dantur P *Q* & P S & propterea ratio P *R* ad P *T* datur. *Q. E. D.*



Cas. 2. Quod ſi P R & P *T* ponantur in data ratione ad invicem, tunc ſimili ratiocinio regrediendo, ſequetur eſſe rectangulum *D E* x *D* F ad rectangulum *D G* x *D H* in ratione data, adeoq; punctum *D* (per Lemma XVIII.) contingere Conicam ſectionem tranſeuntem per puncta *A*, *B*, P, *C*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi agatur B *C* ſecans P *Q* in *r*, & in P *T* capiatur P *t* in ratione ad P *r* quam habet P *T* ad P *R*, erit *B t* Tangens

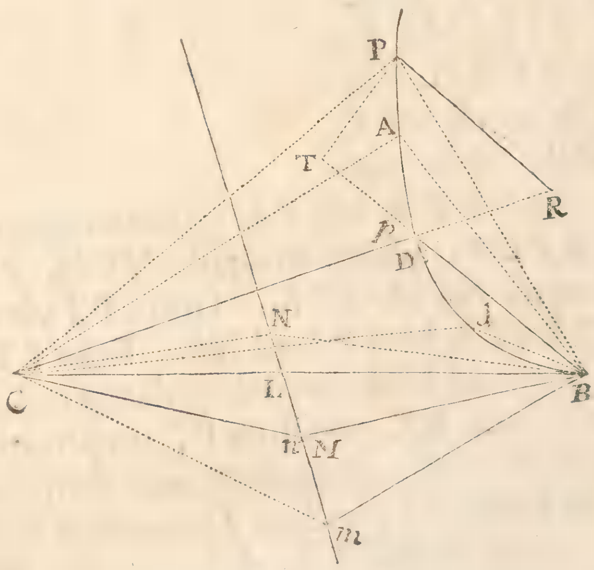
Conicæ ſectionis ad punctum *B*. Nam concipe punctum *D* coire cum puncto *B* ita ut, chorda *BD* evaneſcente, *BT* Tangens evadet; & *CD* ac *BT* coincident cum *C*B & *Bt*

Corol. 2. Et vice verſa ſi B*t* ſit Tangens, & ad quodvis Conicæ ſectionis punctum *D* conveniant B*D*, *CD*; erit P*R* ad P*T* ut P*r* ad P*t*. Et contra, ſi ſit P*R* ad P*T* ut P*r* ad P*t*, convenient B*D*, *CD* ad Conicæ ſectionis punctum aliquod *D*.

Corol. 3. Conica ſectio non ſecat Conicam ſectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, ſi fieri poteſt, tranſeant duæ Conicæ ſectiones per quinq; puncta *A*, B, *C*, *D*, P, eaſq; ſecet recta B*D* in punctis *D*, *d*, & ipſam P*Q* ſecet recta *Cd* in r. Ergo P*R* eſt ad P*T* ut P r ad P*T*, hoc eſt, P*R* & P r ſibi invicem æquantur, contra Hypotheſin.

Lemma XXI.

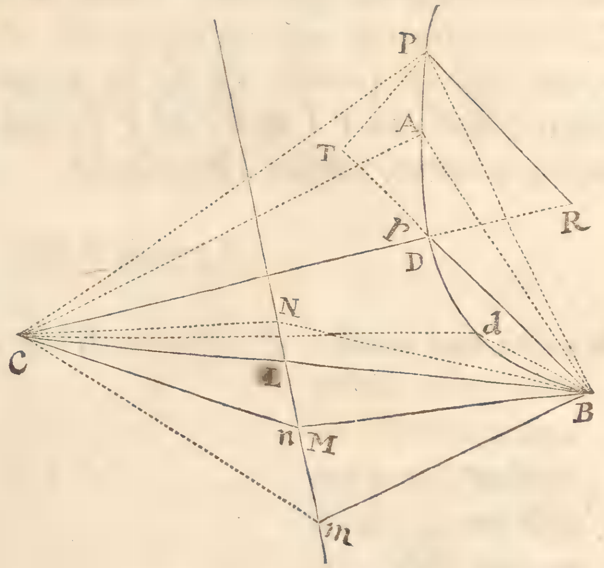
Si rectæ duæ mobiles & infinitæ BM, CM per data puncta B, *C*, *ceu polos ductæ, concurſu ſuo M deſcribant tertiam poſitione datam rectam MN; & aliæ duæ infinitæ rectæ BD, CD cum prioribus duabus ad puncta illa data* B, *C datos angulos M*B*D*, *MCD efficientes ducantur; dico quod hæ duæ* B *D*, *CD concurſu ſuo D deſcribent ſec-*



tionem

ionem Conicam. Et vice verſa, ſi rectæ B *D*, *C D concurſu ſuo D deſcribant Sectionem Conicam per puncta* B, *C*, *A tranſeuntem, & harum concurſus tunc incidit in ejus punctum aliquod A, cum alteræ duæ* B *M*, *C M coincidunt cum linea* B *C*, *punctum* M *continget rectam poſitione datam.*

Nam in recta *MN* detur punctum *N*, & ubi punctum mobile *M* incidit in immotum *N*, incidat punctum mobile *D* in immotum P. Junge *C N*, B *N*, *C* P, B P, & a puncto P age rectas P *T*, P *R* occurrentes ipſis B D, *C* D in *T* & *R*, & facientes angulum B P *T* æqualem angulo B-*N M* & angulum *C* P *R* æqualem angulo *C N M*. Cum ergo (ex Hypotheſi) æquales ſint anguli *M* B D, *N*BP, ut & anguli *M C* D, *N C* P: aufer communes *N B D* & *M C* P,& reſtabunt æquales *N B M* & P B *T*, *NC-M* & P *C R*: adeoq; triangula *N B M*, P *B T* ſimilia ſunt, ut & triangula *N C M*, P *C R*. Quare P *T* eſt ad *N M* ut P B ad *N B*, & P *R* ad *N M* ut P *C* ad *N C*. Ergo P *T* & P *R* datam habent rationem ad *N M*, proindeq; datam rationem inter ſe, atq; adeo, per Lemma XX, punctum P (perpetuus rectarum mobilum B *T* & *C R* concurſus) contingit ſectionem Conicam. *Q. E. D.*



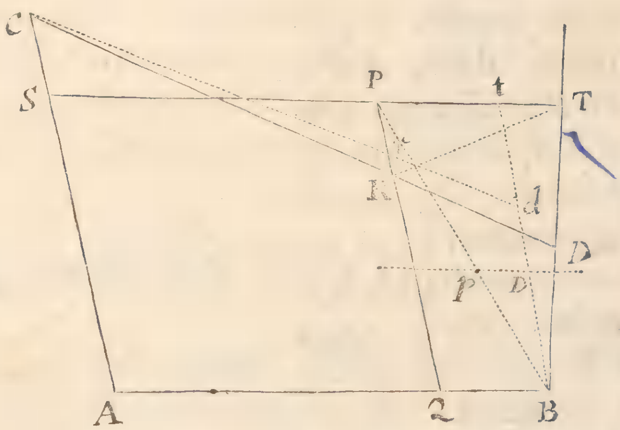
Et contra, ſi punctum *D* contingit ſectionem Conicam tranſeuntem per puncta B, *C*, *A*, & ubi rectæ B *M*, *C M* coincidunt cum recta *B C*, punctum illud *D* incidit in aliquod ſectionis punctum *A*;

A; ubi vero punctum *D* incidit ſucceſſive in alia duo quævis ſectionis puncta *p*, P, punctum mobile *M* incidit ſucceſſive in puncta immobilia *n*, *N*: per eadem *n*, *N* agatur recta *n N*, & hæc erit Locus perpetuus puncti illius mobilis *M*. Nam, ſi fieri poteſt, verſetur punctum *M* in linea aliqua curva. Tanget ergo punctum *D* ſectionem Conicam per puncta quinq; *C*, *p*, P, *B*, *A* tranſeuntem, ubi punctum *M* perpetuo tangit lineam curvam. Sed & ex jam demonſtratis tanget etiam punctum *D* ſectionem Conicam per eadem quinq; puncta *C*, *p*, P, B, *A* tranſeuntem, ubi punctum *M* perpetuo tangit lineam rectam. Ergo duæ ſectiones Conicæ tranſibunt per eadem quinq; puncta, contra Corol. 3. Lem. XX. Igitur punctum *M* verſari in linea curva abſurdum eſt. *Q. E.* D.

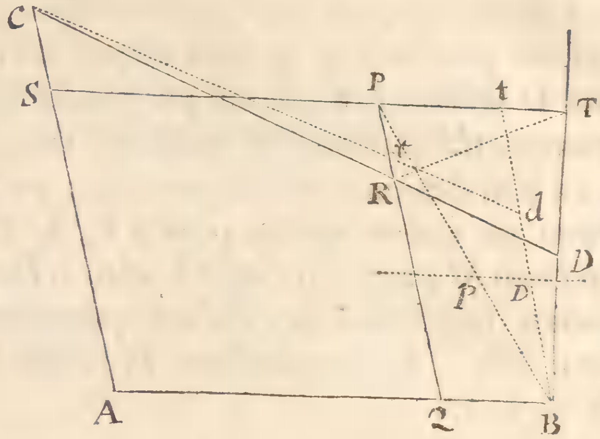
Prop. XXII. Prob. XIV.

Trajectoriam per data quinq; puncta deſcribere.

Dentur puncta quinq; *A*, *B*, *C*, D, P. Ab eorum aliquo *A* ad alia duo quævis *B*, C, quæ poli nominentur, age rectas *A B*, *A C* hiſq; parallelas TPS, P *R Q* per punctum quartum P. Deinde a polis duobus *B*, *C* age per punctum quintum D infinitas duas *B* D *T*, *C R* D, noviſſime ductis TPS, P *R Q* (priorem priori & poſteriorem poſteriori) occurentes in T & R. Deniq; de rectis P T, P *R*, acta recta *t r* ipſi T *R* parallela, abſcinde quas-

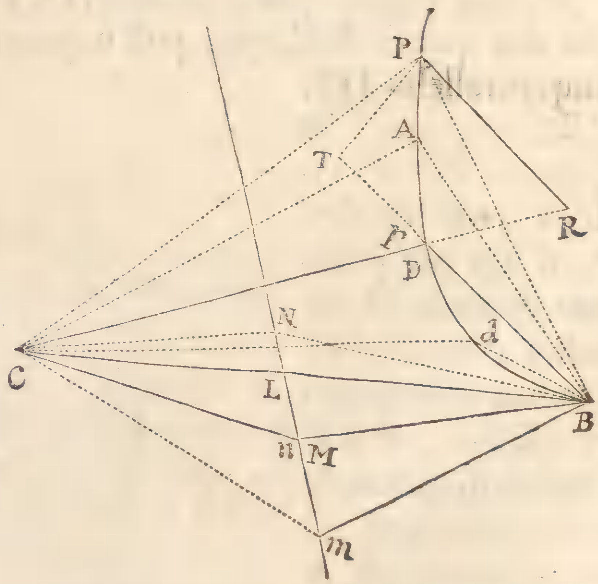


vis P*t*, P*r* ipſis P*T*, P*R* proportionales, & ſi per earum terminos *t*, *r* & polos B, *C* actæ B*t*, *Cr* concurrant in *d*, locabitur punctum illud *d* in Trajectoria quæſita. Nam punctum illud *d* (per Lem. XX) verſatur in Conica Sectione per puncta quatuor *A*, B, P, *C* tranſeunte; & lineis *Rr*, *Tt* evaneſcentibus, coit punctum *d* cum puncto *D*. Tranſit ergo ſectio Conica per puncta quinq; *A*, B, *C*, *D*, P. *Q. E. D.*



Idem aliter.

E punctis datis junge tria quævis *A*, *B*, *C*, & circum duo eorum *B*, *C* ceu polos, rotando angulos magnitudine datos *ABC*, *ACB*, applicentur crura *BA*, *CA* primo ad punctum *D*, deinde ad punctum P, & notentur puncta *M*, *N* in quibus altera crura *BL*, *CL* caſu utroq; ſe decuſſant. Agatur recta infinita *MN*, & rotentur anguli illi mobiles circum polos ſuos B, *C*, ea lege ut crurum



crurum *B A*, *C A*, vel B*D*, *C D* interſectio, quæ jam ſit *d*, Trajectoriam quæſitam *P A D d B* delineabit. Nam punctum *d* per Lem. XXI continget ſectionem Conicam per puncta *B*, *C* tranſeuntem & ubi punctum *m* accedit ad puncta *L*, *M*, *N*, punctum *d* (per conſtructionem) accedet ad puncta *A*, *D*, *P*. Deſcribetur itaq; ſectio Conica tranſiens per puncta quinq; *A*, *B*, *C*, *D*, *P*. *Q. E. F.*

Corol. 1. Hinc rectæ expedite duci poſſunt quæ trajectoriam in punctis quibuſvis datis *B*, *C* tangent. In caſu utrovis accedat punctum *d* ad punctum *C* & recta *C d* evadet tangens quæſita.

Corol. 2. Unde etiam Trajectoriarum centra, diametri & latera recta inveniri poſſunt, ut in Corollario ſecundo Lemmatis XIX

Schol.

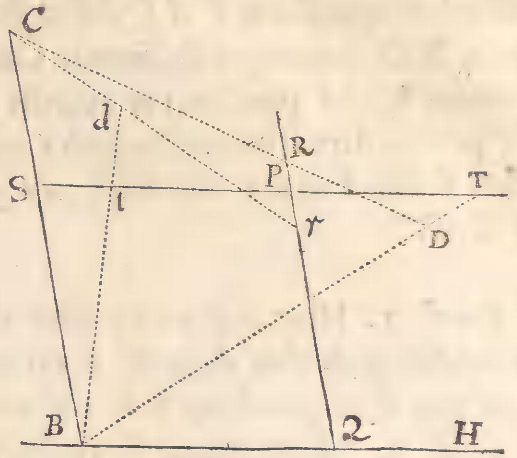
Conſtructio in caſu priore evadet paulo ſimplicior jungendo *B P*, & in ea ſi opus eſt producta, capiendo *B p* ad *B P* ut eſt *P R* ad *P T*, & per *p* agendo rectam infinitam *p D* ipſi *S P T* parallelam, inq; ea capiendo ſemper *p D* æqualem *P r*, & agendo rectas *B D*, *C r* concurrentes in *d*. Nam cum ſint *P r* ad *P t*, *P R* ad *P T*, *p B* ad *P B*, *p D* ad *P t* in eadem ratione, erunt *p D* & *P r* ſemper æquales. Hac methodo puncta Trajectoriæ inveniuntur expeditiſſime, niſi mavis Curvam, ut in caſu ſecundo, deſcribere Mechanice.

Prop. XXIII. Prob. XV.

Trajectoriam deſcribere quæ per data quatuor puncta tranſibit, & rectam continget poſitione datam.

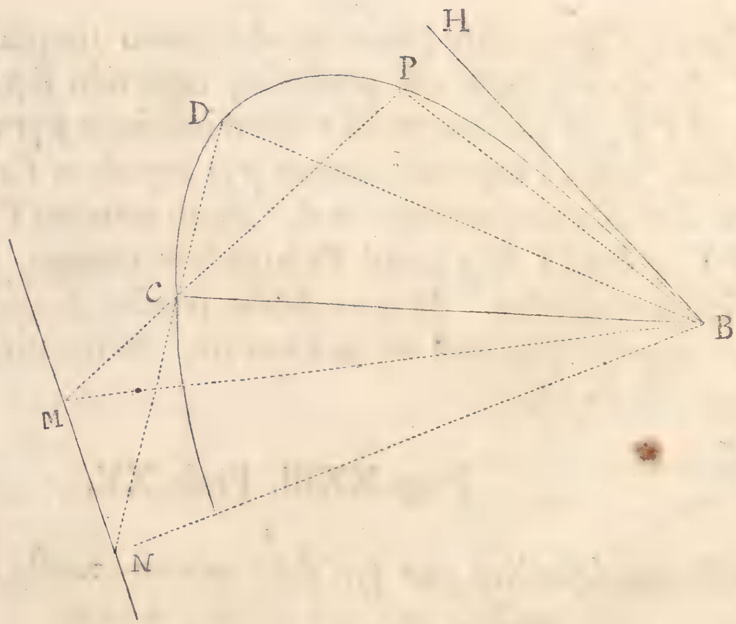
Cas. 1. Dentur tangens *H B*, punctum contactus B, & alia tria puncta *C*, *D*, *P*. Junge B*C*, & agendo *P S* parallelam

B*H*, & *PQ* parallelam B*C*, comple parallelogrammum B*SPQ*. Age B*D* ſecantem *SP* in *T*, & *CD* ſecantem *PQ* in *R*. Deniq; agendo quamvis *tr* ipſi *TR* parallelam, de *PQ*, *PS* abſcinde *Pr*, *Pt* ipſis P*R*, P*T* proportionales reſpective; & actarum *C r*, B*t* concurſus *d* (per Corol. 2. Lem. XX) incidet ſemper in Trajectoriam deſcribendam.



Idem aliter.

Revolvatur tum angulus magnitudine datus *C* B *H* circa polum B, tum radius quilibet rectilineus & utrinq; productus *DC* circa polum *C*. Notentur puncta *M*, *N* in quibus anguli crus B*C* ſecat radium illum ubi crus alterum B*H* concurrit cum eodem radio in punctis *D* & P. Deinde ad actam infinitam *M N* concurrant perpetuo radius ille *CP* vel *CD* & anguli crus *CB*, &

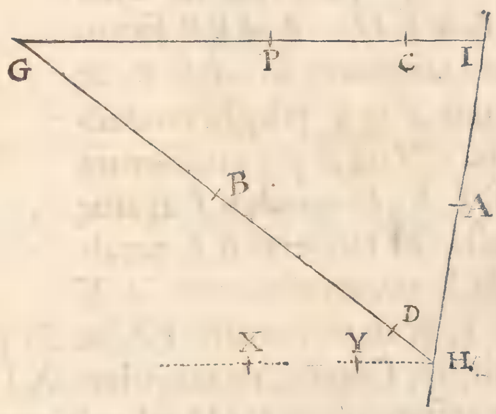


cru-

cruris alterius *BH* concurſus cum radio delineabit Trajectoriam quæſitam.

Nam ſi in conſtructionibus Problematis ſuperioris accedat punctum *A* ad punctum *B*, lineæ *CA* & *CB* coincident, & linea *AB* in ultimo ſuo ſitu fiet tangens *BH*, atq; adeo conſtructiones ibi poſitæ evadent eædem cum conſtructionibus hic deſcriptis. Delineabit igitur cruris B*H* concurſus cum radio ſectionem Conicam per puncta *C*, *D*, *P* tranſeuntem, & rectam B*H* tangentem in puncto B. *Q. E. F.*

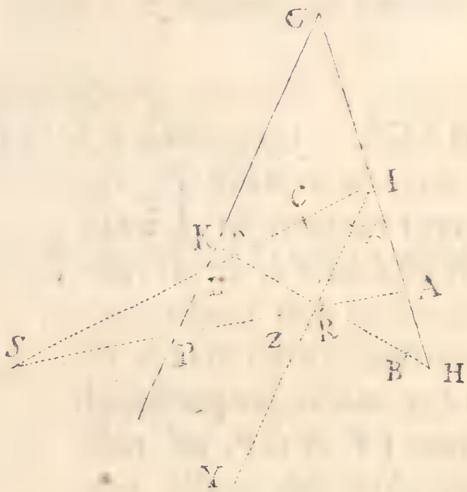
Cas. 2. Dentur puncta quatuor *B*, *C*, *D*, P extra tangentem *HI* ſita. Junge bina *BD*, *C*P concurrentia in *G*, tangentiq; occurrentia in *H* & *I*. Secetur tangens in *A*, ita ut ſit *HA* ad *AI*, ut eſt rectangulum ſub media proportionali inter B*H* & *H*-*D* & media proportionali inter *CG* & *G*P, ad rectangulum ſub media proportionali inter P*I* & *IC* & media proportionali inter *DG* & *G*B, & erit *A* punctum contactus. Nam ſi rectæ P*I* parallela *HX* trajectoriam ſecet in punctis quibuſvis *X* & *Y*: erit (ex Conicis) H*A quad.* ad *AI quad.* ut rectangulum *X*H*Y* ad rectangulum *B*H*D* (ſeu rectangulum *CG*P ad rectangulum *DG*B) & rectangulum *BH*D ad rectangulum P*IC* conjunctim. Invento autem contactus puncto *A*, deſcribetur Trajectoria ut in caſu primo. *Q. E. F.* Capi autem poteſt punctum *A* vel inter puncta H & *I*, vel extra; & perinde Trajectoria dupliciter deſcribi.



Prop. XXIV. Prob. XVI.

Trajectoriam deſcribere quæ tranſibit per data tria puncta & rectas duas poſitione datas continget.

Dentur tangentes *HI*, *KL* & puncta B, *C*, *D*. Age B*D* tangentibus occurrentem in punctis *H*, *K*, & *C*D tangentibus occurrentem in punctis *I*, *L*. Actas ita ſeca in *R* & S, ut ſit *HR* ad *KR* ut eſt media proportionalis inter B*H* & *HD* ad mediam proportionalem inter B*K* & K*D*; & *I*S ad *L*S ut eſt media proportionalis inter *CI* & *ID* ad mediam proportionalem inter *C*L & *LD*. Age *R*S ſecantem tangentes in *A* & P, & erunt *A* & P puncta contactus. Nam ſi per punctorum *H*, *I*, *K*, *L* quodvis *I* agatur recta *IY* tangenti *KL* parallela & occurrens curvæ in *X* & *Y*, & in ea ſumatur IZ media proportionalis inter *IX* & *IY*: erit, ex Conicis, rectangulum *XIY* (ſeu *I*Z *quad.*) ad L P *quad.* ut rectangulum *CI*D ad rectangulum *C*L D; id eſt (per conſtructionem) ut S*I* *quad.* ad S*L* *quad.* atq; adeo *IZ* ad *L*P ut S*I* ad S*L*. Jacent ergo puncta S, P, *Z* in una recta. Porro tangentibus concurrentibus in *G*, erit (ex Conicis) rectangulum *XIY* (ſeu I Z *quad.*) ad I *A* *quad.* ut *G* P *quad.* ad *G A* *quad.*, adeoq; I Z ad I *A* ut G P ad G *A*. Jacent ergo puncta P, *Z* & *A* in una recta, adeoq; puncta S, P & *A* ſunt in una recta. Et eodem argumento probabitur quod puncta *R*, P & *A* ſunt in una recta. Jacent igitur puncta contactus *A* & *P* in recta S*R*.



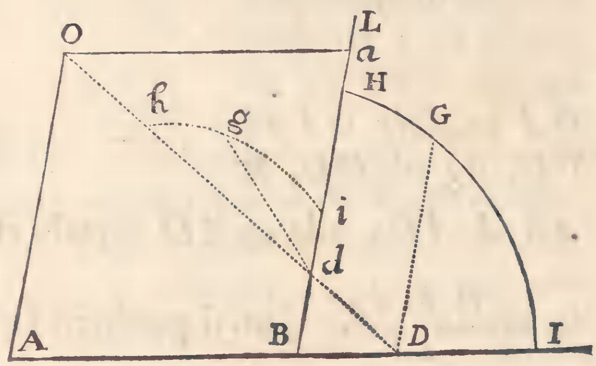
Hiſce

Hiſce autem inventis, Trajectoria deſcribetur ut in caſu primo Problematis ſuperioris. *Q. E. F.*

Lemma XXII.

Figuras in alias ejuſdem generis figuras mutare.

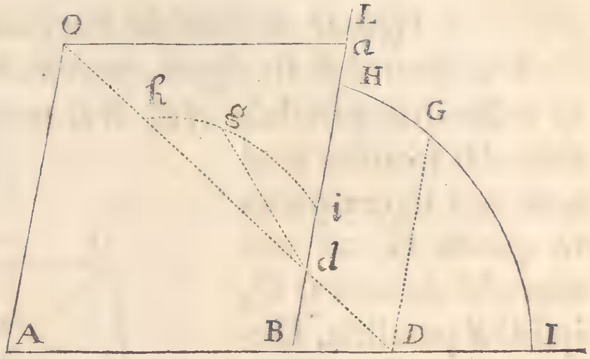
Tranſmutanda ſit figura quævis *HGI*. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ *AO*, *BL* tertiam quamvis poſitione datam *AB* ſecantes in *A* & *B*, & a figuræ puncto quovis *G*, ad rectam *AB* ducatur *GD*, ipſi *OA* parallela. Deinde a puncto aliquo *O* in linea *OA* dato ad punctum *D* ducatur recta *OD*, ipſi *BL* occurrens in *d*; & a puncto occurſus erigatur recta *gd*, datum quemvis angulum cum recta *BL* continens, atq; eam habens rationem ad *Od* quam habet *GD* ad *OD*; & erit *g* punctum in figura nova *hgi* puncto *G* reſpondens. Eadem ratione puncta ſingula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ. Concipe igitur punctum *G* motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum *g* motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem deſcribet. Diſtinctionis gratia nominemus *DG* ordinatam primam, *dg* ordinatam novam; *BD* abſciſſam primam, *Bd* abſciſſam novam; *O* polum, *OD* radium abſcindentem, *OA* radium ordinatum primum & *Oa* (quo parallelogrammum *OABa* completur) radium ordinatum novum.



Dico jam quod ſi punctum *G* tangit rectam lineam poſitione datam, punctum *g* tanget etiam lineam rectam poſitione datam.

Si

Si punctum G tangit Conicam ſectionem, punctum g tanget etiam conicam ſectionem. Conicis ſectionibus hic circulum annumero. Porro ſi punctum G tangit lineam tertii ordinis Analytici, punctum g tanget lineam tertii itidem ordinis; & ſic de curvis lineis ſuperiorum ordinum: Lineæ duæ erunt ejuſdem ſemper ordinis Analytici quas puncta G, g tangunt. Etenim ut eſt ad ad OA ita ſunt Od ad OD, dg ad DG, & AB ad AD; adeoq; AD æqualis eſt $\frac{OA \times AB}{ad}$ & DG æqualis eſt $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam ſi punctum D tangit rectam lineam, atq; adeo in æquatione quavis, qua relatio inter abſciſſam AD & ordinatam DG habetur, indeterminatæ illæ AD & DG ad unicam tantum dimenſionem aſcendunt, ſcribendo in hac æquatione $\frac{OA \times AB}{ad}$ pro AD, & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro DG, producetur æquatio nova, in qua abſciſſa nova ad & ordinata noua dg ad unicam tantum dimenſionem aſcendent, atq; adeo quæ deſignat lineam rectam. Sin AD & DG (vel earum alterutra) aſcendebant ad duas dimenſiones in æquatione prima, aſcendent itidem ad & dg ad duas in æquatione ſecunda. Et ſic de tribus vel pluribus dimenſionibus. Indeterminatæ ad, dg in æquatione ſecunda & AD, DG in prima aſcendent ſemper ad eundem dimenſionum numerum, & propterea lineæ, quas puncta G, g tangunt, ſunt ejuſdem ordinis Analytici.



Dico præterea quod ſi recta aliqua tangat lineam curvam in figura

figura prima; hæc recta tranſlata tanget lineam curvam in figura nova: & contra. Nam ſi Curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figura prima, puncta eadem tranſlata coibunt in figura nova, atq; adeo rectæ, quibus hæc puncta junguntur ſimul, evadent curvarum tangentes in figura utraq;. Componi poſſent harum aſſertionum Demonſtrationes more magis Geometrico. Sed brevitati conſulo.

Igitur ſi figura rectilinea in aliam tranſmutanda eſt, ſufficit rectarum interſectiones transferre, & per eaſdem in figura nova lineas rectas ducere. Sin curvilineam tranſmutare oportet, transferenda ſunt puncta, tangentes & aliæ rectæ quarum ope Curva linea definitur. Inſervit autem hoc Lemma ſolutioni difficiliorum Problematum, tranſmutando figuras propoſitas in ſimpliciores. Nam rectæ quævis convergentes tranſmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo *AO* lineam quamvis rectam, quæ per concurſum convergentium tranſit: id adeo quia concurſus ille hoc pacto abit in infinitum, lineæ autem parallelæ ſunt quæ ad punctum infinite diſtans tendunt. Poſtquam autem Problema ſolvitur in figura nova, ſi per inverſas operationes tranſmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur Solutio quæſita.

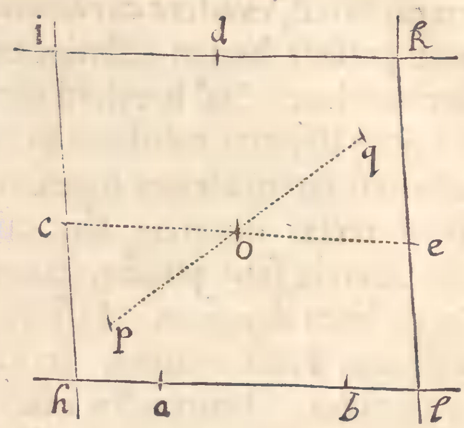
Utile eſt etiam hoc Lemma in ſolutione Solidorum problematum. Nam quoties duæ ſectiones conicæ obvenerint, quarum interſectione Problema ſolvi poteſt, tranſmutare licet unum earum in circulum. Recta item & ſectio Conica in conſtructione planorum problematum vertuntur in rectam & circulum.

Prop. XXV. Prob. XVII.

Trajectoriam deſcribere quæ per data duo puncta tranſibit & rectas tres continget poſitione datas.

Per concurſum tangentium quarumvis duarum cum ſe invicem, & concurſum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data

data tranſit, age rectam infinitam; eaq; adhibita pro radio ordinato primo, tranſmutetur figura, per Lemma ſuperius, in figuram novam. In hac figura tangentes illæ duæ evadent parallelæ, & tangens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo tranſeunti. Sunto *hi*, *kl* tangentes duæ parallelæ, *ik* tangens tertia, & *hl* recta huic parallela tranſiens per puncta illa *a*, *b*, per quæ Conica ſectio in hac figura nova tranſire debet, & parallelogrammum *hikl* complens. Secentur rectæ *hi*, *ik*, *kl* in *c*, *d* & *e*, ita ut ſit *hc* ad latus quadratum rectanguli *ahb*, *ic* ad *id*, & *ke* ad *kd* ut eſt ſumma rectarum *hi* & *kl* ad ſummam trium linearum quarum prima eſt recta *ik*, & alteræ duæ ſunt latera quadrata rectangulorum *ahb* & *alb*: Et erunt *c*, *d*, *e* puncta contactus. Etenim, ex Conicis, ſunt *hc* quadratum ad rectangulum *ahb*, & *ic* quadratum ad *id* quadratum, & *ke* quadratum ad *kd* quadratum, & *el* quadratum ad *alb* rectangulum in eadem ratione, & propterea *hc* ad latus quadratum ipſius *ahb*, *ic* ad *id*, *ke* ad *kd* & *el* ad latus quadratum ipſius *alb* ſunt in dimidiata illa ratione, & compoſite, in data ratione omnium antecedentium *hi* & *kl* ad omnes conſequentes, quæ ſunt latus quadratum rectanguli *ahb* & recta *ik* & latus quadratum rectanguli *alb*. Habentur igitur ex data illa ratione puncta contactus *c*, *d*, *e*, in figura nova. Per inverſas operationes Lemmatis noviſſimi transferantur hæc puncta in figuram primam & ibi, per caſum primum Problematis XIV, deſcribetur Trajectoria. *Q. E. F.* Cæterum perinde ut puncta *a*, *b* jacent vel inter puncta *h*, *l*, vel extra, debent puncta *c*, *d*, *e* vel inter puncta *h*, *i*, *k*, *l* capi, vel extra. Si punctorum *a*, *b* alterutrum cadit inter puncta *h*, *l*, & alterum extra, Problema impoſſibile eſt.



Prop.

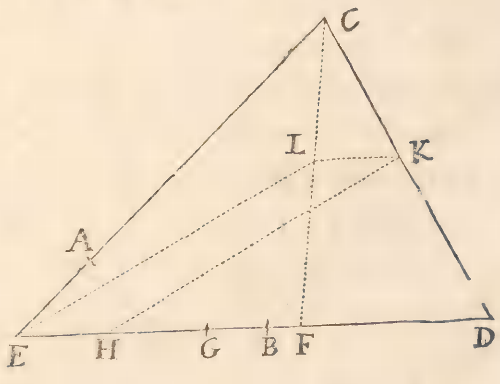
Prop. XXVI. Prob. XVIII.

Trajectoriam deſcribere quæ tranſibit per punctum datum & rectas quatuor poſitione datas continget.

Ab interſectione communi duarum quarumlibet tangentium ad interſectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, & eadem pro radio ordinato primo adhibita, tranſmutetur figura (per Lem. XXII) in figuram novam, & Tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto illæ *hi* & *kl*, *ik* & *hl* continentes parallelogrammum *hikl*. Sitq; *p* punctum in hac nova figura, puncto in figura prima dato reſpondens. Per figuræ centrum *O* agatur *pq*, & exiſtente *Oq* æquali *Op*, erit *q* punctum alterum per quod ſectio Conica in hac figura nova tranſire debet. Per Lemmatis XXII operationem inverſam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ Trajectoria deſcribenda eſt. Per eadem vero deſcribi poteſt Trajectoria illa per Prob. XVII. *Q. E. F.*

Lemma XXIII.

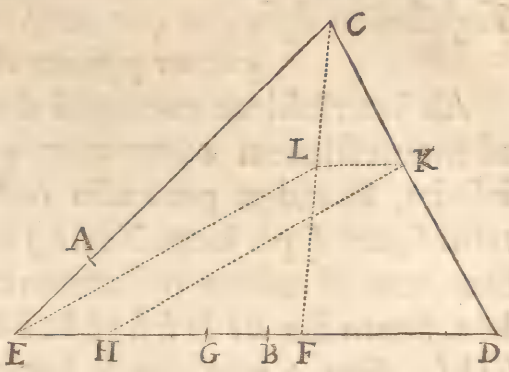
Si rectæ duæ poſitione datæ AC, BD ad data puncta A, B terminentur, datamq; habeant rationem ad invicem, & recta CD, qua puncta indeterminata C, D junguntur, ſecetur in ratione data in K: dico quod punctum K locabitur in recta poſitione data.



Concurrant enim rectæ *AC*, *BD* in *E*, & in *BE* capiatur *BG* ad *AE* ut eſt *BD* ad *AC*, ſitq; *FD* æqualis *EG*, & erit *EC* ad

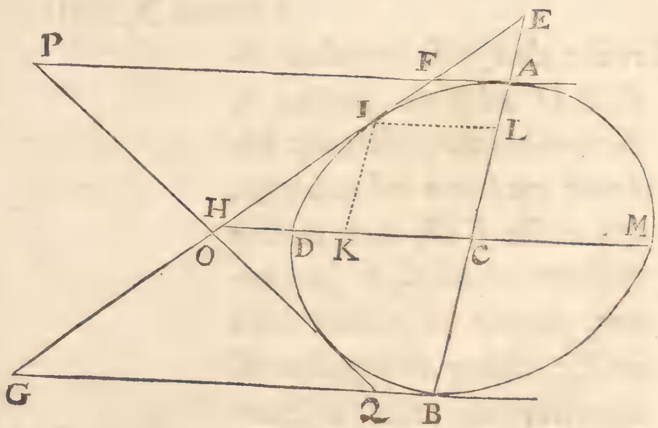
 GD,

G D,hoc eſt ad *E F* ut *A C* ad *B D*,adeoq; in ratione data,& propterea dabitur ſpecie ttiangulum *E F C*. Secetur *C F* in *L* in ratione *C K* ad *C D*, & dabitur etiam ſpecie triangulum *E F L*, proindeq; punctum *L* locabitur in recta E *L* poſitione data. Junge *L K*, & ob datam *F D* & datam rationem *L K* ad *F D*, dabitur *L K*. Huic æqualis capiatur *E H*, & erit E*L K H* parallelogrammum. Locatur igitur punctum *K* in parallelogrammi latere poſitione dato *H K*. *Q. E. D.*



Lemma. XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunq; coniſectionem, quarum duæ parallelæ ſint ac dentur poſitione; dico quod ſectionis ſemidiameter hiſce duabus parallela, ſit media proportionalis inter harum ſegmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.



Sunto *A F*, *G* B parallelæ duæ Coniſectionem *A D* B tangentes in *A* & B; E *F* recta tertia Coniſectionem tangens in *I*, & occurrens prioribus tangentibus in *F* & *G* ; ſitq; *C D* ſemidiameter Figuræ tangentibus parallela: Dico quod *A F*, *C D*, B*G* ſunt continue proportionales. Nam

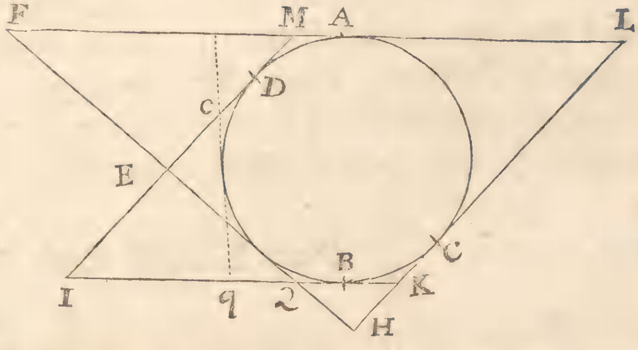
Nam ſi diametri conjugatæ *A* B, *D M* tangenti *FG* occurrant in E & H, ſeq; mutuo ſecent in *C*, & compleatur parallelogrammum *IKCL*; erit ex natura ſectionum Conicarum, ut E *C* ad *C A* ita *C A* ad *L C*, & ita diviſim E *C* − *C A* ad *C A* − *C L* ſeu E *A* ad *A L*, & compoſite E *A* ad E *A* + *A L* ſeu E *L* ut E *C* ad E *C* + *C*-*A* ſeu E B; adeoq; (ob ſimilitudinem triangulorum E *A* F, E *L*-*I*, E C H, E B G) *AF* ad L I ut *CH* ad B G. Eſt itidem ex natura ſectionum Conicarum L I ſeu *C K* ad *C D* ut *C D* ad *C H*, atq; adeo ex æquo perturbate *AF* ad *C D* ut *C D* ad B G. *Q*. E. *D*.

Corol. 1. Hinc ſi tangentes duæ *FG*, *P Q* tangentibus parallelis *A F*, B G occurrant in *F* & *G*, P & *Q*, ſeq; mutuo ſecent in *O*, erit (ex æquo perturbate) *A* F ad B *Q* ut A P ad B G, & diviſim ut F P ad G *Q*, atq; adeo ut F *O* ad *O* G.

Corol. 2. Unde etiam rectæ duæ P G, F *Q* per puncta P & G, F & *Q* ductæ, concurrent ad rectam *A C* B per centrum figuræ & puncta contactuum A, B tranſeuntem.

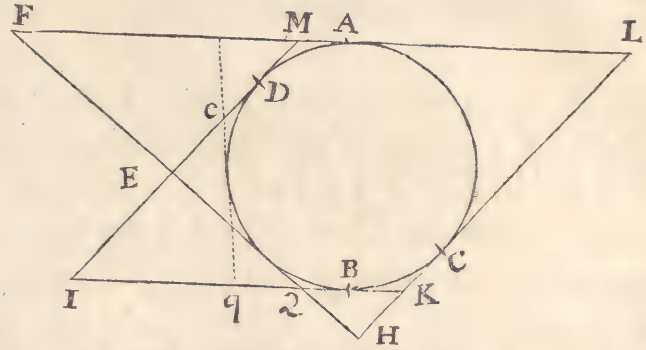
Lemma XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant ſectionem quamcunq; Conicam, & abſcindantur ad tangentem quamvis quintam; ſumantur autem abſciſſæ terminatæ ad angulos oppoſitos parallelogrammi: dico quod abſciſſa unius lateris ſit ad latus illud, ut pars lateris contermini inter punctum contactus & latus tertium, ad abſciſſam lateris hujus contermini.



Tangant parallelogrammi *MIK*L latera quatuor *M*L, I*K*, *K L*.

KL, MI ſectionem Conicam in *A*, B, *C*, *D*, & ſecet tangens quinta F*Q* hæc latera in F, *Q*, *H* & E: dico quod ſit ME ad MI ut BK ad *KQ*, & *KH* ad KL ut AM ad MF. Nam per Corollarium Lemmatis ſuperioris, eſt ME ad EI ut AM ſeu BK ad BQ, & componendo ME ad MI ut BK ad KQ. Q. E. D. Item KH ad HL ut BK ſeu AM ad AF, & dividendo KH ad KL ut AM ad MF. *Q.* E. *D.*



Corol. 1. Hinc ſi parallelogrammum IK*L*M datur, dabitur rectangulum KQ x ME, ut & huic æquale rectangulum KH x MF. Æquantur enim rectangula illa ob ſimilitudinem triangulorum KQH, MFE.

Corol. 2. Et ſi ſexta ducatur tangens *e q* tangentibus KI, MI occurrens in *e* & *q*, rectangulum KQ x ME æquabitur rectangulo K*q* x M*e*, eritq; KQ ad M*e* ut K*q* ad ME, & diviſim ut *Q q* ad E*e*.

Corol. 3. Unde etiam ſi E*q*, *e Q* jungantur & biſecentur, & recta per puncta biſectionum agatur, tranſibit hæc per centrum Sectionis Conicæ. Nam cum ſit *Q q* ad E*e* ut K*Q* ad *Me*, tranſibit eadem recta per medium omnium E*q*, *e Q*, *MK*; (per Lemma XXIII) & medium rectæ MK eſt centrum Sectionis.

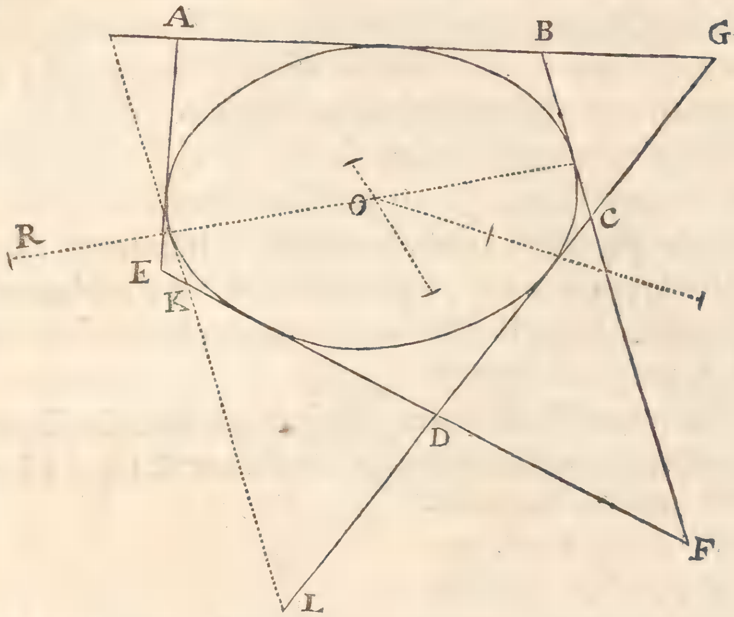
Prop. XXVII. Prob. XIX.

Trajectoriam deſcribere quæ rectas quinq; poſitione datas continget.

Dentur poſitione tangentes ABG, BCF, GCD, FDE EA. Figuræ quadrilateræ ſub quatuor quibuſvis contentæ *A B*

FE

F E diagonales *A F*, *B* E biſeca, & (per Cor. 3. *Lem.* XXV) recta per puncta biſectionum acta tranſibit per centrum Trajectoriæ. *R*urſus figuræ quadrilateræ *B G D* F, ſub alijs quibuſvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) *B*-*D*, *G F* biſeca, & recta per puncta biſectionum acta tranſibit per centrum ſectionis. Dabitur ergo centrum in concurſu biſecantium. Sit illud *O*. Tangenti cuivis *B C* parallelam age *K L*, ad eam diſtantiam ut centrum *O* in medio inter parallelas locetur, & acta *K L* tanget trajectoriam deſcribendam. Secet hæc tangentes alias quaſvis duas *C D*, F *D*-E in *L* & *K*. Per tangentium non parallelarum *C L*, F *K* cum parallelis *C* F, K *L* concurſus *C* & *K*, F & *L* age *C K*, F *L* concurrentes in *R*, & recta *O K* ducta & producta ſecabit tangentes parallelas *C* F, *K L* in punctis contactuum. Patet hoc per Corol. 2. Lem. XXIV. Eadem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per Caſum 1. Prob. XIV. Trajectoriam deſcribere. *Q. E. F.*

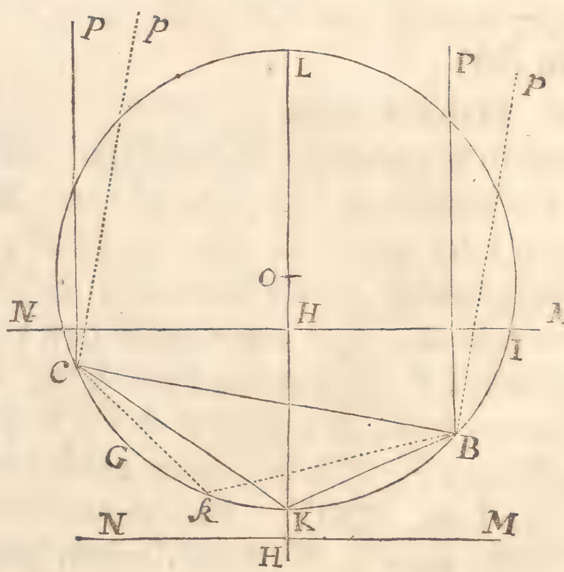


Scho-

Schol.

Problemata, ubi dantur Trajectoriarum vel centra vel *A*ſymptoti, includuntur in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus una cum centro, dantur alia totidem puncta aliæq; tangentes a centro ex altera ejus parte æqualiter diſtantes. Aſymptotos autem pro tangente habenda eſt, & ejus terminus infinite diſtans (ſi ita loqui fas ſit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujuſvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Aſymptoton, atq; conſtructiones Problematis XV & Caſus primi Problematis XIV vertentur in conſtructiones Problematum ubi Aſymptoti dantur.

Poſtquam Trajectoria deſcripta eſt, invenire licet axes & umbilicos ejus hac methodo. In conſtructione & Figura Lemmatis *XXI*, fac ut angulorum mobilium *PBN*, *PCN* crura *BP*, *CP* quorum concurſu Trajectoria deſcribebatur ſint ſibi invicem parallela, eumq; ſervantia ſitum revolvantur circa polos ſuos *B*, *C* in figura illa. Interea vero deſcribant altera angulorum illorum crura *CN*, *BN*, concurſu ſuo *K* vel *k*, circulum *IBKGC*. Sit circuli hujus centrum *O*.



Ab hoc centro ad Regulam *MN*, ad quam altera illa crura *CN*, *BN* interea concurrebant dum Trajectoria deſcribebatur, demitte normalem *OH* circulo occurrentem in K & *L*. Et ubi crura

ra illa altera *CK*, *B*K concurrunt ad punctum iſtud *K* quod *R*egulæ propius eſt, crura prima *CP*, *BP* parallela erunt axi majori; & contrarium eveniet ſi crura eadem concurrunt ad punctum remotius *L*. Unde ſi detur *T*rajectoriæ centrum, dabuntur axes. Hiſce autem datis, umbilici ſunt in promptu.

Axium vero quadrata ſunt ad invicem ut *KH* ad *LH*, & inde facile eſt *T*rajectoriam ſpecie datam per data quatuor puncta deſcribere. Nam ſi duo ex punctis datis conſtituantur poli *C*, B, tertium dabit angulos mobiles *PCK*, *PB*K. *T*um ob datam ſpecie Trajectoriam, dabitur ratio *OH* ad *O*K, centroq; *O* & intervallo *OH* deſcribendo circulum, & per punctum quartum agendo rectam quæ circulum illum tangat, dabitur regula *MN* cujus ope Trajectoria deſcribetur. Unde etiam viciſſim Trapezium ſpecie datum (ſi caſus quidam impoſſibiles excipiantur) in data quavis ſectione Conica inſcribi poteſt.

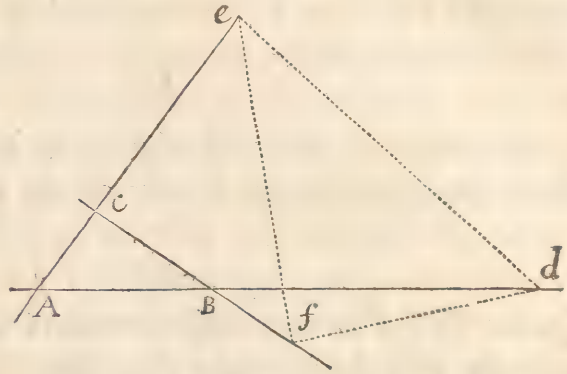
Sunt & alia *L*emmata quorum ope Trajectoriæ ſpecie datæ datis punctis & tangentibus, deſcribi poſſunt. Ejus generis eſt quod, ſi recta linea per punctum quodvis poſitione datum ducatur, quæ datam Coniſectionem in punctis duobus interſecet, & interſectionum intervallum biſecetur, punctum biſectionis tanget aliam Coniſectionem ejuſdem ſpeciei cum priore, atq; axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

Lemma XXVI.

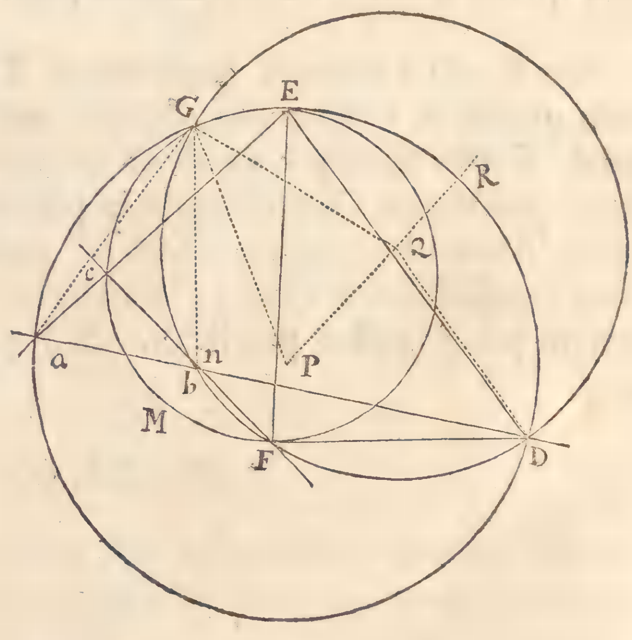
Trianguli ſpecie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem poſitione datas, quæ non ſunt omnes parallelæ, ſingulos ad ſingulas ponere.

Dantur poſitione tres rectæ infinitæ *AB*, *AC*, *BC*, & oportet triangulum *DE*F ita locare, ut angulus ejus *D* lineam *AB*, an-

angulus E lineam *AC*,& angulus F lineam *BC* tangat. Super *D* E, *D* F & E F deſcribe tria circulorum ſegmenta *DR* E, *DG* F, E *M* F,quæ capiant angulos angulis *BAC*, *A*B*C*, *ACB* æquales reſpective. Deſcribantur autem hæc ſegmenta ad eas partes linearum *D*E, *D*F, EF ut literæ *DRED* eodem ordine cum literis *BACB*, literæ *DGFD* eodem cum literis *ABCA*, & literæ E*M*FE eodem cum literis *ACBA* in orbem redeant: deinde compleantur hæc ſegmenta in circulos.



Secent circuli duo priores ſe mutuo in *G*, ſintq; centra eorum *P* & *Q*. Junctis *GP*, *PQ*, cape *Ga* ad *AB* ut eſt *GP* ad *PQ*, & centro *G*, intervallo *Ga* deſcribe circulum, qui ſecet circulum primum *D*GE in *a*. Jungatur tum *aD* ſecans circulum ſecundum *DFG* in *b*, tum *a*E ſecans circulum tertium *G*E*c* in *c*. Et compleatur figura *abc*DEF ſimilis & æqualis figuræ *ABCdef*. Dico factum.



Agatur enim F*c* ipſi *aD* occurrens in *n*. Jungantur *aG*, *bG*,

bG, *PD*, *QD* & producatur P*Q* ad *R*. Ex conſtructione eſt angulus E*aD* æqualis angulo *CAB*, & angulus E*c*F æqualis angulo *ACB*, adeoq; triangulum *anc* triangulo *ABC* æquiangulum. Ergo angulus *anc* ſeu F*nD* angulo *ABC*, adeoq; angulo F*bD* æqualis eſt, & propterea punctum *n* incidit in punctum *b*. Porro angulus *G*P*Q*, qui dimidius eſt anguli ad centrum *G*P*D*, æqualis eſt angulo ad circumferentiam *GaD*; & angulus G*QR*, qui dimidius eſt complementi anguli ad centrum G*QD*, æqualis eſt angulo ad circumferentiam G*bD*, adeoq; eorum complementa P*Q*G, *ab*G æquantur, ſuntq; ideo triangula GP*Q*, G*ab* ſimilia, & G*a* eſt ad *ab* ut GP ad P*Q*; id eſt (ex constructione) ut G*a* ad *A*B. Æquantur itaq; *ab* & *AB*, & propterea triangula *abc*, AB*C*, quæ modo ſimilia eſſe probavimus, ſunt etiam æqualia. Unde cum tangant inſuper trianguli *D*EF anguli *D*, E, *F* trianguli *abc* latera *ab*, *ac*, *bc* reſpective, compleri poteſt figura *ABC def* figuræ *abc DEF* ſimilis & æqualis, atq; eam complendo ſolvetur Problema. *Q. E F.*

Corol. Hinc recta duci poteſt cujus partes longitudine datæ rectis tribus poſitione datis interjacebunt. Concipe Triangulum *DE*F, puncto *D* ad latus *EF* accedente, & lateribus *D*E, *DF* in directum poſitis, mutari in lineam rectam, cujus pars data *D*E, rectis poſitione datis *AB*, *AC*, & pars data *DF* rectis poſitione datis *AB*, *BC* interponi debet; & applicando conſtructionem præcedentem ad hunc caſum ſolvetur Problema.

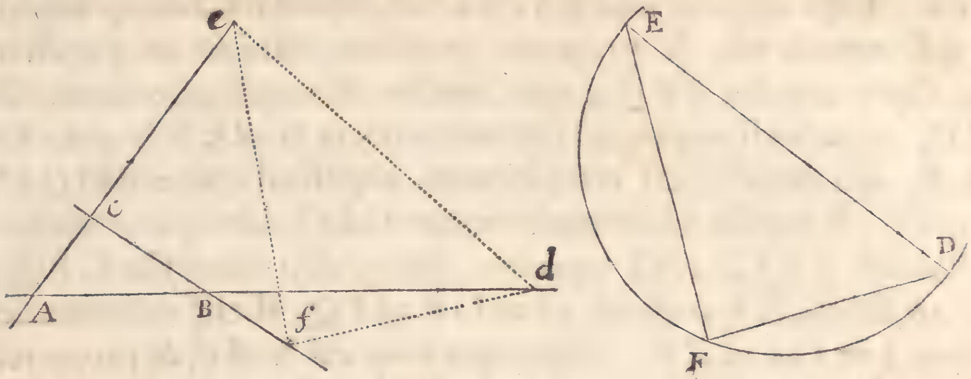
Prop. XXVIII. Prob. XX.

Trajectoriam ſpecie & magnitudine datam deſcribere, cujus partes datæ rectis tribus poſitione datis interjacebunt.

Deſcribenda ſit Trajectoria quæ ſit ſimilis & æqualis lineæ curvæ *DEF*, quæq; a rectis tribus *AB*, *AC*, *BC* poſitione datis, in

 par-

partes datis hujus partibus *D* E & E *F* ſimiles & æquales ſecabitur. Age rectas *D* E, E *F*, *D F*, & trianguli hujus *D* E *F* pone angu-



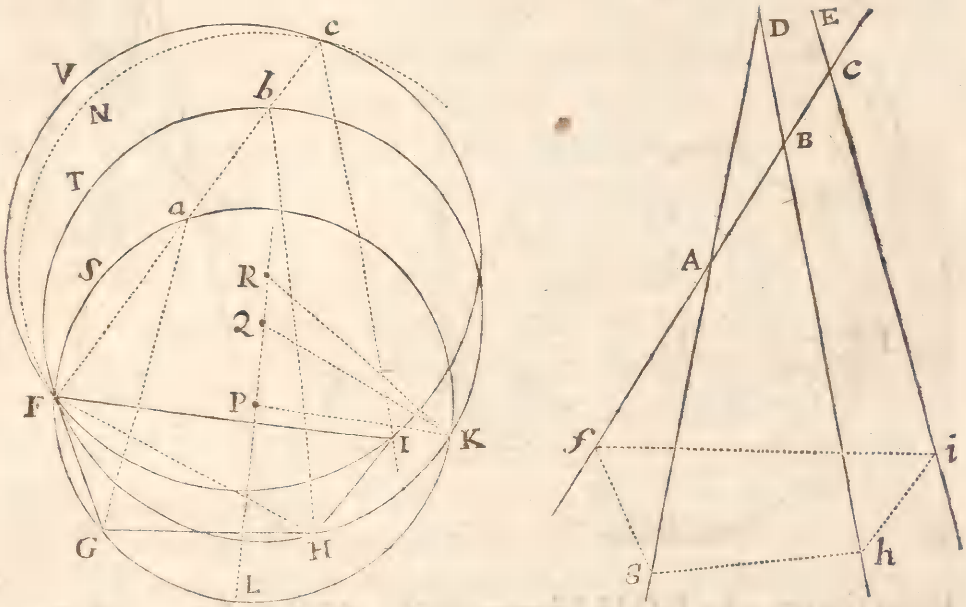
los *D*, E, *F* ad rectas illas poſitione datas: (per Lem. XXVI) Dein circa triangulum deſcribe Trajectoriam curvæ *D E F* ſimilem & æqualem. *Q. E. F.*

Lemma XXVII.

Trapezium ſpecie datum deſcribere cujus anguli ad rectas quatuor poſitione datas (quæ neq; omnes parallelæ ſunt, neq; ad commune punctum convergunt) ſinguli ad ſingulas conſiſtent.

Dentur poſitione rectæ quatuor *ABC*, *AD*, *BD*, *C*E, quarum prima ſecet ſecundam in *A*, tertiam in *B*, & quartam in *C*: & deſcribendum ſit Trapezium *fghi* quod ſit Trapezio *FGHI* ſimile, & cujus angulus *f*, angulo dato *F* æqualis, tangat rectam *ABC*, cæteriq; anguli *g*, *h*, *i* cæteris angulis datis *G*, *H*, *I* æquales tangant cæteras lineas *AD*, *BD*, *C*E reſpective. Jungatur *FH*, & ſuper *FG*, *FH*, *FI* deſcribantur totidem circulorum ſegmenta FS*G*, F*T*H, F*VI*; quorum primum FS*G* capiat angulum æqualem angulo *BAD*, ſecundum F*TH* capiat angulum æqualem angulo *C*BE; ac tertium F*VI* capiat angulum æqualem angulo *AC*E.

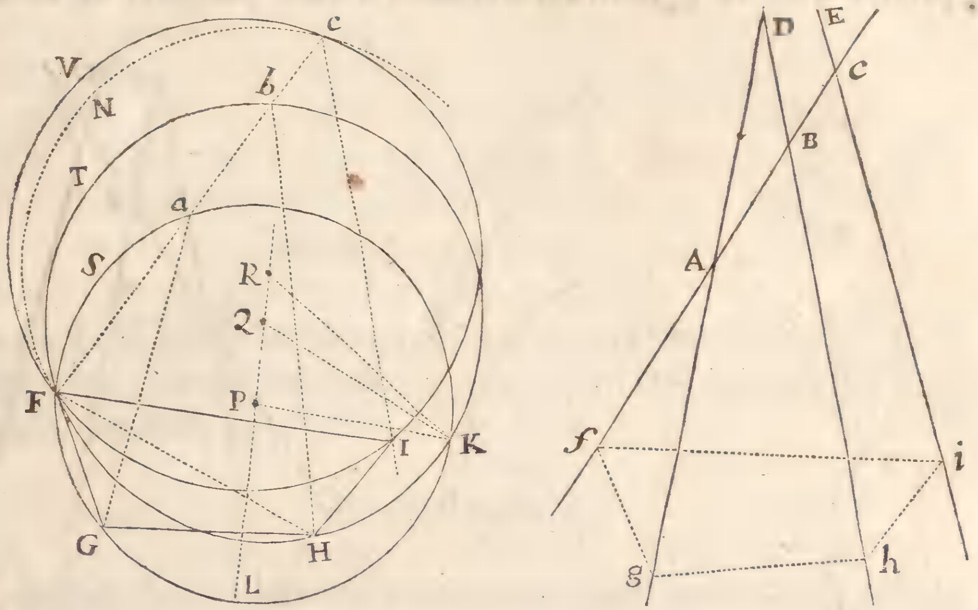
E. Deſcribi autem debent ſegmenta ad eas partes linearum F G, F H, F I, ut literarum F S G F idem ſit ordo circularis qui literarum B A D B, utq; literæ F T H F eodem ordine cum literis C B E C, & literæ F V I F eodem cum literis A C E A in orbem redeant. Compleantur ſegmenta in circulos, ſitq; P centrum circuli primi F S G, & Q centrum ſecundi F T H. Jungatur & utrinq;



producatur P Q, & in ea capiatur Q R in ea ratione ad P Q quam habet B C ad A B. Capiatur autem Q R ad eas partes puncti Q ut literarum P, Q, R idem ſit ordo circularis atq; literarum A, B, C: centroq; R & intervallo R F deſcribatur circulus quartus F N c ſecans circulum tertium F V I in c. Jungatur F c ſecans circulum primum in a & ſecundum in b. Agantur a G, b H, c I, & figuræ a b c F G H I ſimilis conſtituatur figura A B C f g h i: Eritq; Trapezium f g h i illud ipſum quod conſtituere oportuit.

Secent enim circuli duo primi F S G, F T H ſe mutuo in K. Jungantur P K, Q K, R K, a K, b K, c K & producatur Q P ad

L. Anguli ad circumferentias F*a*K, F*bK*, F*cK* ſunt ſemiſſes angulorum F*P*K, F*QK*, F*RK* ad centra, adeoq; angulorum illorum dimidiis *LPK*, *LQK*, *LR*K æquales. Eſt ergo figura *PQRK* figuræ *abc*K æquiangula & ſimilis, & propterea *ab* eſt ad *bc* ut *PQ* ad *QR*, id eſt ut *A*B ad B*C*. Angulis inſuper F*a*G, *Fb*H, F*cI* æquantur *fAg*, *f*B*h*, *fCi* per conſtructionem.

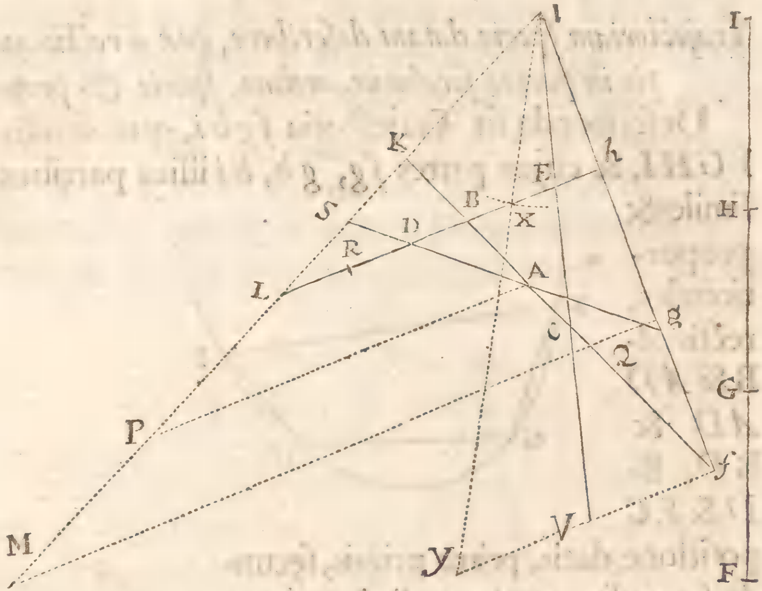


Ergo figuræ *abc*F*G*H*I* figura ſimilis *A*B*Cfghi* compleri poteſt. Quo facto Trapezium *fghi* conſtituetur ſimile Trapezio F*GHI* & angulis ſuis *f*, *g*, *h*, *i* tanget rectas *AB*, *AD*, *BD*, *C*E. Q.E.F.

Corol. Hinc recta duci poteſt cujus partes, rectis quatuor poſitione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli F*G*H, *GHI* uſq; eo, ut rectæ F*G*, *GH*, *HI* in directum jaceant, & in hoc caſu conſtruendo Problema, ducetur recta *fghi* cujus partes *fg*, *gh*, *hi*, rectis quatuor poſitione datis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *C*E interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ F*G*, *GH*, *HI*, eundemq; ſervabunt ordinem inter ſe. Idem vero ſic fit expeditius.

Pro-

Producantur AB ad K, & BD ad L, ut ſit BK ad AB ut HI ad GH; & DL ad BD ut GI ad FG; & jungatur KL occurrens rectæ CE in i. Producatur iL ad M, ut ſit LM ad iL ut GH ad HI, & agatur tum MQ ipſi LB parallela rectæq; AD occurrens in g, tum gi ſecans AB, BD in f, h. Dico factum.



Secet enim Mg rectam AB in Q, & AD rectam KL in S, & agatur AP, quæ ſit ipſi BD parallela & occurrat iL in P, & erunt Mg ad Lh (Mi ad Li, gi ad hi, AK ad BK) & AP ad BL in eadem ratione. Secetur DL in R ut ſit DL ad RL in eadem illa ratione, & ob proportionales gS ad gM, AS ad AP, & DS ad DL, erit ex æquo ut gS ad Lh ita AS ad BL & DS ad RL; & mixtim, $BL - RL$ ad $Lh - BL$ ut $AS - DS$ ad $gS - AS$. Id eſt BR ad Bh ut AD ad Ag, adeoq; ut BD ad gQ. Et viciſſim BR ad BD ut Bh ad gQ ſeu fh ad fg. Sed ex conſtructione eſt BR ad BD ut FH ad FG. Ergo fh eſt ad fg ut FH ad FG. Cum igitur ſit etiam ig ad ih ut Mi ad Li, id eſt, ut IG ad IH, patet lineas FI, fi in g & h, G & H ſimiliter ſectas eſſe. Q. E. F.

In conſtructione Corollarii hujus poſtquam ducitur LK ſecans

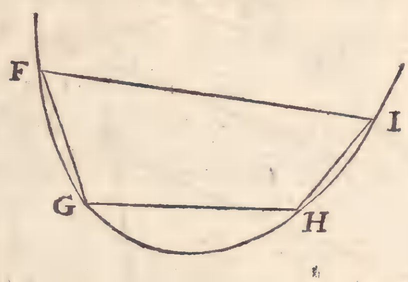
EC

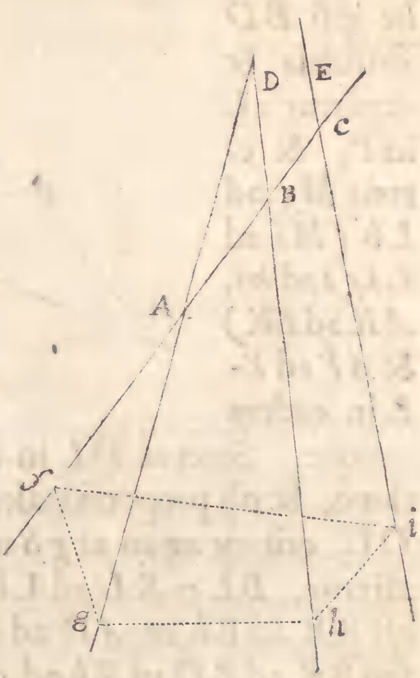
CE in *i*, producere licet *i* E ad *V*, ut ſit E *V* ad *i* E ut F *H* ad *HI*, & agere *Vf* parallelam ipſi B *D*. Eodem recidit ſi centro *i*, intervallo *IH* deſcribatur circulus ſecans B *D* in *X*, producatur *i X* ad *Y*, ut ſit *iY* æqualis *I*F, & agatur *Yf* ipſi B *D* parallela.

Prop. XXIX. Prob. XIX.

Trajectoriam ſpecie datam deſcribere, quæ a rectis quatuor poſitione datis in partes ſecabitur, ordine, ſpecie & proportione datas.

Deſcribenda ſit Trajectoria *fghi*, quæ ſimilis ſit lineæ curvæ F *GHI*, & cujus partes *fg*, *gh*, *hi* illius partibus FG, G*H*, *HI* ſimiles & proportionales, rectis *A*B & *AD* *AD* & B*D*, B*D* & E*C* poſitione datis, prima primis, ſecunda ſecundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis FG, G*H*, HI, FI, deſcribatur Trapezium *fghi* quod ſit Trapezio FGHI ſimile & cujus anguli *f*, *g*, *h*, *i* tangant rectas illas poſitione datas *A*B, *AD*, B*D*, *C*E ſinguli ſingulas dicto ordine. Dein (per Lem. XXVII) circa hoc Trapezium deſcribatur Trajectoria curvæ lineæ FGHI conſimilis.

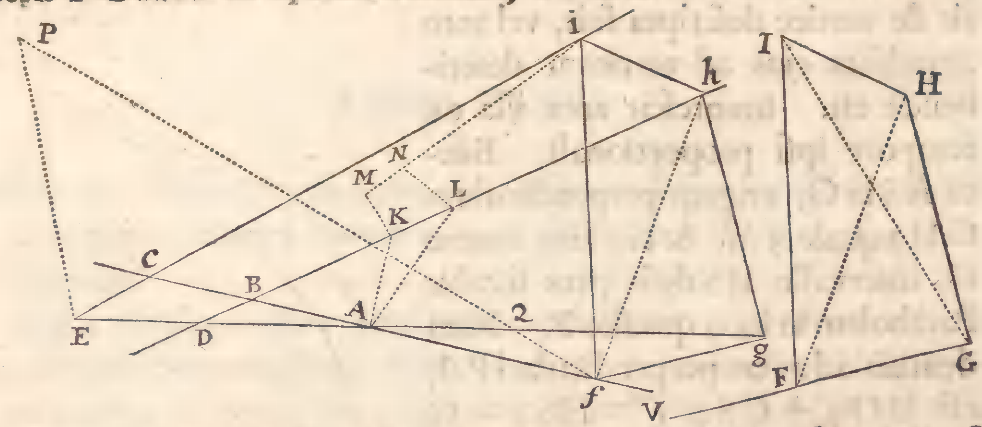




Scho-

Scholium.

Conſtrui etiam poteſt hoc Problema ut ſequitur. Junctis F G, GH, HI, FI produc GF ad V, jungeq; F H, *I* G, & angulis F G H, V F H fac angulos *C* A *K*, *D* A L æquales. Concurrant AK, AL cum recta BD in K & L, & inde agantur K*M*, L*N*, quarum K *M* conſtituat angulum AK*M* æqualem angulo GHI, ſitq; ad AK ut eſt HI ad GH; & L*N* conſtituat angulum ALN æqualem angulo F H I, ſitq; ad AL ut HI ad FH. Ducantur autem AK, KM, A*L*, LN ad eas partes linearum A*D*, AK, AL, ut literæ *CAKMC*, ALK, *DALND* eodem ordine cum literis FGHIF in orbem redeant, & acta *MN* occurrat rectæ



C E in *i*. Fac angulum *i* E P æqualem angulo I *G* F, ſitq; PE ad E *i* ut FG ad GI; & per P agatur *QPf*, quæ cum recta AE*D* contineat angulum *PQ*E æqualem angulo FIG, rectæq; AB occurrat in *f*, & jungatur *fi*. Agantur autem *P*E & *PQ* ad eas partes linearum *C*E, PE, ut literarum P*Ei*P & PE*Q*P idem ſit ordo circularis qui literarum FGHIF, & ſi ſuper linea *fi* eodem quoq; literarum ordine conſtituatur Trapezium *fghi* Trapezio FGHI ſimile, & circumſcribatur Trajectoria ſpecie data, ſolvetur Problema.

Hactenus de orbibus inveniendis. Supereſt ut motus corporum in orbibus inventis determinemus.

SEC-

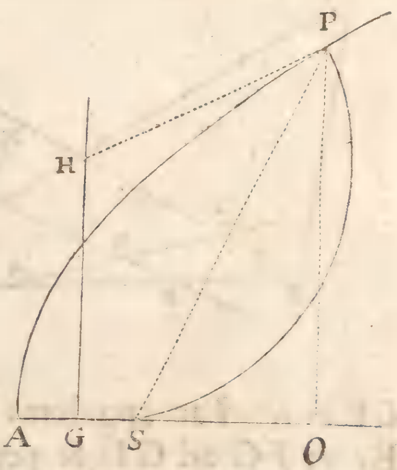
SECT. VI.

De inventione motuum in Orbibus datis.

Prop. XXX. Prob. XXII.

Corporis in data Trajectoria Parabolica moventis, invenire locum ad tempus aſſignatum.

Sit S umbilicus & A vertex principalis Parabolæ, ſitq; $4\,AS \times M$ area Parabolica APS, quæ radio SP, vel poſt exceſſum corporis de vertice deſcripta fuit, vel ante appulſum ejus ad verticem deſcribenda eſt. Innoteſcit area illa ex tempore ipſi proportionali. Biſeca AS in G, erigeq; perpendiculum GH æquale $3\,M$, & circulus centro H, intervallo HS deſcriptus ſecabit Parabolam in loco quæſito P. Nam demiſſa ad axem perpendiculari PO, eſt $HGq. + GSq.\ (= HSq = GOq. + \overline{HG - PO}q.) = GOq. + HGq - 2\,HG \times PO + POq.$ Et deleto utrinq; $HGq.$ fiet $GSq. = GOq. - 2\,HG \times PO + POq.$ ſeu $2\,HG \times PO\ (= GOq. + POq. - GSq. = AOq. - 2\,GAO + POq.) = AOq. + \frac{3}{4}\,POq.$ Pro $AOq.$ ſcribe $AO \times \frac{POq.}{4\,AS}$, & applicatis terminis omnibus ad $3\,PO$, ductiſq; in $2\,AS$, fiet $\frac{4}{3}\,GH \times AS\ (= \frac{1}{6}\,AO \times PO + \frac{1}{2}\,AS \times PO = \frac{AO + 3\,AS}{6} \times PO = \frac{4\,AO - 3\,SO}{6} \times PO =$ areæ $APO - SPO) =$ areæ APS. Sed GH erat $3\,M$, & inde



$\frac{4}{3}\,HG$

$\frac{4}{3}$HGxAS eſt 4A*S*xM. Ergo area APS æqualis eſt 4A*S*x M. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc GH eſt ad AS, ut tempus quo corpus deſcripſit arcum AP ad tempus quo corpus deſcripſit arcum inter verticem A & perpendiculum ad axem ab umbilico S erectum.

Corol. 2. Et circulo ASP per corpus movens perpetuo tranſeunte, velocitas puncti G eſt ad velocitatem quam corpus habuit in vertice A, ut 3 ad 8; adeoq; in ea etiam ratione eſt linea GH ad lineam rectam quam corpus tempore motus ſui ab A ad P, ea cum velocitate quam habuit in vertice A, deſcribere poſſet.

Corol. 3. Hinc etiam viceverſa inveniri poteſt tempus quo corpus deſcripſit arcum quemvis aſſignatum AP. Junge AP & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ G*H* occurrens in *H.*

Lemma XXVIII.

Nulla extat figura Ovalis cujus area, rectis pro lubitu abſciſſa, poſſit per æquationes numero terminorum ac dimenſionum finitas generaliter inveniri.

Intra Ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergatq; ſemper ea cum velocitate, quæ ſit ut rectæ illius intra Ovalem longitudo. Hoc motu punctum illud deſcribet Spiralem gyris infinitis. Jam ſi area Oualis per finitam æquationem inveniri poteſt, invenietur etiam per eandem æquationem diſtantia puncti a polo, quæ huic areæ proportionalis eſt, adeoq; omnia Spiralis puncta per æquationem finitam inveniri poſſunt: & propterea rectæ cujuſvis poſitione datæ interſectio cum ſpirali inveniri etiam poteſt per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta ſpiralem ſecat in punctis numero infinitis, & æquatio, qua interſectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum interſectiones omnes radicibus totidem,

adeoq; aſcendit ad tot dimenſiones quot ſunt interſectiones. Quoniam circuli duo ſe mutuo ſecant in punctis duobus, interſectio una non invenitur niſi per æquationem duarum dimenſionum, qua interſectio altera etiam inveniatur. Quoniam duarum ſectionum Conicarum quatuor eſſe poſſunt interſectiones, non poteſt aliqua earum generaliter inveniri niſi per æquationem quatuor dimenſionum, qua omnes ſimul inveniantur. Nam ſi interſectiones illæ ſeorſim quærantur, quoniam eadem eſt omnium lex & conditio, idem erit calculus in caſu unoquoq; & propterea eadem ſemper concluſio, quæ igitur debet omnes interſectiones ſimul complecti & indifferenter exhibere. Unde etiam interſectiones Sectionum Conicarum & curvarum tertiæ poteſtatis, eo quod ſex eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes ſex dimenſionum, & interſectiones duarum curvarum tertiæ poteſtatis, quia novem eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes dimenſionum novem. Id niſi neceſſario fieret, reducere liceret Problemata omnia Solida ad Plana, & pluſquam ſolida ad ſolida. Eadem de cauſa interſectiones binæ rectarum & ſectionum Conicarum prodeunt ſemper per æquationes duarum dimenſionum; ternæ rectarum & curvarum tertiæ poteſtatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & curvarum quartæ poteſtatis per æquationes dimenſionum quatuor, & ſic in infinitum. Ergo interſectiones numero infinitæ rectarum, propterea quod omnium eadem eſt lex & idem calculus, requirunt æquationes numero dimenſionum & radicum infinitas, quibus omnes poſſunt ſimul exhiberi. Si a polo in rectam illam ſecantem demittatur perpendiculum, & perpendiculum una cum ſecante revolvatur circa polum, interſectiones ſpiralis tranſibunt in ſe mutuo, quæq; prima erat ſeu proxima, poſt unam revolutionem ſecunda erit, poſt duas tertia, & ſic deinceps: nec interea mutabitur æquatio niſi pro mutata magnitudine quantitatum per quas poſitio ſecantis determinatur. Unde cum quantitates illæ poſt ſingulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, adeoq; una eademq; exhibebit interſecti-

ones

ones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi poſſunt. Nequit ergo interſectio rectæ & ſpiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat Ovalis cujus area, rectis imperatis abſciſſa, poſſit per talem æquationem generaliter exhiberi.

Eodem argumento, ſi intervallum poli & puncti, quo ſpiralis deſcribitur, capiatur Ovalis perimetro abſciſſæ proportionale, probari poteſt quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi.

Corollarium.

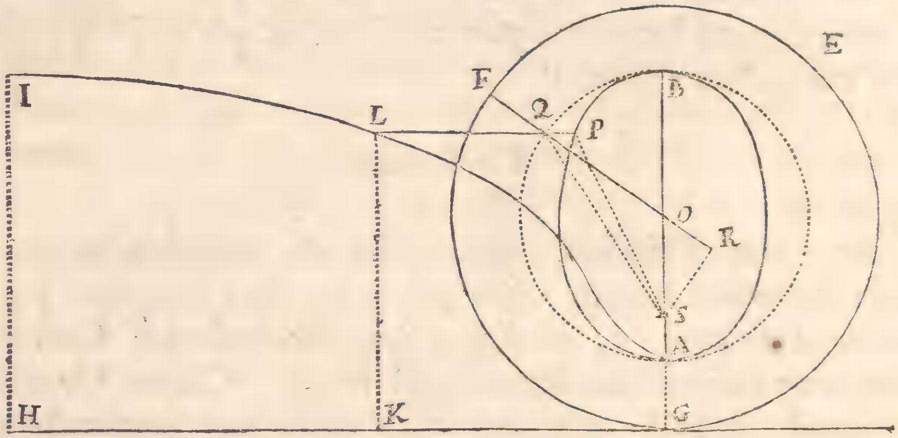
Hinc area Ellipſeos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto deſcribitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam, & propterea per deſcriptionem Curvarum Geometrice rationalium determinari nequit. Curvas Geometrice rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id eſt, per longitudinum rationes complicatas, determinari poſſunt; cæteraſq; (ut Spirales, Quadratrices, Trochoides) Geometrice irrationales. Nam longitudines quæ ſunt vel non ſunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo Elementorum) ſunt Arithmetice rationales vel irrationales. Aream igitur Ellipſeos tempori proportionalem abſcindo per Curvam Geometrice irrationalem ut ſequitur.

Prop. XXXI. Prob. XXIII.

Corporis in data Trajectoria Elliptica moventis invenire locum ad tempus aſſignatum.

Ellipſeos APB ſit A vertex principalis, S umbilicus, O centrum, ſitq; P corporis locus inveniendus. Produc OA ad G ut ſit OG ad

ad *OA* ut *OA* ad *OS*. Erige perpendiculum *GH*, centroq; *O* & intervallo *OG* deſcribe circulum *EFG*, & ſuper regula *GH*, ceu fundo, progrediatur rota *GEF* revolvendo circa axem ſuum, & interea puncto ſuo *A* deſcribendo Trochoidem *ALI*. Quo facto, cape *GK* in ratione ad rotæ perimetrum *GEFG*, ut eſt tempus quo corpus progrediendo ab *A* deſcripſit arcum *AP*, ad tempus



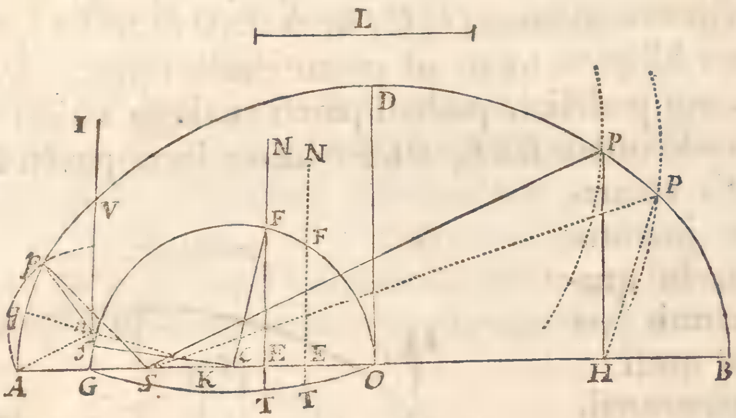
revolutionis unius in Ellipſi. Erigatur perpendiculum *KL* occurrens Trochoidi in *L*, & acta *LP* ipſi *KG* parallela occurret Ellipſi in corporis loco quæſito *P*.

Nam centro *O*, intervallo *OA* deſcribatur ſemicirculus *AQB*, & arcui *AQ* occurrat *LP* producta in *Q*, junganturq; *SQ*, *OQ*. Arcui *EFG* occurrat *OQ* in *F*, & in eandem *OQ* demittatur perpendiculum *SR*. Area *APS* eſt ut area *AQS*, id eſt, ut differentia inter ſectorem *OQA* & triangulum *OQS*, ſive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2}$ *OQ* x *AQ* & $\frac{1}{2}$ *OQ* x *SR*, hoc eſt, ob datam $\frac{1}{2}$ *OQ*, ut differentia inter arcum *AQ* & rectam *SR*, adeoq; (ob æqualitatem rationum *SR* ad ſinum arcus *AQ*, *OS* ad *OA*, *OA* ad *OG*, *AQ* ad *GF*, & diviſim *AQ*−*SR* ad *GF*− ſin. arc. *AQ*) ut *GK* differentia inter arcum *GF* & ſinum arcus *AQ*. *Q.E.D.*

Scho-

Scholium.

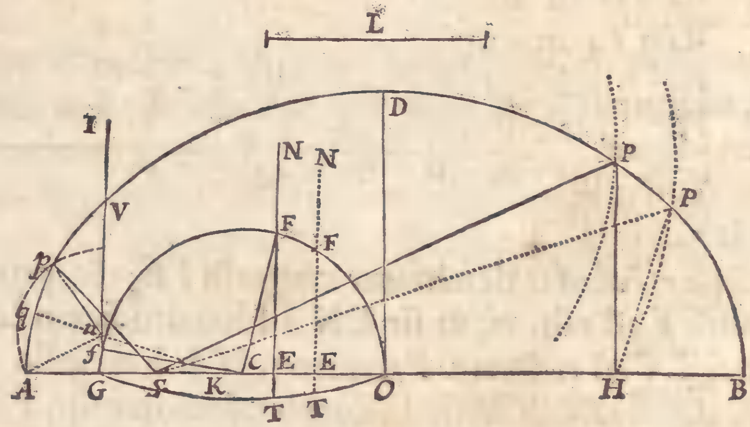
Cæterum ob difficultatem deſcribendi hanc curvam præſtat conſtructiones vero proximas in praxi Mechanica adhibere. Ellipſeos cujuſvis *APB* ſit *AB* axis major, *O* centrum, *S* umbilicus, *OD* ſemiaxis minor, & *AK* dimidium lateris recti. Secetur *AS* in *G*, ut ſit AG ad AS ut *BO* ad *BS*; & quæratur longitudo *L*, quæ ſit ad $\frac{1}{2}$ *GK* ut eſt *AO quad.* ad rectangulum *AS* x *OD*. Biſecetur *OG* in *C*, centroq; *C* & intervallo *C* G deſcribatur ſemicirculus *GFO*. Deniq; capiatur angulus *GCF* in ea ratione ad angulos quatuor rectos, quam habet tempus datum, quo corpus deſcripſit arcum quæſitum *AP*, ad tempus periodicum ſeu revolutionis unius in Ellipſi: Ad *AO* demittatur normalis *FE*, & producatur eadem verſus F ad uſq; *N*, ut ſit *EN* ad longitudinem *L*, ut anguli illius ſinus *EF* ad radium *CF*; centroq; *N* & intervallo *AN* deſcriptus circulus ſecabit Ellipſin in corporis loco quæſito *P* quam proxime.



Nam completo dimidio temporis periodici, corpus *P* ſemper reperietur in Apſide ſumma *B*, & completo altero temporis dimidio, redibit ad Apſidem imam, ut oportet. Ubi vero proxime abeſt ab Apſidibus, ratio prima naſcentium ſectorum *ASP*, *GCF*, & ratio ultima evaneſcentium *BSP* & *OCF*, eadem eſt rationi Ellipſeos totius ad circulum totum. Nam punctis

P,

P, *F* & *N* incidentibus in loca *p*, *f* & *n* axi *AB* quam proximis; ob æquales *An*, *pn*, recta *nq*, quæ ad arcum *Ap* perpendicularis eſt, adeoq; concurrit cum axe in puncto *K*, biſecat arcum A*p*. Proinde eſt ½ A*p* ad *Gn* ut A*K* ad *GK*, & A*p* ad *Gn* ut 2 A*K* ad GK. Eſt & *Gn* ad *Gf* ut *EN* ad *EF*, ſeu *L* ad *CF*, id eſt, ut $\frac{GK \times AOq.}{2\,AS \times OD}$ ad *CF*, ſeu *GK* x A*Oq*. ad 2 AS x *OD* x *CF*, & ex æquo A*p* ad *Gf* ut 2 AK ad GK + GK x A*Oq*. ad 2 AS x *OD* x *CF*, id eſt, ut A*K* x A*Oq*. ad *AS* x *OD* x *CF*, hoc eſt, ob æqualia *AK* x *AO* & *ODq*. ut *AO* x *OD* ad *AS* x *CF*. Proinde *Ap* x ½ *AS* eſt ad *Gf* x ½ GC ut *AO* x *OD* x AS ad *AS* x *CF* x *GC*, ſeu A*O* x *OD* ad *CGq*. id eſt, ſector naſcens AS*p* ad ſectorem naſcentem GC*f* ut A*O* x *OD* ad *CGq*. & propterea ut area Ellipſeos totius ad aream circuli totius. *Q. E. D.* Argumento prolixiore probari poteſt analogia ultima in Sectoribus evaneſcentibus *BSP*, *OCF*: ideoq; locus puncti *P* prope *A*pſides ſatis accurate inventus eſt. In quadraturis error quaſi quingenteſimæ partis areæ Ellipſeos totius vel paulo major obvenire ſolet: qui tamen propemodum evaneſcet per ulteriorem Conſtructionem ſequentem.



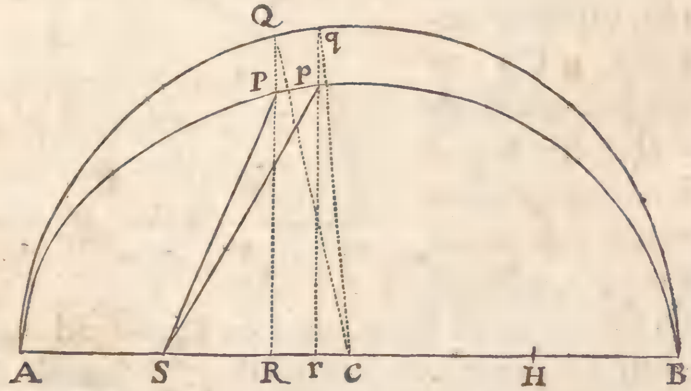
Per puncta G, *O*, duc arcum circularem G*TO* juſtæ magnitudinis; dein produc *EF* hinc inde ad *T* & *N* ut ſit *EN* ad *FT* ut ½ *L* ad *CF*; centroq; *N* & intervallo *AN* deſcribe circulum qui ſecet Ellipſin in *P*, ut ſupra. Arcus autem G*TO* determinabitur

quæ-

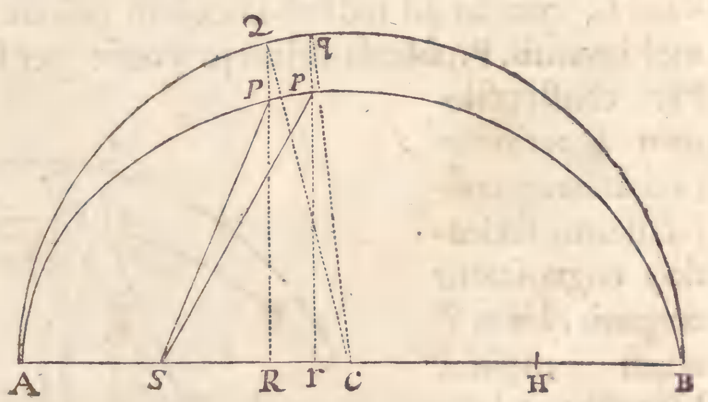
quærendo ejus punctum aliquod T; quod conſtructionem in illo caſu accuratam reddet.

Si Ellipſeos latus tranſverſum multo majus ſit quam latus rectum, & motus corporis prope verticem Ellipſeos deſideretur, (qui caſus in Theoria Cometarum incidit,) educere licet e puncto G rectam GI axi AB perpendicularem, & in ea ratione ad GK quam habet area $AVPS$ ad rectangulum $AK \times AS$; dein centro I & intervallo AI circulum deſcribere. Hic enim ſecabit Ellipſim in corporis loco quæſito P quamproxime. Et eadem conſtructione (mutatis mutandis) conficitur Problema in Hyperbola. Hæ autem conſtructiones demonſtrantur ut ſupra, & ſi Figura (vertice ulteriore B in infinitum abeunte) vertatur in Parabolam, migrant in accuratam illam conſtructionem Problematis. XXII.

Si quando locus ille P accuratius determinandus ſit, inveniatur tum angulus quidam B, qui ſit ad angulum graduum 57,29578 quem arcus radio æqualis ſubtendit, ut eſt umbilicorum diſtantia SH ad Ellipſeos diametrum AB; tum etiam longitudo quædam L, quæ ſit ad radium in eadem ratione inverſe. Quibus ſemel inventis, Problema deinceps confit per ſequentem Analyſin. Per conſtructionem ſuperiorem (vel utcunq; conjecturam faciendo) cognoſcatur corporis locus P quam proxime. Demiſſaq; ad axem Ellipſeos ordinatim applicata PR, ex proportione diametrorum Ellipſeos, dabitur circuli circumſcripti AQB ordinatim applicata RQ, quæ ſinus eſt anguli ACQ exiſtente



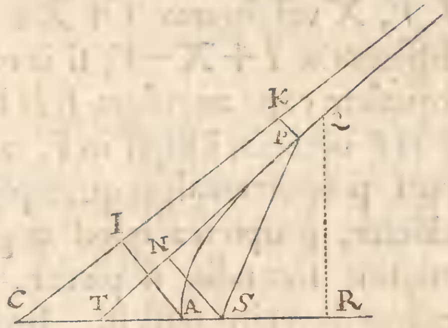
te AC radio. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoſcatur etiam angulus tempori porportionalis, id eſt, qui ſit ad quatuor rectos ut eſt tempus quo corpus deſcripſit arcum AP, ad tempus revolutionis unius in Ellipſi. Sit angulus iſte N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut eſt ſinus iſte anguli ACQ ad Radium, & angulus E ad angulum $N - ACQ + D$, ut eſt longitudo L ad longitudinem eandem L coſinu anguli $ACQ + \frac{1}{2} D$ diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Poſtea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut eſt ſinus anguli $ACQ + E$ ad radium, tum angulus G ad angulum $N - ACQ - E + F$ ut eſt longitudo L ad Longitudinem eandem coſinu anguli $ACQ + E + \frac{1}{2} F$ diminutam ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Tertia vice capiatur angulus H ad angulum B, ut eſt ſinus anguli $ACQ + E + G$ ad radium; & angulus I ad angulum $N - ACQ - E - G + H$, ut eſt longitudo L ad eandem longitudinem coſinu anguli $ACQ + E + G + \frac{1}{2} H$ diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Et ſic pergere licet in infinitum. Deniq; capiatur angulus ACq æqualis angulo $ACQ + E + G + I$ &c. & ex coſinu ejus Cr & ordinata pr, quæ eſt ab ſinum qr ut Ellipſeos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus p. Siquando angulus $N - ACQ + D$ negativus eſt, debet ſignum + ipſius E ubiq; mutari in −, & ſignum − in +. Idem intelligendum eſt de ſignis ipſorum G & I, ubi anguli $N - ACQ - E + F$, & $N - ACQ - E - G + H$ negativi



tivi

tive prodeunt. Convergit autem ſeries infinita $ACQ+E+G+I$ quam celerrime, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum ſecundum E. Et fundatur calculus in hoc Theoremate, quod area APS ſit ut differentia inter arcum AQ & rectam ab umbilico S in Radium CQ perpendiculariter demiſſam.

Non diſſimili calculo conficitur Problema in Hyperbola. Sit ejus centrum C, Vertex A, Umbilicus S & Aſymtotos CK. Cognoſcatur quantitas areæ APS tempori proportionalis. Sit ea A, & fiat conjectura de poſitione rectæ SP, quæ aream illam abſcindat quamproxime. Jungatur CP, & ab A & P ad Aſymptoton agantur AI, PK Aſymptoto alteri parallelæ, & per Tabulam Logarithmorum dabitur Area $AIKP$, eiq; æqualis area CPA, quæ ſubducta de triangulo CPS relinquet aream APS. Applicando arearum A & APS ſemidifferentiam $\frac{1}{2}APS-\frac{1}{2}A$ vel $\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}APS$ ad lineam SN, quæ ab umbilico S in tangentem PT perpendicularis eſt, orietur longitudo PQ. Capiatur autem PQ inter A & P, ſi area APS major ſit area A, ſecus ad puncti P contrarias partes: & punctum Q erit locus corporis accuratius. Et computatione repetita invenietur idem accuratius in perpetuum.



Atq; his calculis Problema generaliter conſit Analytice. Verum uſibus Aſtronomicis accommodatior eſt calculus particularis qui ſequitur. Exiſtentibus AO, OB, OD ſemiaxibus Ellipſeos, (*Vide fig. pag.* 109. 110.) & L ipſius latere recto, quære tum angulum Y, cujus Tangens ſit ad Radium ut eſt ſemiaxium differentia $AO-OD$ ad eorum ſummam $AO+OD$; tum angulum Z, cujus tangens ſit ad Radium ut rectangulum ſub umbilicorum diſtantia SH & ſemiaxium differentia $AO-OD$ ad triplum rectangulum ſub OQ ſemiaxe minore & $AO-\frac{1}{4}L$ differentia inter ſe-

miaxem majorem & quartam partem lateris recti. His angulis ſemel inventis, locus corporis ſic deinceps determinabitur. Sume angulum *T* proportionalem tempori quo arcus *B* P deſcriptus eſt, ſeu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum *V* (primam medii motus æquationem) ad angulum *Y* (æquationem maximam primam) ut eſt ſinus anguli *T* duplicati ad radium; atq; angulum *X* (æquationem ſecundam) ad angulum Z (æquationem maximam ſecundam) ut eſt ſinus verſus anguli T duplicati ad radium duplicatum, vel (quod eodem recidit) ut eſt quadratum ſinus anguli *T* ad quadratum Radii. Angulorum *T*, *V*, *X* vel ſummæ $T+X+V$, ſi angulus *T* recto minor eſt, vel differentiæ $T+X-V$, ſi is recto major eſt rectiſq; duobus minor, æqualem cape angulum *BHP* (motum medium æquatum;) & ſi *HP* occurrat Ellipſi in P, acta *S* P abſcindet aream *BS* P tempori proportionalem quamproxime. Hæc Praxis ſatis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum *V* & *X* (in minutis ſecundis, ſi placet, poſitorum) figuras duas treſve primas invenire ſufficit. Invento autem angulo motus medii æquati *BH* P, angulus veri motus *HS* P & diſtantia *S* P in promptu ſunt per methodum notiſſimam Dris. *Sethi Wardi* Epiſcopi *Salisburienſis* mihi plurimum colendi,

Hactenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem poteſt ut mobile recta deſcendat vel recta aſcendat, & quæ ad iſtiuſmodi motus ſpectant, pergo jam exponere.

SECT.

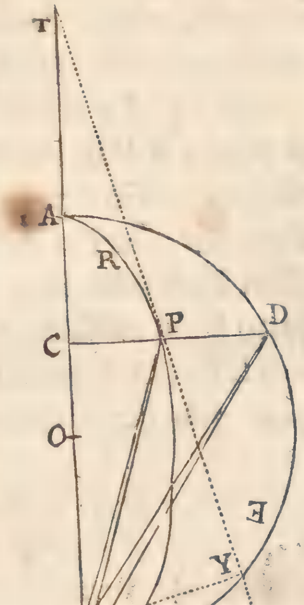
SECT. VII.

De Corporum Aſcenſu & Deſcenſu Rectilineo.

Prop. XXXII. Prob. XXIV.

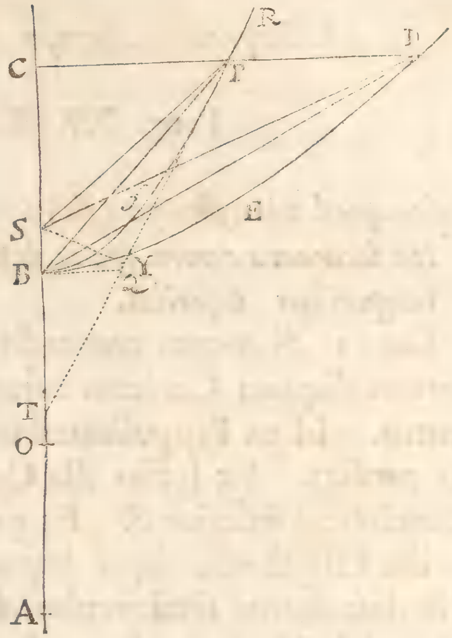
Poſito quod vis centripeta ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum a centro, ſpatia definire quæ corpus recta cadendo datis temporibus deſcribit.

Cas. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter deſcribet id ſectionem aliquam Conicam cujus umbilicus inferior congruit cum centro. Id ex Propoſitionibus XI, XII, XIII & earum Corollariis conſtat. Sit ſectio illa Conica *ARPB* & umbilicus inferior *S*. Et primo ſi Figura illa Ellipſis eſt, ſuper hujus axe majore *AB* deſcribatur ſemicirculus *ADB*, & per corpus decidens tranſeat recta *DPC* perpendicularis ad axem; actiſq; *DS*, *PS* erit area *ASD* areæ *ASP* atq; adeo etiam tempori proportionalis. Manente axe *AB* minuatur perpetuo latitudo Ellipſeos, & ſemper manebit area *ASD* tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum, & orbe *APB* jam coincidente cum axe *AB* & umbilico S cum axis termino *B*, deſcendet corpus in recta *AC*, & area *ABD* evadet tempori proportionalis. Dabitur itaq; ſpatium *AC*, quod corpus de loco *A* perpendiculariter cadendo tempore dato deſcribit, ſi modo tempori proportionalis capiatur area *ABD*, & a puncto *D* ad rectam *AB* demittatur perpendicularis *DC*. *Q. E. I.*



Cas.

Caſ. 2. Sin figura ſuperior *RPB* Hyperbola eſt, deſcribatur ad eandem diametrum principalem *AB* Hyperbola rectangula *BD:* & quoniam areæ *C*SP, *CBf*P, SP*fB* ſunt ad areas *C*-S*D*, *CBED*, S*DEB*, ſingulæ ad ſingulas, in data ratione altitudinum *C*P, *CD*; & area SP*fB* proportionalis eſt tempori quo corpus P movebitur per arcum *PB*, erit etiam area S*DEB* eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum Hyperbolæ *RPB* in infinitum manente latere tranſverſo, & coibit arcus P*B* cum recta *CB*, & umbilicus S cum vertice *B* & recta S*D* cum recta *BD*. Proinde area *BDEB* proportionalis erit tempori quo corpus *C* recto deſcenſu deſcribit lineam *CB*. *Q. E. I.*



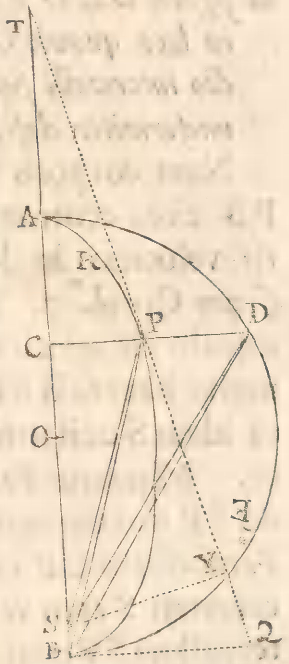
Caſ. 3. Et ſimili argumento ſi figura *RPB* Parabola eſt, & eodem vertice principali *B* deſcribatur alia Parabola B*ED*, quæ ſemper maneat data, interea dum Parabola prior in cujus perimetro corpus P movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus Latere recto, conveniat cum linea *C*B; fiet ſegmentum Parabolicum B*DE*B proportionale tempori quo corpus illud P vel *C* deſcendet ad centrum B. *Q. E. I.*

Prop. XXXIII. Theor. IX.

Poſitis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C *eſt ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* B C *circulum deſcribentis, in dimidiata ratione quam C A, diſtantia corporis a Circuli vel Hyperbolæ vertice ulteriore A, habet ad figuræ ſemidiametrum principalem* ½*A*B.

Nam-

Namq; ob proportionales *CD*, *C*P, linea *A*B communis eſt utriuſq; figuræ *R*PB, *DE*B diameter. Biſecetur eadem in *O*, & agatur recta P*T* quæ tangat figuram *R*PB in P, atq; etiam ſecet communem illam diametrum *A*B (ſi opus eſt productam) in *T*; ſitq; S*T* ad hanc rectam & B*Q* ad hanc diametrum perpendicularis, atq; figuræ *R*PB latus rectum ponatur *L*. Conſtat per Cor. 9. Theor. VIII. quod corporis in linea *R*PB circa centrum S moventis velocitas in loco quovis P ſit ad velocitatem corporis intervallo SP circa idem centrum circulum deſcribentis in dimidiata ratione rectanguli $\frac{1}{2} L \times SP$ ad S*T* quadratum. Eſt autem ex Conicis *AC*B ad *C*P*q*. ut 2 *AO* ad *L*, adeoq; $\frac{2\,CPq.\times AO}{ACB}$ æquale *L*. Ergo velocitates illæ ſunt ad invicem in dimidiata ratione $\frac{CPq.\times AO \times SP}{ACB}$ ad S*T* *quad.* Porro ex Conicis eſt *CO* ad B*O* ut B*O* ad *TO*, & compoſite vel diviſim ut *CB* ad *BT*. Unde dividendo vel componendo fit *BO* − uel + *CO* ad B*O* ut *CT* ad *BT*, id eſt A*C* ad A*O* ut *C*P ad B*Q*; indeq; $\frac{CPq.\times AO \times SP}{ACB}$ æquale eſt $\frac{BQq.\times AC \times SP}{AO \times BC}$. Minuatur jam in infinitum figuræ *R*PB latitudo *C* P, ſic ut punctum P coeat cum puncto *C*, punctumq; S cum puncto B, & linea SP cum linea B*C*, lineaq; *ST* cum linea B*Q*; & corporis jam recta deſcendentis in linea *CB* velocitas fiet ad velocitatem corporis centro *B* intervallo *BC* circulum deſcribentis, in dimidiata ratione ipſius $\frac{BQq.\times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad S*T*q. hoc eſt (neglectis æqualitatis rationibus SP ad *BC* & *BQq*. ad S*Tq*) in dimidiata ratione A*C* ad A*O*. *Q.* E. *D.*

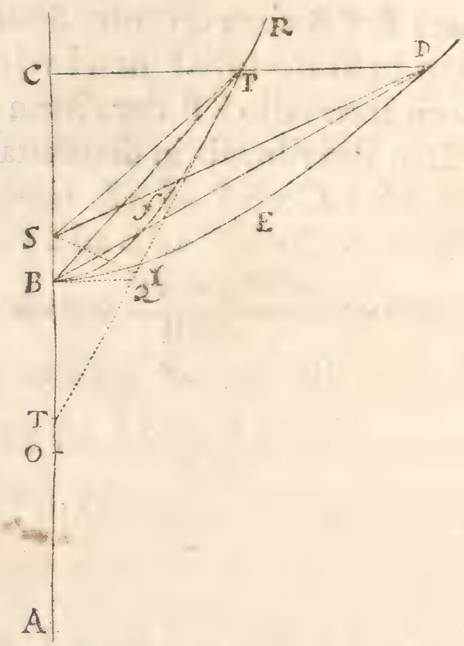


Corol.

Corol. Punctis *B* & S coeuntibus, fit *TC* ad *ST* ut *AC* ad *AO.*

Prop. XXXIV. Theor. X.

Si figura BED Parabola eſt, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C æqualis eſt velocitati qua corpus centro B dimidio intervalli ſui BC circulum uniformiter deſcribere poteſt.



Nam corporis Parabolam *R*P*B* circa centrum S deſcribentis velocitas in loco quovis S (per Corol. 7. Theor. VIII) æqualis eſt velocitati corporis dimidio intervalli SP circulum circa idem S uniformiter deſcribentis. Minuatur Parabolæ latitudo *C*P in infinitum eo, ut arcus Parabolicus *C*P cum recta *CB*, centrum S cum vertice *B*, & interuallum SP cum intervallo *C*P coincidat, & conſtabit Propoſitio. *Q. E. D.*

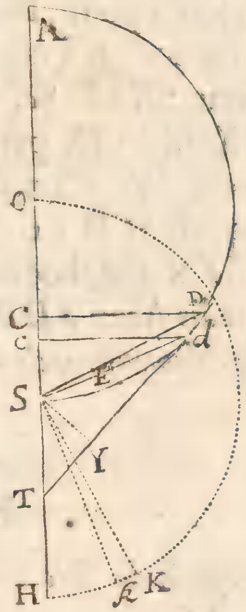
Prop. XXXV. Theor. XI.

Iiſdem poſitis, dico quod area figuræ DES, radio indefinito SD deſcripta, æqualis ſit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ DES æquante, circa centrum S uniformiter gyrando, eodem tempore deſcribere poteſt.

Nam concipe corpus *C* quam minima temporis particula lineolam *Cc* cadendo deſcribere, & interea corpus aliud K, uniformiter in circulo *OKk* circa centrum *S* gyrando, arcum *Kk* deſcribere

bere. Erigantur perpendicula *C D*, *c d* occurrentia figuræ *D E S* in *D*, *d*. Jungantur *S D*, *S K*, *S k* & ducatur *D d* axi A S occurrens in *T*, & ad eam demittatur perpendiculum S*Y*.

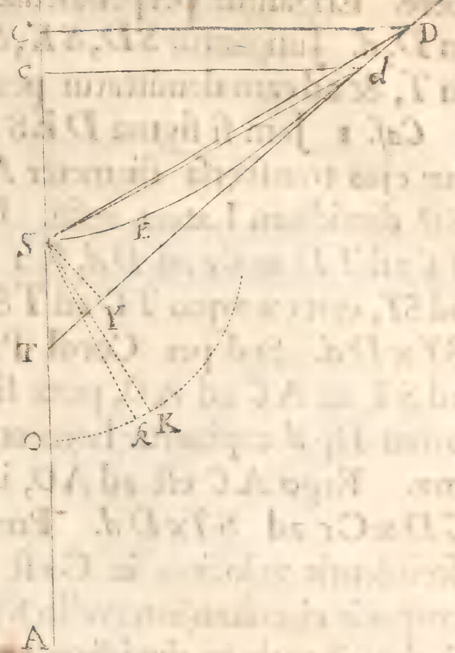
Caſ. 1 Jam ſi figura *D E* S Circulus eſt vel Hyperbola, biſecetur ejus tranſverſa diameter A S in *O*, & erit S *O* dimidium Lateris recti. Et quoniam eſt *T C* ad *T D* ut *C c* ad *D d*, & *T D* ad *T* S ut *CD* ad S*Y*, erit ex æquo *T C* ad *T* S ut *CD* x *C c* ad S*Y* x *D d*. Sed per Corol. Prop. 33. eſt *T C* ad S *T* ut A *C* ad A *O*, puta ſi in coitu punctorum *D*, *d* capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo A *C* eſt ad A *O*, id eſt ad S *K*, ut *C D* x C *c* ad S *Y* x *D d*. Porro corporis deſcendentis velocitas in C eſt ad velocitatem corporis circulum intervallo S C circa centrum S deſcribentis in dimidiata ratione A C ad A*O* vel S *K* (per Theor IX.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis deſcribentis circulum *O K k* in dimidiata ratione S *K* ad S C per Cor. 6. Theor. IV. & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc eſt lineola C *c* ad arcum *K k* in dimidiata ratione A C ad S C, id eſt in ratione A C ad C *D*. Quare eſt C *D* x C *c* æquale A C x *K k*, & propterea A C ad S *K* ut A C x *K k* ad S *Y* x *D d*, indeq; S *K* x *K k* æquale S*Y* x *D d*, & ½ S *K* x *K k* æquale ½ S *Y* x *D d*, id eſt area *K* S *k* æqualis areæ S *D d*. Singulis igitur temporis particulis generantur arearum duarum particulæ *K* S *k*, S *D d*, quæ, ſi magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per Corollarium Lemmatis IV) areæ totæ ſimul genitæ ſunt ſemper æquales. Q. E. D.



Cas. 2. Quod ſi figura *D E* S Parabola ſit, invenietur ut ſupra C D x C *c* eſſe ad S*Y* x *D d* ut *T* C ad S*T*, hoc eſt ut 2 ad 1, adeoq; ¼ C D x C *c* æqualem eſſe ½ S*Y* x D *d*. Sed corporis caden-

tis

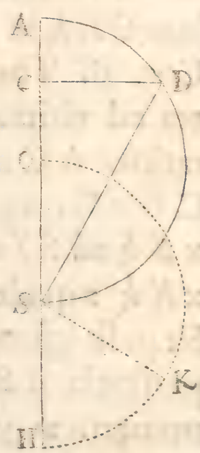
tis velocitas in C æqualis eſt velocitati qua circulus intervallo $\frac{1}{2}SC$ uniformiter deſcribi poſſit. (per Theor. X.) Et hæc velocitas ad velocitatem qua circulus radio SK deſcribi poſſit, hoc eſt, lineola Cc ad arcum Kk eſt in dimidiata ratione SK ad $\frac{1}{2}Sc$, id eſt, in ratione SK ad $\frac{1}{2}CD$, per Corol. 6. Theorem. IV. Quare eſt $\frac{1}{2}SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{4}CD \times Cc$, adeoq; æquale $\frac{1}{2}SY \times Dd$, hoc eſt, area KSk æqualis Areæ SDd, ut ſupra. *Quod erat demonſtrandum.*



Prop. XXXVI. Prob. XXV.

Corporis de loco dato A cadentis determinare tempora deſcenſus.

Super diametro AS (diſtantia corporis a centro ſub initio) deſcribe ſemicirculum ADS, ut & huic æqualem ſemicirculum OKH circa centrum S. De corporis loco quovis C erige ordinatim applicatam CD. Junge SD, & areæ ASD æqualem conſtitue Sectionem OSK. Patet per Theor. XI, quod corpus cadendo deſcribet ſpatium AC eodem tempore quo corpus aliud uniformiter circa centrum S gyrando, deſcribere poteſt arcum OK. *Quod erat faciendum.*

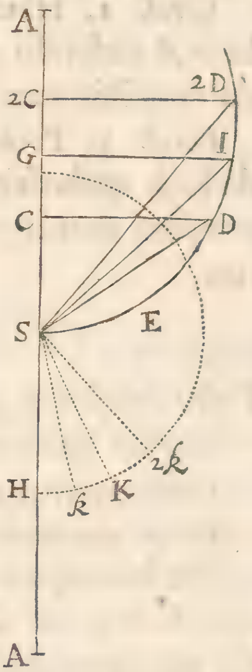


Prop. XXXVII. Prob. XXVI.

Corporis de loco dato ſurſum vel deorſum projecti definire tempora aſcenſus vel deſcenſus.

Ex-

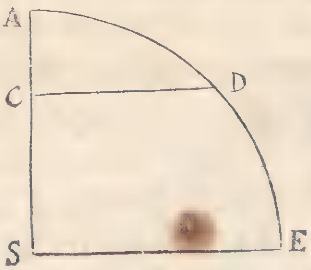
Exeat corpus de loco dato *G* ſecundum lineam *ASG* cum velocitate quacunq;. In duplicata ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo velocitatem,qua corpus ad intervallum datum *SG* circa centrum *S* revolvi poſſet, cape *CA* ad $\frac{1}{2}$ *AS*. Si ratio illa eſt numeri binarii ad unitatem, punctum *A* cadet ad infinitam diſtantiam, quo in caſu Parabola uertice *S*, axe *SC*, latere quovis recto deſcribenda eſt. Patet hoc per Theorema X. Sin ratio illa minor vel major eſt quam 2 ad 1, priore caſu Circulus, poſteriore Hyperbola rectangula ſuper diametro *SA* deſcribi debet. Patet per Theorema IX. Tum centro *S*, intervallo æquante dimidium lateris recti,deſcribatur circulus *HKk*, & ad corporis aſcendentis vel deſcendentis loca duo quævis *G*, *C*, erigantur perpendicula *GI*, *CD* occurrentia Conicæ Sectioni vel circulo in *I* ac *D*.Dein junctis *SI*, *SD*, fiant ſegmentis *SEIS*, *SEDS* Sectores *HSK*, *HSk* æquales, & per Theorema *XI*. corpus *G* deſcribet ſpatium *GC* eodem tempore quo corpus *K* deſcribere poteſt arcum *Kk*. Q. E. F.



Prop. *XXXVIII*. Theor. *XII*.

Poſito quod vis centripeta proportionalis ſit altitudini ſeu diſtantiæ locorum a centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & ſpatia deſcripta ſunt arcubus arcuumq; ſinibus verſis & ſinibus rectis reſpective proportionales.

Cadat corpus de loco quovis *A* ſecundum rectam *AS*; & centro virium *S*, intervallo *AS*, deſcribatur circuli quadrans *AE*, ſitq; *CD* ſinus rectus arcus cujuſ-



vis *AD*, & corpus *A*, tempore *AD*, cadendo deſcribet ſpatium *AC*, inq; loco *C* acquiſierit velocitatem *CD*. Demonſtratur eodem modo ex Propoſitione X. quo Propoſitio *XXXII.* ex Propoſitione *XI.* demonſtrata fuit. Q. E. D.
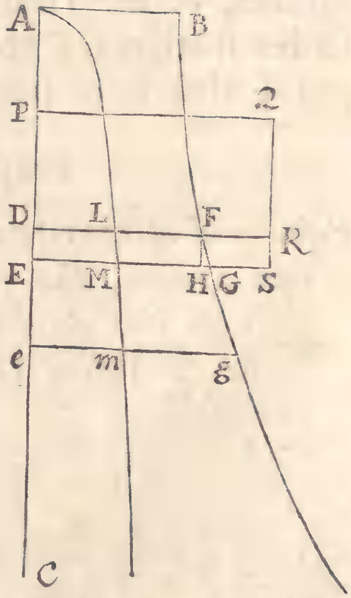
Corol. 1. Hinc æqualia ſunt tempora quibus corpus unum de loco *A* cadendo provenit ad centrum *S*, & corpus aliud revolvendo deſcribit arcum quadrantalem *ADE*.

Corol. 2. Proinde æqualia ſunt tempora omnia quibus corpora de locis quibuſvis ad uſq; centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per Corol. 3. Prop. IV.) æquantur.

Prop. XXXIX. Prob. XXVII.

Poſita cujuſcunq; generis vi centripeta, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis recta aſcendentis vel deſcendentis tum velocitas in locis ſingulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

De loco quovis *A* in recta *ADEC* cadat corpus *E*, deq; loco ejus *E* erigatur ſemper perpendicularis *EG*, vi centripetæ in loco illo ad centrum *C* tendenti proportionalis: Sitq; *BFG* linea curva quam punctum *G* perpetuo tangit. Coincidat autem *EG* ipſo motus initio cum perpendiculari *AB*, & erit corporis velocitas in loco quovis *E* ut areæ curvilineæ *ABGE* latus quadratum. *Q. E. I.* In *EG* capiatur *EM* lateri quadrato areæ *ABGE* reciproce proportionalis, & ſit *ALM* linea curva quam punctum *L* perpetuo tangit, & erit tempus quo corpus cadendo deſcribit lineam *AE* ut area curvilinea *ALME*. *Quod erat Inveniendum.*



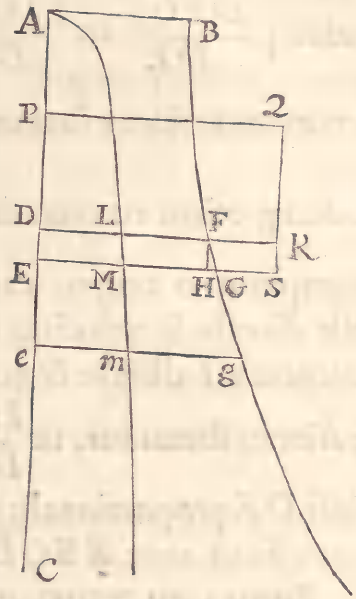
Etenim in recta *AE* capiatur linea quam minima *DE* datæ longitudinis, ſitq; *DLF* locus lineæ *EMG* ubi

ubi corpus verſabatur in D; & ſi ea ſit vis centripeta, ut area $ABGE$ latus quadratum ſit ut deſcendentis velocitas, erit area ipſa in duplicata ratione velocitatis, id eſt, ſi pro velocitatibus in D & E ſcribantur V & $V+I$, erit area $ABFD$ ut V^2, & area $ABGE$ ut $V^2+2VI+I^2$, & diviſim area $DFGE$ ut $2VI+I^2$, adeoq; $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2I \times V+\frac{1}{2}I}{DE}$, id eſt, ſi primæ quantitatum naſcentium rationes ſumantur, longitudo DF ut quantitas $\frac{2I \times V}{DE}$, adeoq; etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Eſt autem tempus quo corpus cadendo deſcribit lineolam DE, ut lineola illa directe & velocitas V inverſe, eſtq; vis ut velocitatis incrementum I directe & tempus inverſe, adeoq; ſi primæ naſcentium rationes ſumantur, ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc eſt, ut longitudo DF. Ergo vis ipſi DF proportionalis facit corpus ea cum velocitate deſcendere quæ ſit ut areæ $ABGE$ latus quadratum Q. E. D.

Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola DE deſcribatur, ſit ut velocitas, adeoq; ut areæ $ABFD$ latus quadratum inverſe; ſitq; DL, atq; adeo area naſcens $DLME$, ut idem latus quadratum inverſe: erit tempus ut area $DLME$, & ſumma omnium temporum ut ſumma omnium arearum, hoc eſt (per Corol. Lem. IV.) tempus totum quo linea AE deſcribitur ut area tota AME. Q. E. D.

Corol. 1. Si P ſit locus de quo corpus cadere debet, ut, urgente aliqua uniformi ui centripeta nota (qualis vulgo ſupponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco D æqualem velocitati quam corpus aliud vi quacunq; cadens acquiſivit eodem loco D, & in perpendiculari DF capiatur DR, quæ ſit ad DF ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco D, & compleatur rectangulum $PDRQ$, eiq; æqualis abſcindatur area $ABID$; erit A locus de quo corpus alterum cecidit. Namq; completo rectangulo

EDRS, cum ſit area *ABFD* ad aream *DFGE* ut *VV* ad 2 *V* x *I*, adeoq; ut $\frac{1}{2}$ *V* ad *I*, id eſt, ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & ſimiliter area *PQRD* ad aream *DRSE* ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; ſintq; incrementa illa (ob æqualitatem temporum naſcentium) ut vires generatrices, id eſt ut ordinatim applicatæ *DF*, *DR*, adeoq; ut areæ naſcentes *DFGE*, *DRSE*; erunt (ex æquo) areæ totæ *ABFD*, *PQRD* ad invicem ut ſemiſſes totarum velocitatum, & propterea (ob æqualitatem velocitatum) æquantur.



Corol. 2. Unde ſi corpus quodlibet de loco quocunq; *D* data cum velocitate vel ſurſum vel deorſum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco *e*, erigendo ordinatam *eg*, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco *D* ut eſt latus quadratum rectanguli *PQRD* area curvilinea *DFge* vel aucti, ſi locus *e* eſt loco *D* inferior, vel diminuti, ſi is ſuperior eſt, ad latus quadratum rectanguli ſolius P*QRD*, id eſt ut $\sqrt{\overline{PQRD + \text{vel} - DFge}}$ ad $\sqrt{PQRD}$.

Corol. 3. Tempus quoq; innoteſcet erigendo ordinatam *em* reciproce proportionalem lateri quadrato ex *PQRD* + vel − *DFge*, & capiendo tempus quo corpus deſcripſit lineam *De* ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a *P* & cadendo pervenit ad *D*, ut area curvilinea *DLme* ad rectangulum 2 *PD* x *DL*. Namq; tempus quo corpus vi uniformi deſcendens deſcripſit lineam *PD* eſt ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineam *PE* in dimidiata ratione *PD* ad *PE*, id eſt (lineola *DE*

jam-

jamjam naſcente) in ratione PD ad $PD + \frac{1}{2}DE$ ſeu $2PD$ ad $2PD + DE$, & diviſim, ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineolam DE ut $2PD$ ad DE, adeoq; ut rectangulum $2PE \times DL$ ad aream $DLME$; eſtq; tempus quo corpus utrumq; deſcripſit lineolam DE ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu deſcripſit lineam De ut area $DLME$ ad aream $DLme$, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLme$.

SECT. VIII.

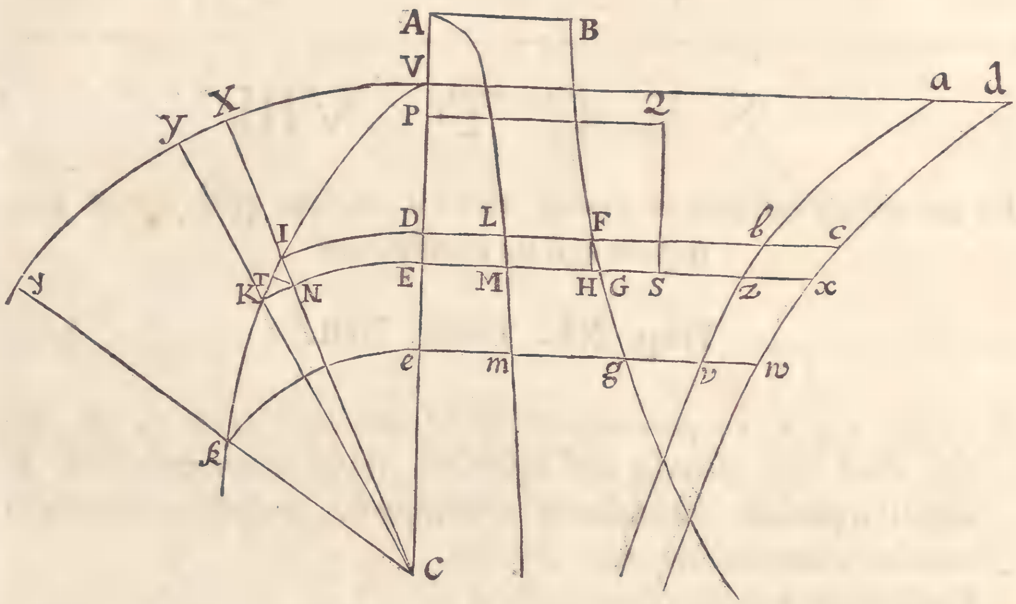
De Inventione Orbium in quibus corpora viribus quibuſcunq; centripetis agitata revolventur.

Prop. XL. Theor. XIII.

Si corpus, cogente vi quacunq; centripeta, moveatur utcunq;, & corpus aliud recta aſcendat vel deſcendat, ſintq; eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum caſu æquales, velocitates eorum in omnibus altitudinibus erunt æquales.

Deſcendat corpus aliquod ab A per D, E, ad centrum C, & moveatur corpus aliud a V in linea curva $VIKk$. Centro C intervallis quibuſvis deſcribantur circuli concentrici DI, EK rectæ AC in D & E, curvæq; VIK in I & K occurrentes. Jungatur IC occurrens ipſi KE in N; & in IK demittatur perpendiculum NT; ſitq; circumferentiarum circulorum intervallum DE vel IN quam minimum, & habeant corpora in D & I velocitates æquales. Quoniam diſtantiæ CD, CI æquantur, erunt vires centripetæ in D & I æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas DE, IN; & ſi vis una IN, per Legum Corol. 2. reſolvatur in duas NT & IT, vis NT, agendo ſecundum lineam

NT corporis curſui *ITK* perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in curſu illo, ſed retrahet ſolummodo corpus a curſu rectilineo, facietq; ipſum de Orbis tangente perpetuo deflectere, inq; via curvilinea *ITKk* progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota conſumetur: vis autem altera *IT*, ſecundum corporis curſum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit ſibi ipſi proportionalem. Proinde corporum in *D* & *I* accelerationes æqualibus temporibus fac-



tæ (ſi ſumantur linearum naſcentium *DE*, *IN*, *IK*, *IT*, *NT* rationes primæ) ſunt ut lineæ *DE*, *IT*: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora ob æqualitatem velocitatum ſunt ut viæ deſcriptæ *DE* & I*K*, adeoq; accelerationes, in curſu corporum per lineas *DE* & *IK*, ſunt ut *DE* & *IT*, *DE* & I*K* conjunctim, id eſt ut *DE quad.* & I*T*x I*K* rectangulum. Sed rectangulum I*T*xI*K* æquale eſt I*N quadrato*, hoc eſt, æquale *DE quadrato*: & propterea accelerationes in tranſitu corporum a *D* & I ad *E* & *K* æquales generantur. Æquales igitur ſunt corporum velocitates in *E* & *K* & eodem argu-

gumento ſemper reperientur æquales in ſubſequentibus æqualibus diſtantiis. Q. E. D. Sed & eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter a centro diſtantia, in aſcenſu ad æquales diſtantias æqualiter retardabuntur. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi corpus vel funipendulum oſcilletur, vel impedimento quovis politiſſimo & perfecte lubrico cogatur in linea curva moveri, & corpus aliud recta aſcendat vel deſcendat, ſintq; velocitates eorum in eadem quacunq; altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuſcunq; æqualibus altitudinibus æquales. Namq; impedimento vaſis abſolute lubrici idem præſtatur quod vi tranſverſa NT. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, ſed tantum cogitur de curſu rectilineo diſcedere.

Corol. 2. Hinc etiam ſi quantitas P ſit maxima a centro diſtantia, ad quam corpus vel oſcillans vel in Trajectoria quacunq; revolvens, deq; quovis trajectoriæ puncto, ea quam ibi habet velocitate ſurſum projectum aſcendere poſſit; ſitq; quantitas A diſtantia corporis a centro in alio quovis Orbis puncto, & vis centripeta ſemper ſit ut ipſius A dignitas quælibet A^{n-1}, cujus Index $n-1$ eſt numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{nP^n - nA^n}$, atq; adeo datur. Namq; velocitas aſcendentis ac deſcendentis (per Prop. XXXIX.) eſt in hac ipſa ratione.

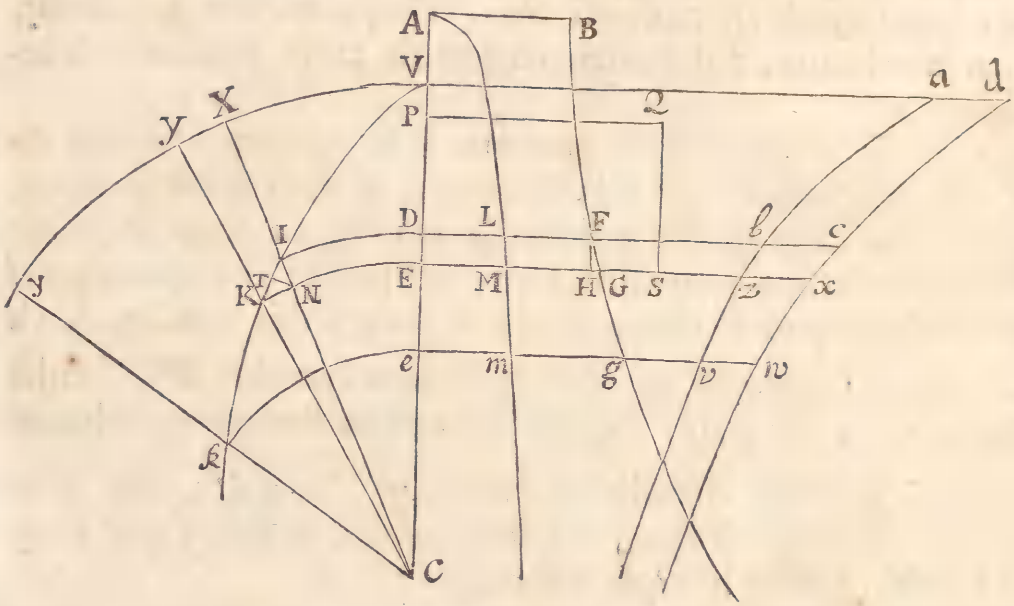
Prop. XLI. Prob. XXVIII.

Poſita cujuſcunq; generis vi centripeta & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum Trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in Trajectoriis inventis.

Tendat vis quælibet ad centrum C & invenienda ſit Trajectoria $VITKk$. Detur circulus VXY centro C intervallo quovis CV deſcriptus, centroq; eodem deſcribantur alii quivis circuli ID,

KE

KE trajectoriam ſecantes in *I* & *K* rectamq; *CV* in *D* & *E*. Age tum rectam *CNIX* ſecantem circulos *KE*, *VY* in *N* & *X*, tum rectam *CKY* occurrentem circulo *VXY* in *Y*. Sint autem puncta *I* & *K* ſibi invicem viciniſſima, & pergat corpus ab *V* per *I*, *T* & *K* ad *k*; ſitq; *A* altitudo illa de qua corpus aliud cadere debet ut in loco *D* velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in *I*; & ſtantibus quæ in Propoſitione XXXIX, quoniam lineola *IK*, dato tempore quam minimo deſcripta, eſt ut velocitas atq; adeo ut latus quadratum areæ *ABFD*, & triangulum *ICK*



tempori proportionale datur, adeoq; *KN* eſt reciproce ut altitudo *IC*, id eſt, ſi detur quantitas aliqua *Q*, & altitudo *IC* nominetur *A*, ut $\frac{Q}{A}$; quam nominemus *Z*. Ponamus eam eſſe magnitudinem ipſius *Q* ut ſit $\sqrt{ABFD}$ in aliquo caſu ad *Z* ut eſt *IK* ad *KN*, & erit ſemper $\sqrt{ABFD}$ ad *Z* ut *IK* ad *KN*, & *ABFD* ad *ZZ* ut *IK quad.* ad *KN quad.* & diviſim $ABFD - ZZ$ ad *ZZ* ut *IN quad.* ad *KN quad.* adeoq; $\sqrt{ABFD - ZZ}$ ad *Z* ut *IN* ad *KN*, & propterea $A \times KN$ æ-

quale

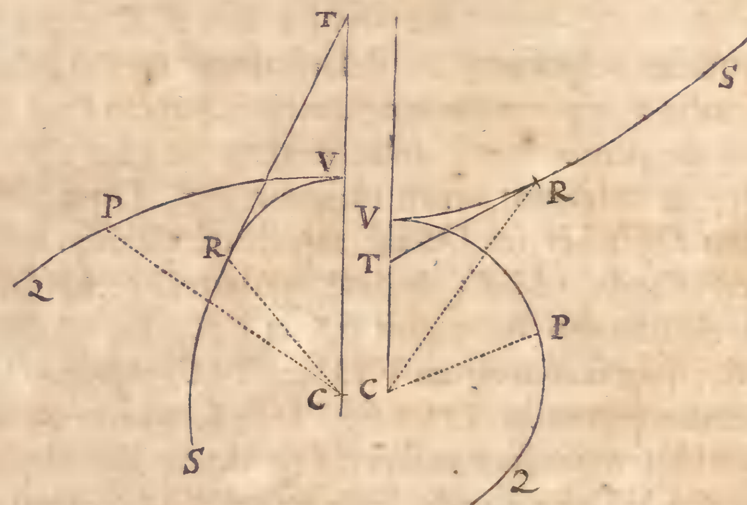
quale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Unde cum $YX \times XC$ ſit ad $A \times KN$ in duplicata ratione YC ad KC, erit rectang. $YX \times XC$ æquale $\frac{Q \times IN \times CX\,quad.}{AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Igitur ſi in perpendiculo DF capiantur ſemper Db, Dc ipſis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX\,quad.}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$ æquales reſpective, & deſcribantur curvæ lineæ ab, cd quas puncta b, c perpetuo tangunt; deq; puncto V ad lineam AC erigatur perpendiculum Vad abſcindens areas curvilineas $VDba$, $VDdc$, & erigantur etiam ordinatæ Ez, Ex: quoniam rectangulum $Db \times IN$ ſeu $DbzE$ æquale eſt dimidio rectanguli $A \times KN$, ſeu triangulo ICK; & rectangulum $Dc \times IN$ ſeu $DcxE$ æquale eſt dimidio rectanguli YX in CX, ſeu triangulo XCY; hoc eſt, quoniam arearum $VDba$, VIC æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ $DbzE$, ICK, & arearum $VDcd$, VCX æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ $DExc$, XCY, erit area genita $VDba$ æqualis areæ genitæ VIC, adeoq; tempori proportionalis, & area genita $VDdc$ æqualis Sectori genito VCX. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus diſceſſit de loco V, dabitur area ipſi proportionalis $VDba$, & inde dabitur corporis altitudo CD vel CI; & area $VDcd$, eiq; æqualis Sector VCX una cum ejus angulo VCI. Datis autem angulo VCI & altitudine CI datur locus I, in quo corpus completo illo tempore reperietur. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc maximæ minimæq; corporum altitudines, id eſt Apſides Trajectoriarum expedite inveniri poſſunt. Incidunt enim Apſides in puncta illa in quibus recta IC per centrum ducta incidit perpendiculariter in Trajectoriam VIK: id quod fit ubi rectæ IK & NK æquantur, adeoq; ubi area $ABFD$ æqualis eſt ZZ.

Corol. 2. Sed & angulus KIN, in quo Trajectoria alibi ſecat lineam illam IC, ex data corporis altitudine IC expedite invenitur;

nimirum capiendo ſinum ejus ad radium ut *KN* ad I*K*, id eſt ut Z ad latus quadratum areæ *ABFD*.

Corol. 3. Si centro *C* & vertice principali V deſcribatur ſectio quælibet Conica V*RS*, & a quovis ejus puncto *R* agatur Tangens *RT* occurrens axi infinite producto *C*V in puncto *T*; dein juncta *CR* ducatur recta *CP*, quæ æqualis ſit abſciſſæ *CT*, angulumq; V*CP* Sectori V*CR* proportionalem conſtituat; tendat autem ad centrum *C* vis centripeta cubo diſtantiæ locorum a centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco V juſta cum velocitate ſecundum lineam rectæ *C*V perpendicularem: progredietur corpus illud in Trajectoria quam punctum *P* perpetuo tangit; adeoq; ſi conica ſectio *C*-V*RS* Hyperbola ſit, deſcendet idem ad centrum: Sin ea Ellipſis ſit, aſcendet illud perpetuo & abibit in infinitum. Et contra, ſi corpus quacunq; cum velocitate exeat de loco V, & perinde ut incæperit vel oblique deſcendere ad centrum, vel ab eo oblique aſcendere, figura *CVRS* vel Hyperbola ſit vel Ellipſis, inveniri poteſt Trajectoria augendo vel minuendo angulum *VCP* in data aliqua ratione. Sed et vi centripeta in centrifugam verſa, aſcendet corpus oblique in Trajectoria *VPQ* quæ invenitur capiendo angulum *VCP* Sectori Elliptico *CVRC* proportionalem, & longitudinem *CP* longitudini *CT* æqualem: ut ſupra. Conſequuntur hæc omnia ex Pro-



Propoſitione præcedente, per Curvæ cujuſdam quadraturam, cujus inventionem ut ſatis facilem brevitatis gratia miſſam facio.

Prop. XLII. Prob. XXIX.

Data lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato data cum velocitate ſecundum datam rectam egreſſi.

Stantibus quæ in tribus Propoſitionibus præcedentibus: exeat corpus de loco *I* ſecundum lineolam *IT*, ea cum velocitate quam corpus aliud, vi aliqua uniformi centripeta, de loco *P* cadendo acquirere poſſet in *D*: ſitq; hæc vis uniformis ad vim qua corpus primum urgetur in *I*, ut *DR* ad *DF*. Pergat autem corpus verſus *k*; centroq; *C* & intervallo *Ck* deſcribatur circulus *ke* occurrens rectæ *PD* in *e*, & erigantur curvarum *ALMm*, *BFGg*, *abzv* *dcxw* ordinatim applicatæ *em*, *eg*, *ev*, *ew*. Ex dato rectangulo *PDRQ*, dataq; lege vis centripetæ qua corpus primum agitatur, dantur curvæ lineæ *BFGg*, *ALMm*, per conſtructionem Problematis XXVII. & ejus *Corol.* 1. Deinde ex dato angulo *CIT* datur proportio naſcentium *IK*, *KN*, & inde, per conſtructionem Prob. XXVIII, datur quantitas *Q*, una cum curvis lineis *abzv*, *dcxw*: adeoq; completo tempore quovis *Dbve*, datur tum corporis altitudo *Ce* vel *Ck*, tum area *Dcwe*, eiq; æqualis Sector *XCy*, anguluſq; *XCy* & locus *k* in quo corpus tunc verſabitur. Q. E. I.

Supponimus autem in his Propoſitionibus vim centripetam in receſſu quidem a centro variari ſecundum legem quamcunq; quam quis imaginari poteſt, in æqualibus autem a centro diſtantiis eſſe undiq; eandem. Atq; hactenus corporum in Orbibus immobilibus conſideravimus. Supereſt ut de motu eorum in Orbibus qui circa centrum virium revolvuntur adjiciamus pauca.

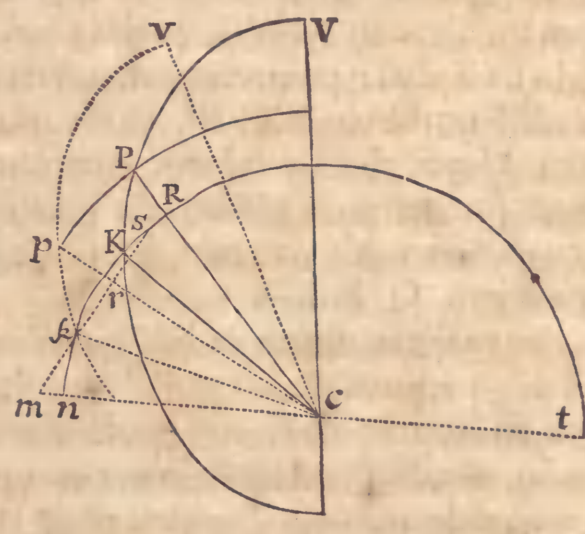
SECT. IX.

De Motu Corporum in Orbibus mobilibus, deq; motu Apſidum.

Prop. XLIII. Prob. XXX.

Efficiendum eſt ut corpus in Trajectoria quacunq; circa centrum virium revolvente perinde moveri poſſit, atq; corpus alind in eadem Trajectoria quieſcente.

In Orbe *VPK* poſitione dato revolvatur corpus *P* pergendo a *V* verſus *K*. A centro *C* agatur ſemper *Cp*, quæ ſit ipſi *CP* æqualis, angulumq; *VCp* angulo *VCP* proportionalem conſtituat ;& area quam linea *Cp* deſcribit erit ad aream *VCP* quam linea *C*P deſcribit, ut velocitas lineæ deſcribentis *Cp* ad velocitatem lineæ deſcribentis *CP*; hoc eſt, ut angulus *VCp* ad angulum V*CP*, adeoq; in data ratione, & propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis ſit quam linea *Cp* in plano immobili deſcribit, manifeſtum eſt quod corpus, cogente juſtæ quantitatis vi centripeta, revolvi poſſit una cum puncto *p* in curva illa linea quam punctum idem *p* ratione jam expoſita deſcribit in plano immobili. Fiat angulus V*Cv* angulo *PCp*, & linea *Cv* lineæ



neæ *CV*, atq; figura *vCp* figuræ V *CP* æqualis, & corpus in *p* ſemper exiſtens movebitur in perimetro figuræ revolventis *vCp*, eodemq; tempore deſcribet arcum ejus *vp* quo corpus aliud *P* arcum ipſi ſimilem & æqualem V*P* in figura quieſcente V*PK* deſcribere poteſt. Quæratur igitur, per Corollarium Propoſitionis VI, vis centripeta qua corpus revolvi poſſit in curva illa linea quam punctum *p* deſcribit in plano immobili, & ſolvetur Problema. Q. E. F.

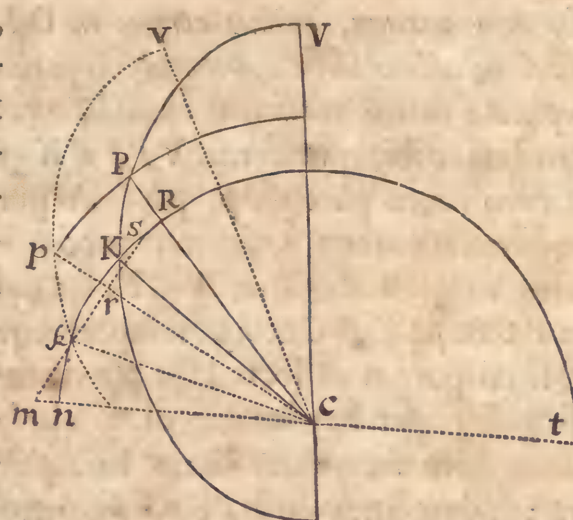
Prop. XLIV. Theor. XIV.

Differentia virium, quibus corpus in Orbe quieſcente, & corpus aliud in eodem Orbe revolvente æqualiter moveri poſſunt, eſt in triplicata ratione communis altitudinis inverſe.

Partibus orbis quieſcentis V*P*, *PK* ſunto ſimiles & æquales orbis revolventis partes *vp*, *pk*. A puncto *k* in rectam *pC* demitte perpendiculum *kr*, idemq; produc ad *m*, ut ſit *mr* ad *kr* ut angulus V*Cp* ad angulum V*CP*. Quoniam corporum altitudines *PC* & *pC*, *KC* & *kC* ſemper æquantur, manifeſtum eſt quod ſi corporum in locis *P* & *p* exiſtentium diſtinguantur motus ſinguli (per Legum Corol. 2.) in binos, (quorum hi verſus centrum, ſive ſecundum lineas P*C*, *pC*; alteri prioribus tranſverſi ſecundum lineas ipſis *PC*, *pC* perpendiculares determinantur) motus verſus centrum erunt æquales, & motus tranſverſus corporis *p* erit ad motum tranſverſum corporis *P*, ut motus angularis lineæ *pC* ad motum angularem lineæ *PC*, id eſt ut angulus V*Cp* ad angulum V*CP*. Igitur eodem tempore quo corpus *P* motu ſuo utroq; pervenit ad punctum *K*, corpus *p* æquali in centrum motu æqualiter movebitur a *P* verſus *C*, adeoq; completo illo tempore reperietur alicubi in linea *mkr*, quæ per punctum *k* in lineam *pC* perpendicularis eſt; & motu tranſverſo acquiret diſtantiam a linea *pC*, quæ ſit ad diſtantiam quam corpus alterum acquirit a linea *PC*, ut eſt hujus motus tranſverſus ad motum

tranſ-

tranſverſum alterius. Quare cum kr æqualis ſit diſtantiæ quam corpus alterum acquirit a linea pC, ſitq; mr ad kr ut angulus VCp ad angulum VCP, hoc eſt, ut motus tranſverſus corporis p ad motum tranſverſum corporis P, manifeſtum eſt quod corpus p completo illo tempore reperietur in loco m. Hæc ita ſe habebunt ubi corpora P & p æqualiter ſecundum lineas pC & PC moventur, adeoq; æqualibus viribus ſecundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus pCn ad angulum pCk ut eſt angulus VCp ad angulum VCP, ſitq; nC æqualis kC, & corpus p completo illo tempore revera reperietur in n; adeoq; vi majore urgetur, ſi modo angulus mCp angulo kCp major eſt, id eſt ſi orbis Vpk movetur in conſequentia, & minore, ſi orbis regreditur; eſtq; virium differentia ut locorum intervallum mn, per quod corpus illud p ipſius actione, dato illo temporis ſpatio transferri debet. Centro C intervallo Cn vel Ck deſcribi intelligetur circulus ſecans lineas mr, mn productas in s & t, & erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, adeoq; mn æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. Cum autem triangula pCk, pCn dentur magnitudine, ſunt kr & mr, earumq; differentia mk & ſumma ms reciproce ut altitudo pC, adeoq; rectangulum $mk \times ms$ eſt reciproce ut quadratum altitudinis pC. Eſt & mt directe ut $\frac{1}{2} mt$, id eſt ut altitudo pC. Hæ ſunt primæ rationes linearum naſcentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id



eſt

eſt lineola naſcens *mn*, eiq; proportionalis virium differentia reciproce ut cubus altitudinis *pC*. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc differentia virium in locis *P* & *p* vel *K* & *k* eſt ad vim qua corpus motu circulari revolvi poſſet ab *r* ad *k*, eodem tempore quo corpus *P* in orbe immobili deſcribit arcum *PK*, ut *mk* x *ms* ad *rk* quadratum; hoc eſt ſi capiantur datæ quantitates *F*, *G* in ea ratione ad invicem quam habet angulus *VCP* ad angulum *VCp*, ut *Gq.* − *Fq.* ad *Fq.* Et propterea, ſi centro *C* intervallo quovis *CP* vel *Cp* deſcribatur Sector circularis æqualis areæ toti *VPC*, quam corpus P tempore quovis in orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto deſcripſit, differentia virium, quibus corpus *P* in orbe immobili & corpus *p* in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam qua corpus aliquod radio ad centrum ducto Sectorem illum, eodem tempore quo deſcripta ſit area *VPC*, uniformiter deſcribere potuiſſet, ut *Gq.* − *Fq.* ad *Fq.* Namq; ſector ille & area *pCk* ſunt ad invicem ut tempora quibus deſcribuntur.

Corol. 2. Si orbis *VPK* Ellipſis ſit umbilicum habens *C* & Apſidem ſummam *V*; eiq; ſimilis & æqualis ponatur Ellipſis *vpk*, ita ut ſit ſemper *pc* æqualis *PC*, & angulus *VCp* ſit ad angulum *VCP* in data ratione *G* ad *F*; pro altitudine autem *PC* vel *pc* ſcribatur *A*, & pro Ellipſeos latere recto ponatur 2*R*: erit vis qua corpus in Ellipſi mobili revolvi poteſt, ut $\frac{Fq.}{Aq.} + \frac{RGq. - RFq.}{A\,cub.}$ & contra. Exponatur enim vis qua corpus revolvatur in immota Ellipſi per quantitatem $\frac{Fq.}{Aq.}$, & vis in *V* erit $\frac{Fq.}{CV\,quad.}$. Vis autem qua corpus in circulo ad diſtantiam *CV* ea cum velocitate revolvi poſſet quam corpus in Ellipſi revolvens habet in *V*, eſt ad vim qua corpus in Ellipſi revolvens urgetur in Apſide *V*, ut dimidium lateris recti Ellipſeos ad circuli ſemidiametrum *CV*, adeoq; valet $\frac{RFq.}{CV\,cub.}$: & vis quæ ſit ad hanc ut *Gq.* − *Fq.*

ad

ad $Fq.$, valet $\frac{RGq.-RFq.}{CV\,cub.}$: eſtq; hæc vis (per hujus Corol. 1.) differentia virium quibus corpus *P* in Ellipſi immota *VPK*, & corpus *p* in Ellipſi mobili *vpk* revolvuntur. Unde cum (per hanc Prop.) differentia illa in alia quavis altitudine *A* ſit ad ſeipſam in altitudine *CV* ut $\frac{1}{A\,cub.}$ ad $\frac{1}{CV\,cub.}$, eadem differentia in omne altitudine *A* valebit $\frac{RGq.-RFq.}{A\,cub.}$. Igitur ad vim $\frac{Fq.}{Aq.}$ qua corpus revolvi poteſt in Ellipſi immobili *VPK*, addatur exceſſus $\frac{RGq.-RFq.}{A\,cub.}$ & componetur vis tota $\frac{Fq.}{Aq.}+\frac{RGq.-RFq.}{A\,cub.}$ qua corpus in Ellipſi mobili *vpk* iiſdem temporibus revolvi poſſit.

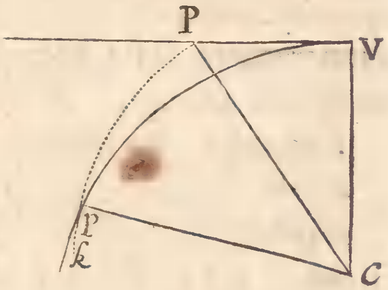
Corol. 3. Ad eundem modum colligetur quod, ſi orbis immobilis *VPK* Ellipſis ſit centrum habens in virium centro *C*; eiq; ſimilis, æqualis & concentrica ponatur Ellipſis mobilis *vpk*, ſitq; 2 *R* Ellipſeos hujus latus rectum, & 2 *T* latus tranſverſum, atq; angulus *VCp* ſemper ſit ad angulum *VCP* ut *G* ad *F*; vires quibus corpora in Ellipſi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi poſſunt, erunt ut $\frac{Fq.A}{T\,cub.}$ & $\frac{Fq.A}{T\,cub.}+\frac{RGq.-RFq.}{A\,cub.}$ reſpective.

Corol. 4. Et univerſaliter, ſi corporis altitudo maxima *CV* nominetur *T*, & radius curvaturæ quam Orbis *VPK* habet in *V*, id eſt radius circuli æqualiter curvi, nominetur *R*, & vis centripeta qua corpus in Trajectoria quacunq; immobili *VPK* revolvi poteſt, in loco *V* dicatur $\frac{Fq.}{Tq.}V$, atq; aliis in locis *P* indefinite dicatur *X*, altitudine *CP* nominata *A*, & capiatur *G* ad *F* in data ratione anguli *VCp* ad angulum *VCP*: erit vis centripeta qua corpus idem eoſdem motus in eadem Trajectoria *vpk* circulariter

riter mota temporibus iiſdem peragere poteſt, ut ſumma virium $X + \frac{VRGq. - VRFq.}{A\,cub.}$

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in Orbe quocunq; immobili, augeri vel minui poteſt ejus motus angularis circa centrum virium in ratione data, & inde inveniri novi orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

Corol. 6. Igitur ſi ad rectam *CV* poſitione datam erigatur perpendiculum *VP* longitudinis indeterminatæ, jungaturq; *PC*, & ipſi æqualis agatur *Cp*, conſtituens angulum *VCp*, qui ſit ad angulum *VCP* in data ratione; vis qua corpus gyrari poteſt in Curva illa *Vpk* quam punctum *p* perpetuo tangit, erit reciproce ut cubus altitudinis C*p*. Nam corpus *P*, per vim inertiæ, nulla alia vi urgente, uniformiter progredi poteſt in recta *VP*. Addatur vis in centrum C, cubo altitudinis C*P* vel C*p* reciproce proportionalis, & (per jam demonſtrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam *Vpk*. Eſt autem hæc Curva *Vpk* eadem cum Curva illa *VPQ* in Corol. 3. Prop. XLI inventa, in qua ibi diximus corpora hujusmodi viribus attracta oblique aſcendere.



Prop. XLV. Prob. XXXI.

Orbium qui ſunt Circulis maxime finitimi requiruntur motus Apſidum.

Problema ſolvitur Arithmetice faciendo ut orbis, quem corpus in Ellipſi mobili, ut in Propoſitionis ſuperioris Corol. 2. vel 3. revolvens, deſcribit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus Apſides requiruntur, & quærendo Apſides orbis quem corpus illud in plano immobili deſcribit. Orbes autem eandem acquirent formam, ſi vires centripetæ quibus deſcribuntur, inter ſe

collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum V Apſis ſumma, & ſcribantur T pro altitudine maxima CV, A pro altitudine quavis alia CP vel Cp, & X pro altitudinum differentia CV − CP; & vis qua corpus in Ellipſi circa umbilicum ejus C (ut in Corollario 2.) revolvente movetur, quæq; in Corollario 2. erat ut $\frac{Fq.}{Aq.} + \frac{RGq. - RFq.}{A\,cub.}$ id eſt ut $\frac{Fq.A + RGq. - RFq.}{A\,cub.}$, ſubſtituendo $T - X$ pro A, erit ut $\frac{RGq. - RFq. + TFq. - Fq.X}{A\,cub.}$. Reducenda ſimiliter eſt vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator ſit A *cub.*, & numeratores, facta homologorum terminorum collatione, ſtatuendi ſunt analogi. Res Exemplis patebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem eſſe, adeoq; ut $\frac{A\,cub.}{A\,cub.}$, ſive (ſcribendo $T - X$ pro A in Numeratore) ut $\frac{T\,cub. - 3Tq.X + 3TXq. - X\,cub.}{A\,cub.}$; & collatis Numeratorum terminis correſpondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet $RGq. - RFq. + TFq.$ ad T *cub.* ut $-Fq.X$ ad $-3Tq.X + 3TXq. - X\,cub.$ ſive ut $-Fq.$ ad $-3Tq. + 3TX - Xq.$ Jam cum Orbis ponatur circulo quam maxime finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob factas R, T æquales, atq; X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt $RGq.$ ad T *cub.* ut $-Fq.$ ad $-3Tq.$ ſeu $Gq.$ ad $Tq.$ ut $Fq.$ ad $3Tq.$ & viciſſim G *quadrat.* ad F *quadrat.* ut T *quad.* ad 3 T *quad.* id eſt, ut 1 ad 3; adeoq; G ad F, hoc eſt angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\surd 3$. Ergo cum corpus in Ellipſi immobili, ab Apſide ſumma ad Apſidem imam deſcendendo conficiat angulum VCP (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in Ellipſi mobili, atq; adeo in orbe immobili de quo agimus, ab Abſide ſumma ad Apſidem imam deſcendendo conficiet angulum VCp graduum $\frac{180}{\surd 3}$: id

adeo

adeo ob ſimilitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta deſcribit, & orbis illius quem corpus in Ellipſi revolvente gyros peragens deſcribit in plano quieſcente. Per ſuperiorem terminorum collationem ſimiles redduntur hi orbes, non univerſaliter, ſed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in orbe propemodum circulari revolvens, inter Apſidem ſummam & Apſidem imam conficiet ſemper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, ſeu 103 *gr.* 55 *m.* ad centrum; perveniens ab Apſide ſumma ad Apſidem imam, ubi ſemel confecit hunc angulum, & inde ad Apſidem ſummam rediens, ubi iterum confecit eundem angulum, & ſic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam eſſe ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} ſeu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n ſignificant dignitatum indices quoſcunq; integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n ſeu $\overline{T-X}^n$ in ſeriem indeterminatam per Methodum noſtram Serierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2} Xq.T^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis Numeratoris alterius $RGq. - RFq. + TFq. - Fq.X$, fit $RGq. - RFq. + TFq.$ ad T^n ut $-Fq.$ ad $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2} XT^{n-2}$ &c. Et ſumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit $RGq.$ ad T^n ut $-Fq.$ ad $-nT^{n-1}$, ſeu $Gq.$ ad T^{n-1} ut $Fq.$ ad nT^{n-1}, & viciſſim $Gq.$ ad $Fq.$ ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id eſt ut 1 ad n; adeoq; G ad F, id eſt angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus VCP, in deſcenſu cor-

poris ab Apſide ſumma ad Apſidem imam in Ellipſi confectus, ſit graduum 180, conficietur angulus *VCp*, in deſcenſu corporis ab Apſide ſumma ad Apſidem imam in Orbe propemodum circulari, quem corpus quodvis vi centripeta dignitati A^{n-3} proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito corpus redibit ab Apſide ima ad apſidem ſummam, & ſic deinceps in infinitum. Ut ſi vis centripeta ſit ut diſtantia corporis a centro, id eſt ut *A* ſeu $\frac{A^4}{A^3}$, erit *n* æqualis 4 & $\sqrt{4}$ æqualis 2; adeoq; angulus inter Apſidem ſummam & Apſidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ *gr.* ſeu *90gr.* Completa igitur quarta parte revolutionis unius corpus perveniet ad Apſidem imam, & completa alia quarta parte ad Apſidem ſummam, & ſic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex Propoſitione X. manifeſtum eſt. Nam corpus urgente hac vi centripeta revolvetur in Ellipſi immobili, cujus centrum eſt in centro virium. Quod ſi vis centripeta ſit reciproce ut diſtantia, id eſt directe ut $\frac{1}{A}$ ſeu $\frac{A^2}{A^3}$, erit $n = 2$, adeoq; inter Apſidem ſummam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ ſeu 127 *gr.* 17 *min.* & propterea corpus tali vi revolvens, perpetua anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab Apſide ſumma ad imam & ab ima ad ſummam perveniet in æternum. Porro ſi vis centripeta ſit reciproce ut Latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis Altitudinis, id eſt reciproce ut $A^{\frac{11}{4}}$, adeoq; directe ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ ſeu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ erit *n* æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ *gr.* æqualis 360 *gr.* & propterea corpus de Apſide ſumma diſcedens & ſubinde perpetuo deſcendens, perveniet ad Apſidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo aſcenſu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad Apſidem ſummam: & ſic per vices in æternum.

Ex-

Exempl. 3. Aſſumentes m & n pro quibuſvis indicibus dignitatum Altitudinis, & b, c pro numeris quibuſvis datis, ponamus vim centripetam eſſe ut $\frac{bA^m + cA^n}{A\,cub.}$, id eſt ut $\frac{b \text{ in } \overline{T-X}^m + c \text{ in } \overline{T-X}^n}{A\,cub.}$ ſeu (per eandem Methodum noſtram Serierum convergentium) ut

$$\frac{bT^m - mbXT^{m-1} + \frac{mm-m}{2}bX^2T^{m-2} + cT^n - ncXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}cX^2T^{n-2}\ \&c.}{A\ Cub.}$$

& collatis numeratorum terminis, fiet $RGq. - RFq. + TFq.$ ad $bT^m + cT^n$, ut $-Fq.$ ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}XT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ &c. Et ſumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit $Gq.$ ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut $Fq.$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & viciſſim $Gq.$ ad $Fq.$ ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam CV ſeu T Arithmetice per unitatem, fit $Gq.$ ad $Fq.$ ut $b+c$ ad $mb+nc$, adeoq; ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde eſt G ad F, id eſt angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum angulus VCP inter Apſidem ſummam & Apſidem imam in Ellipſi immobili ſit 180 *gr.* erit angulus VCp inter eaſdem Apſides, in Orbe quem corpus vi centripeta quantitati $\frac{bA^m + cA^n}{A\,cub.}$ proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et eodem argumento ſi vis centripeta ſit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A\,cub.}$, angulus inter Apſides invenietur $180\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$ graduum. Nec ſecus reſolvetur Problema in caſibus

ſibus difficilioribus. Quantitas cui vis centripeta proportionalis eſt, reſolvi ſemper debet in ſeries convergentes denominatorem habentes *A cub.* Dein pars data Numeratoris hujus $RGq. - RFq. + TFq. - Fq. X$ ad partem non datam in eadem ratione ponendæ ſunt: Et quantitates ſuperfluas delendo, ſcribendoq; unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta ſit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri poteſt dignitas illa ex motu Apſidum; & contra. Nimirum ſi motus totus angularis, quo corpus redit ad Apſidem eandem, ſit ad motum angularem revolutionis unius, ſeu graduum 360, ut numerus aliquis m ad numerum alium n, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$, cujus Index eſt $\frac{nn}{mm} - 3$. Id quod per Exempla ſecunda manifeſtum eſt. Unde liquet vim illam in majore quam triplicata altitudinis ratione decreſcere non poſſe: Corpus tali vi revolvens deq; Apſide diſcedens, ſi cæperit deſcendere, nunquam perveniet ad Apſidem imam ſeu altitudinem minimam, ſed deſcendet uſq; ad centrum, deſcribens curvam illam lineam de qua egimus in Corol. 3. Prop. XLI. Sin cæperit illud de Apſide diſcedens vel minimum aſcendere, aſcendet in infinitum, neq; unquam perveniet ad Apſidem ſummam. Deſcribet enim curvam illam lineam de qua actum eſt in eodem Corol. & in Corol. 6. Prop. XLIV. Sic & ubi vis in receſſu a centro decreſcit in majori quam triplicata ratione altitudinis, corpus de Apſide diſcedens, perinde ut cæperit deſcendere vel aſcendere, vel deſcendet ad centrum uſq; vel aſcendet in infinitum. At ſi vis in receſſu a centro vel decreſcat in minori quam triplicata ratione altitudinis, vel creſcat in altitudinis ratione quacunq; Corpus nunquam deſcendet ad centrum uſq; ſed ad Apſidem imam aliquando perveniet: & contra, ſi corpus de Apſide ad Apſidem alternis vicibus deſcendens & aſcendens nunquam appellat ad centrum, Vis in receſſu a centro aut augebitur, aut in

mino-

minore quam triplicata altitudinis ratione decreſcet: & quo citius corpus de Apſide ad Apſidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut ſi corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de Apſide ſumma ad Apſidem ſummam alterno deſcenſu & aſcenſu redierit, hoc eſt, ſi fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, adeoq; $\frac{nn}{mm} - 3$ ualeat $\frac{1}{64} - 3$ vel $\frac{1}{16} - 3$ vel $\frac{1}{4} - 3$ vel $\frac{4}{9} - 3$, erit vis ut $A^{\frac{1}{64} - 3}$ vel $A^{\frac{1}{16} - 3}$ vel $A^{\frac{1}{4} - 3}$ vel $A^{\frac{4}{9} - 3}$, id eſt reciproce ut $A^{3 - \frac{1}{64}}$ vel $A^{3 - \frac{1}{16}}$ vel $A^{3 - \frac{1}{4}}$ vel $A^{3 - \frac{4}{9}}$. Si corpus ſingulis revolutionibus redierit ad Apſidem eandem immotam, erit m ad n ut 1 ad 1, adeoq; $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ æqualis A^{-2} ſeu $\frac{1}{A^2}$, & propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in præcedentibus demonſtratum eſt. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel una tertia, vel una quarta, ad Apſidem eandem redierit, erit m ad n ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, adeoq; $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9} - 3}$ vel $A^{\frac{9}{4} - 3}$ vel $A^{9 - 3}$ vel $A^{16 - 3}$, & propterea Vis aut reciproce ut $A^{\frac{11}{9}}$ vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut directe ut A^6 vel A^{13}. Deniq; ſi Corpus pergendo ab Apſide ſumma ad Apſidem ſummam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, adeoq; Apſis illa ſingulis corporis revolutionibus confecerit in Conſequentia gradus tres, erit m ad n ut 363 *gr.* ad 360 *gr.* adeoq; $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ erit æquale $A^{-\frac{265707}{131769}}$, & propterea Vis centripeta reciproce ut $A^{\frac{265707}{131769}}$ ſeu $A^{2\frac{4}{243}}$. Decreſcit igitur Vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicata, ſed quæ vicibus $60\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam ſi corpus, vi centripeta quæ ſit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in Ellipſi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognoſci poteſt (per Exempla

ter-

tertia) motus Apſidum qui ex vi illa extranea orietur: & contra. Ut ſi vis qua corpus revolvitur in Ellipſi ſit ut $\frac{1}{A^2}$, & vis extranea ablata ut cA, adeoq; vis reliqua ut $\frac{A - cA^4}{A^3}$; erit (in Exemplis tertiis) A æqualis 1 & n æqualis 4, adeoq; angulus revolutionis inter Apſides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Ponatur vim illam extraneam eſſe $357{,}45$ vicibus minorem quam vis altera qua corpus revolvitur in Ellipſi, id eſt c eſſe $\frac{100}{35745}$, & $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$ ſeu $180{,}7602$, id eſt 180*gr.* 45*m.* 37*ſ.* Igitur corpus de Apſide ſumma diſcedens, motu angulari 180*gr.* 45*m.* 37*ſ.* perveniet ad Apſidem imam, & hoc motu duplicato ad Apſidem ſummam redibit: adeoq; Apſis ſumma ſingulis revolutionibus progrediendo conficiet 1*gr.* 31*m.* 14*ſ.*

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum virium tranſeunt. Supereſt ut motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam Scriptores qui motum gravium tractant, conſiderare ſolent aſcenſus & deſcenſus ponderum, tam obliquos in planis quibuſcunq; datis, quam perpendiculares: & pari jure motus corporum viribus quibuſcunq; centra petentium, & planis excentricis innitentium hic conſiderandus venit. Plana autem ſupponimus eſſe politiſſima & abſolute lubrica ne corpora retardent. Quinimo in his demonſtrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quaſq; tangunt incumbendo, uſurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & orbitas movendo deſcribunt. Et eadem lege motus corporum in ſuperficiebus curvis peractos ſubinde determinamus.

SEC.

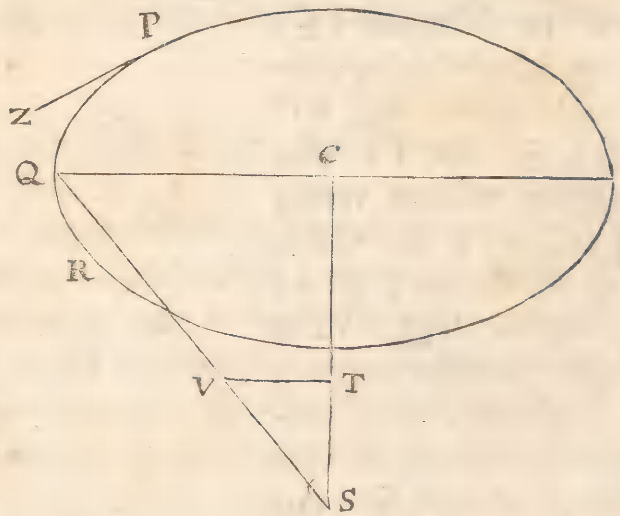
SECT. X.

De Motu Corporum in Superficiebus datis, deq; Funipendulorum Motu reciproco.

Prop. XLVI. Prob. XXXII.

Poſita cujuſcunq; generis vi centripeta, datoq; tum virium centro tum plano quocunq; in quo corpus revolvitur, & conceſſis Figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato data cum velocitate ſecundum Rectam in Plano illo datam egreſſi.

Sit S centrum virium, *SC* diſtantia minima centri hujus a plano dato, *P* corpus de loco *P* ſecundum rectam *PZ* egrediens, *Q* corpus idem in Trajectoria ſua revolvens, & *PQR* Trajectoria illa in plano dato deſcripta, quam invenire oportet. Jungantur *CQ* *QS*, & ſi in *QS* capiatur *SV* proportionalis vi centripetæ qua corpus trahitur verſus centrum *S*, & agatur *VT* quæ ſit parallela *CQ* & occurrat *SC* in *T*: Vis *SV* reſolvetur (per Legum Corol. 2.) in vires *ST*, *TV*; quarum *ST* trahendo corpus ſecundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera *TV*, agendo ſecundum poſitionem plani, trahit corpus directe verſus punctum *C* in plano

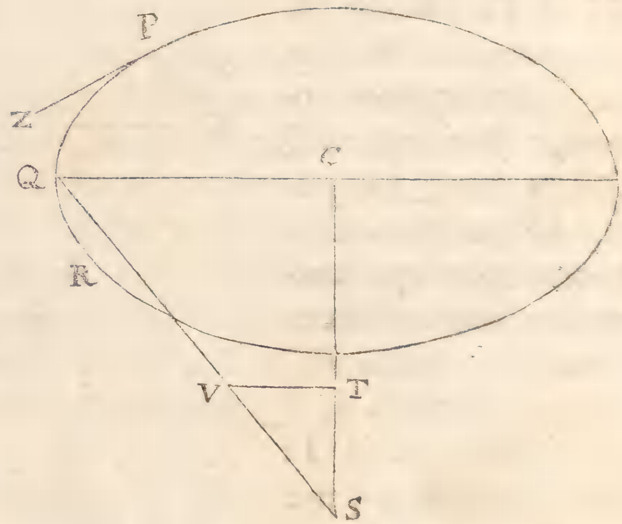


datum, adeoq; facit illud in hoc plano perinde moveri ac ſi vis *ST* tolleretur, & corpus vi ſola *TV* revolveretur circa centrum *C* in ſpatio libero. Data autem vi centripeta *TV* qua corpus *Q* in ſpatio libero circa centrum datum *C* revolvitur, datur per Prop. XLII. tum Trajectoria *PQR* quam corpus deſcribit, tum locus *Q* in quo corpus ad datum quodvis tempus verſabitur, tum deniq; velocitas corporis in loco illo *Q*; & contra. Q. E. I.

Prop. XLVII. Theor. XV.

Poſito quod vis centripeta proportionalis ſit diſtantiæ corporis a centro; corpora omnia in planis quibuſcunq; revolventia deſcribent Ellipſes, & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæq; moventur in lineis rectis ultro citroq; diſcurrendo, ſingulas eundi & redeundi periodos iiſdem temporibus abſolvent.

Nam ſtantibus quæ in ſuperiore Propoſitione; vis *SV* qua corpus *Q* in plano quovis *PQR* revolvens trahitur verſus centrum *S* eſt ut diſtantia *SQ*; atq; adeo ob proportionales S*V* & *SQ*, T*V* & *CQ*, vis T*V* qua corpus trahitur verſus punctum *C* in Orbis plano datum, eſt ut diſtantia *CQ*. Vires igitur, quibus corpora in plano *PQR* verſantia trahuntur verſus punctum *C*, ſunt pro ratione diſtantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaq; trahuntur verſus centrum *S*; & propterea corpora movebuntur iiſdem temporibus in iiſdem figuris in plano



quo-

quovis *PQR* circa punctum *C*, atq; in ſpatiis liberis circa centrum *S*, adeoq; (per Corol. 2. Prop. X. & Corol. 2. Prop. XXXVIII.)temporibus ſemper æqualibus, vel deſcribent Ellipſes in plano illo circa centrum *C*, vel periodos movendi ultro citroq; in lineis rectis per centrum *C* in plano illo ductis, complebunt. Q. E. D.

Scholium.

His affines ſunt aſcenſus ac deſcenſus corporum in ſuperficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano deſcribi, dein circa axes quoſvis datos per centrum virium tranſeuntes revolvi, & ea revolutione ſuperficies curvas deſcribere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his ſuperficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa oblique aſcendendo & deſcendendo currant ultro citroq; peragentur eorum motus in planis per axem tranſeuntibus, atq; adeo in lineis curvis quarum revolutione curvæ illæ ſuperficies genitæ ſunt. Iſtis igitur in caſibus ſufficit motum in his lineis curvis conſiderare.

Prop. XLVIII. Theor. XVI.

Si rota globo extrinſecus ad angulos rectos inſiſtat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum ſinum verſum arcus dimidii qui globum ex eo tempore inter eundem tetigit, ut ſumma diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.

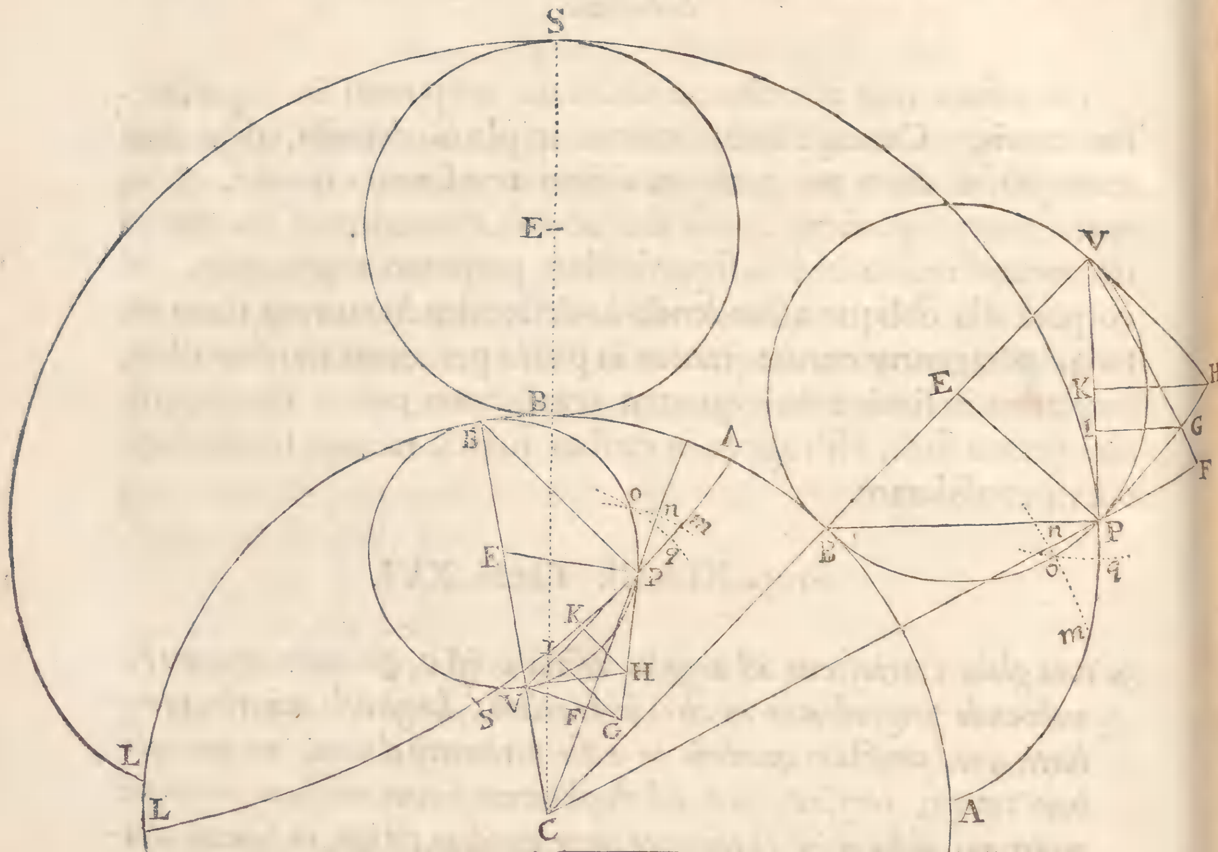
Prop. XLIX. Theor. XVII.

Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinſecus inſiſtat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei

 quod

quod punctum quodvis in Rotæ Perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum ſinum verſum arcus dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.

Sit *ABL* globus, *C* centrum ejus, *BPV* rota ei inſiſtens, *E* centrum rotæ, *B* punctum contactus, & *P* punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc Rotam pergere in circulo maximo



ABL ab *A* per *B* verſus *L*, & inter eundum ita revolvi ut arcus *AB*, *PB* ſibi invicem ſemper æquentur, atq; punctum illud *P* in Perimetro rotæ datum interea deſcribere viam curvilineam *AP*. Sit autem *AP* via tota curvilinea deſcripta ex quo Rota globum tetigit in *A*, & erit viæ hujus longitudo *AP* ad duplum ſinum verſum arcus ½ *PB*, ut 2 *CE* ad *CB*. Nam recta *CE* (ſi opus

opus eſt producta) occurrat Rotæ in *V*, junganturq; *CP*, *BP*, *EP*, *VP*, & in *CP* productam demittatur Normalis *VF*. Tangant *PH*, *VH* circulum in *P* & *V* concurrentes in *H*, ſecetq; *PH* ipſam *VF* in *G*, & ad *VP* demittantur Normales *GI*, *HK*. Centro item *C* & intervallo quovis deſcribatur circulus *nom* ſecans rectam *CP* in *n*, Rotæ perimetrum *Bp* in *o* & viam curvilineam *AP* in *m*, centroq; *V* & intervallo *Vo* deſcribatur circulus ſecans *VP* productam in *q*.

Quoniam Rota eundo ſemper revolvitur circa punctum contactus *B*, manifeſtum eſt quod recta *BP* perpendicularis eſt ad lineam illam curvam *AP*, quam Rotæ punctum *P* deſcribit, atq; adeo quod recta V *P* tanget hanc curvam in puncto *P*. Circuli *nom* radius ſenſim auctus æquetur tandem diſtantiæ *CP*, & ob ſimilitudinem figuræ evaneſcentis *Pnomq* & figuræ *PFGVI*, ratio ultima lineolarum evaneſcentium *Pm*, *Pn*, *Po*, *Pq*, id eſt ratio incrementorum momentaneorum curvæ *AP*, rectæ *CP* & arcus circularis *BP*, ac decrementi rectæ V *P*, eadem erit quæ linearum *P* V, *PF*, *PG*, *PI* reſpective. Cum autem V *F* ad *CF* & *VH* ad *CV* perpendiculares ſunt, anguliq; *HVG*, *VCF* propterea æquales ; & angulus *VHP*, (ob angulos quadrilateri *HVEP* ad V & *P* rectos,) complet angulum V *EP* ad duos rectos, adeoq; angulo *CEP* æqualis eſt; ſimilia erunt triangula V *HG*, *CEP* ; & inde fiet ut *EP* ad *CE* ita *HG* ad *H*V ſeu *HP*, & ita *KI* ad *KP*, & diviſim ut *CB* ad *CE* ita *PI* ad *PK*, & duplicatis conſequentibus ut *CB* ad 2 *CE* ita *PI* ad *PV*. Eſt igitur decrementum lineæ *VP*, id eſt incrementum lineæ *BV*−*VP*, ad incrementum lineæ curvæ *AP* in data ratione *CB* ad 2 *CE*, & propterea (per Corol. Lem. IV.) longitudines *BV*−*VP* & *AP* incrementis illis genitæ ſunt in eadem ratione. Sed exiſtente *BV* radio, eſt *VP* coſinus anguli *VPB* ſeu ½ *BEP*, adeoq; *BV*−*VP* ſinus verſus ejuſdem anguli, & propterea in hac Rota cujus radius eſt ½ *B*V, erit *B*V − V *P* duplus ſinus verſus arcus ½ *BP*. Ergo *AP* eſt ad duplum ſinum verſum arcus ½ *BP* ut 2 *CE* ad *CB*. Q. E. D.

Li-

Lineam autem *AP* in Propoſitione priore Cycloidem extra Globum, alteram in poſteriore Cycloidem intra Globum diſtinctionis gratia nominabimus

Corol. 1. Hinc ſi deſcribatur Cyclois integra *ASL* & biſecetur ea in *S*, erit longitudo partis *PS* ad longitudinem *VP* (quæ duplus eſt ſinus anguli *VBP*, exiſtente *EB* radio) ut 2 *CE* ad *CB*, atq; adeo in ratione data.

Corol. 2. Et longitudo ſemiperimetri Cycloidis *AS* æquabitur lineæ rectæ, quæ eſt ad Rotæ diametrum *BV* ut 2 *CE* ad *CB*.

Corol. 3. Ideoq; longitudo illa eſt ut rectangulum *BEC*, ſi modo Globi detur ſemidiameter.

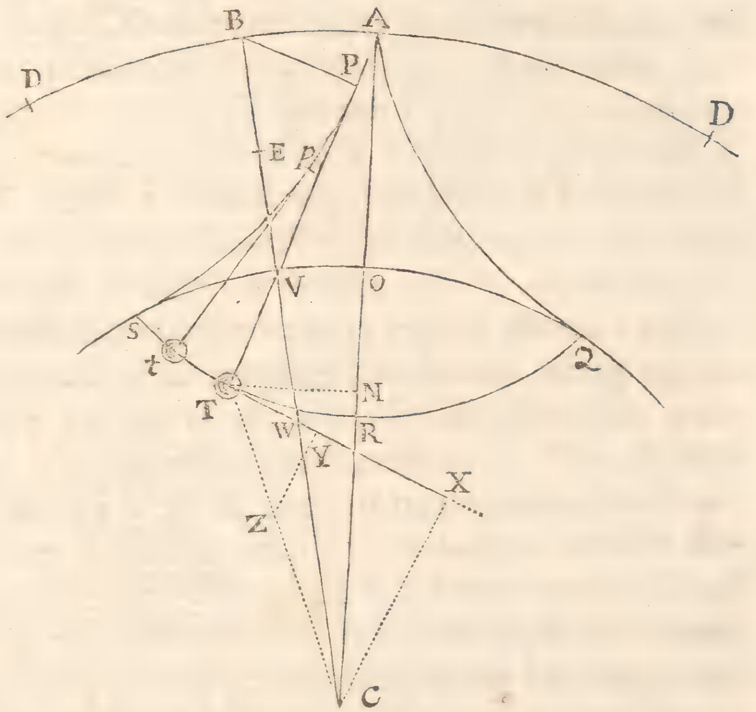
Prop. L. Prob. XXXIII.

Facere ut Corpus pendulum oſcilletur in Cycloide data.

Intra Globum *QVS* centro *C* deſcriptum detur Cyclois *QRS* biſecta in *R* & punctis ſuis extremis *Q* & *S* ſuperficiei Globi hinc inde occurrens. Agatur *CR* biſecans arcum *QS* in *O*, & producatur ea ad *A*, ut ſit *CA* ad *CO* ut *CO* ad *CR*. Centro *C* intervallo *CA* deſcribatur Globus exterior *ABD*, & intra hunc globum Rota, cujus diameter ſit *AO*, deſcribantur duæ ſemicycloides *AQ*, *AS*, quæ globum interiorem tangant in *Q* & *S* & globo exteriori occurrant in *A*. A puncto illo *A*, filo *APT* longitudinem *AR* æquante, pendeat corpus *T*, & ita intra ſemicycloides *AQ*, *AS* oſcilletur, ut quoties pendulum digreditur a perpendiculo *AR*, filum parte ſui ſuperiore *AP* applicetur ad ſemicycloidem illam *APS*, verſus quam peragitur motus, & circum eam ceu obſtaculum flectatur, parteq; reliqua *PT* cui ſemicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus *T* oſcillabitur in Cycloide data *QRS*. Q. E. F.

Occurrat enim filum *PT* tum Cycloidi *QRS* in *T*, tum circulo *QOS* in V, agaturq; *C*V occurrens circulo *ABD* in *B*; & ad fili partem rectam *PT*, e punctis extremis *P* ac T, erigantur per-

perpendicula PB, TW, occurrentia rectæ CV in B & W. Patet enim ex geneſi Cycloidis, quod perpendicula illa PB, TW abſcindent de CV longitudines VB, VW rotarum diametris OA, OR æquales, atq; adeo quod punctum B incidet in circulum ABD. Eſt igitur TP ad VP (duplum ſinum anguli VBP exiſtente $\frac{1}{2}$ BV radio) ut BW ad BV, ſeu $AO+OR$ ad AO, id eſt (cum ſint CA ad CO, CO ad CR & diviſim AO ad OR proportionales,) ut $CA+CO$ ſeu 2CE ad CA. Proinde per Corol. 1. Prop. XLIX. longitudo PT æquatur Cycloidis arcui PS, & filum totum APT æquatur Cycloidis arcui dimidio APS, hoc eſt (per Corollar. 2. Prop. XLIX longitudini AR. Et propterea viciſſim ſi filum manet ſemper æquale longitudini AR movebitur punctum T in Cycloide QRS. Q. E. D.



Corol. Filum AR æquatur Cycloidis arcui dimidio APS.

Prop. LI. Theor. XVIII.

Si vis centripeta tendens undiq; ad Globi centrum C ſit in locis ſingulis ut diſtantia loci cujuſq; a centro, & hac ſola vi agente Corpus T oſcil-

oſcilletur (modo jam deſcripto) in perimetro Cycloidis QRS: dico quod oſcillationum utcunq; inæqualium æqualia erunt Tempora

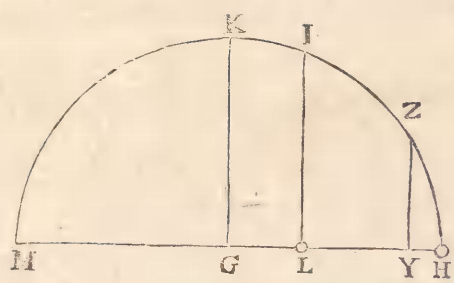
Nam in Cycloidis tangentem *TW* infinite productam cadat perpendiculum *CX* & jungatur *CT*. Quoniam vis centripeta qua corpus *T* impellitur verſus *C* eſt ut diſtantia *CT*, (per Legum Corol. 2.) reſolvitur in partes *CX*, *TX*, quarum *CX* impellendo corpus directe a *P* diſtendit filum *PT* & per cujus reſiſtentiam tota ceſſat, nullum alium edens effectum; pars autem altera *TX* urgendo corpus tranſverſim ſeu verſus X, directe accelerat motum ejus in Cycloide; manifeſtum eſt quod corporis acceleratio huic vi acceleratrici proportionalis ſit ſingulis momentis ut longitudo *TX*, id eſt, ob datas *CV*, *WV* iiſq; proportionales *TX*, *TW*, ut longitudo *TW*, hoc eſt (per Corol. 1. Prop. XLIX.) ut longitudo arcus Cycloidis *TR*. Pendulis igitur duabus *APT*, *Apt* de perpendiculo *AR* inæqualiter deductis & ſimul dimiſſis, accelerationes eorum ſemper erunt ut arcus deſcribendi *TR*, *tR*. Sunt autem partes ſub initio deſcriptæ ut accelerationes, hoc eſt ut totæ ſub initio deſcribendæ, & propterea partes quæ manent deſcribendæ & accelerationes ſubſequentes his partibus proportionales ſunt etiam ut totæ; & ſic deinceps. Sunt igitur accelerationes atq; adeo velocitates genitæ & partes his velocitatibus deſcriptæ parteſq; deſcribendæ, ſemper ut totæ; & propterea partes deſcribendæ datam ſervantes rationem ad invicem ſimul evaneſcent, id eſt corpora duo oſcillantia ſimul pervenient ad perpendiculum *AR*. Cumq; viciſſim aſcenſus perpendiculorum de loco infimo *R*, per eoſdem arcus Trochoidales motu retrogrado facti, retardentur in locis ſingulis a viribus iiſdem a quibus deſcenſus accelerabantur, patet velocitates aſcenſuum ac deſcenſuum per eoſdem arcus factorum æquales eſſe, atq; adeo temporibus æqualibus fieri; & propterea cum Cycloidis partes duæ *RS* & *RQ* ad utrumq; perpendiculi latus jacentes ſint ſimiles & æquales, pendula duo oſcillationes ſuas tam totas quam dimidias iiſdem temporibus ſemper peragent. Q. E. D.

Prop.

Prop. LII. Prob. XXXIV.

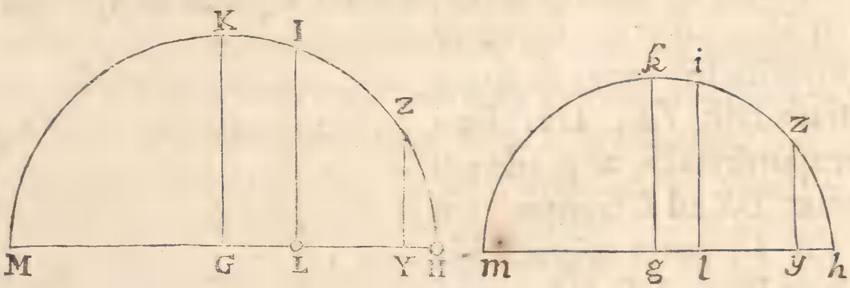
Definire & velocitates Pendulorum in locis ſingulis, & Tempora quibus tum oſcillationes totæ, tum ſingulæ oſcillationum partes peraguntur.

Centro quovis *G*, intervallo *GH* Cycloidis arcum *RS* æquante, deſcribe ſemicirculum *HKMG* ſemidiametro *GK* biſectum. Et ſi vis centripeta diſtantiis locorum a centro proportionalis tendat ad centrum *G*, ſitq; ea in perimetro *HIK* æqualis vi centripetæ in perimetro globi *QOS* (*Vide Fig. Prop.* L. & LI.) ad ipſius centrum tendente; & eodem tempore quo pendulum *T* dimittitur e loco ſupremo *S*, cadat corpus aliquod *L* ab *H* ad *G*: quoniam vires quibus corpora urgentur ſunt æquales ſub initio & ſpatiis deſcribendis *TR*, *GL* ſemper proportionales, atq; adeo, ſi æquantur *TR* ad *LG*, æquales in locis *T* & *L*; patet corpora illa deſcribere ſpatia *ST*, *HL* æqualia ſub initio, adeoq; ſubinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia ſpatia deſcribere. Quare, per Prop. XXXVIII., tempus quo corpus deſcribit arcum *ST* eſt ad tempus oſcillationis unius, ut arcus *HI* (tempus quo corpus *H* perveniet ad *L*) ad ſemicirculum *HKM* (tempus quo corpus *H* perveniet ad *M*.) Et velocitas corporis penduli in loco *T* eſt ad velocitatem ipſius in loco infimo *R*, (hoc eſt velocitas corporis *H* in loco *L* ad velocitatem ejus in loco *G*, ſeu incrementum momentaneum lineæ *HL* ad incrementum momentaneum lineæ *HG*, arcubus *HI*, *HK* æquabili fluxu creſcentibus) ut ordinatim applicata *LI* ad radium *GK*, ſive ut $\sqrt{SRq. - TRq.}$ ad *SR*. Unde cum in Oſcillationibus inæqualibus deſcribantur æqualibus temporibus arcus totis Oſcillationum arcubus proportionales, habentur ex datis tem-



temporibus & velocitates & arcus deſcripti in Oſcillationibus univerſis. Quæ erant primo invenienda.

Oſcillentur jam funipendula duo corpora in Cycloidibus inæqualibus & earum ſemiarcubus æquales capiantur rectæ *GH*, *gh*, centriſq; *G*, *g* & intervallis *GH*, *gh* deſcribantur ſemicirculi *HZKM*, *hzkm*. In eorum diametris *HM*, *hm* capiantur lineolæ æquales *HY*, *hy*, & erigantur normaliter *YZ*, *yz* circumferentiis occurrentes in *Z* & *z*. Quoniam corpora pendula ſub initio motus verſantur in circumferentia globi *QOS*, adeoq; a viribus æqualibus urgentur in centrum, incipiuntq; directe verſus centrum moveri, ſpatia ſimul confecta æqualia erunt ſub initio. Urgeantur igitur corpora *H*, *h* a viribus iiſdem in *H* & *h*, ſintq;



HY, *hy* ſpatia æqualia ipſo motus initio deſcripta, & arcus *HZ*, *hz* denotabunt æqualia tempora. Horum arcuum naſcentium ratio prima duplicata eſt eadem quæ rectangulorum *GHY*, *ghy*, id eſt, eadem quæ linearum *GH*, *gh*; adeoq; arcus capti in dimidiata ratione ſemidiametrorum denotant æqualia tempora. Eſt ergo tempus totum in circulo *HKM*, Oſcillationi in una Cycloide reſpondens, ad tempus totum in circulo *hkm* Oſcillationi in altera Cycloide reſpondens, ut ſemiperiferia *HKM* ad medium proportionale inter hanc ſemiperiferiam & ſemiperiferiam circuli alterius *hkm*, id eſt in dimidiata ratione diametri *HM* ad diametrum *hm*, hoc eſt in dimidiata ratione perimetri Cycloidis primæ ad perimetrum Cycloidis alterius, adeoq; tempus illud in Cyclo-

cloide quavis eſt (per Corol. 3. Prop. XLIX.) ut latus quadratum rectanguli *BEC* contenti ſub ſemidiametro Rotæ, qua Cyclois deſcripta fuit, & differentia inter ſemidiametrum illam & ſemidiametrum globi. Q. E. I. Eſt & idem tempus (per Corol. Prop. L.) in dimidiata ratione longitudinis fili *AR*. Q. E. I.

Porro ſi in globis concentricis deſcribantur ſimiles Cycloides: quoniam earum perimetri ſunt ut ſemidiametri globorum & vires in analogis perimetrorum locis ſunt ut diſtantiæ locorum a communi globorum centro, hoc eſt ut globorum ſemidiametri, atq; adeo ut Cycloidum perimetri & perimetrorum partes ſimiles, æqualia erunt tempora quibus perimetrorum partes ſimiles Oſcillationibus ſimilibus deſcribuntur, & propterea Oſcillationes omnes erunt Iſochronæ. Cum igitur Oſcillationum tempora in Globo dato ſint in dimidiata ratione longitudinis *AR*, atq; adeo (ob datam *AC*)in dimidiata ratione numeri $\frac{AR}{AC}$, id eſt in ratione integra numeri $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$; & hic numerus $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$ ſervata ratione *AR* ad *AC* (ut fit in Cycloidibus ſimilibus) idem ſemper maneat, & propterea in globis diverſis, ubi Cycloides ſunt ſimiles, ſit ut tempus: manifeſtum eſt quod Oſcillationum tempora in alio quovis globo dato, atq; adeo in globis omnibus concentricis ſunt ut numerus $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$, id eſt, in ratione compoſita ex dimidiata ratione longitudinis fili *AR* directe & dimidiata ratione ſemidiametri globi *AC* inverſe. Q. E. I.

Deniq; ſi vires abſolutæ diverſorum globorum ponantur inæquales, accelerationes temporibus æqualibus factæ, erunt ut vires. Unde ſi tempora capiantur in dimidiata ratione virium inverſe, velocitates erunt in eadem dimidiata ratione directe, & propterea ſpatia erunt æqualia quæ his temporibus deſcribuntur. Ergo Oſcillationes in globis & Cycloidibus omnibus, quibuſcunq; cum viribus abſolutis factæ, ſunt in ratione quæ componitur ex dimi-

midiata ratione longitudinis Penduli directe, & dimidiata ratione diſtantiæ inter centrum Penduli & centrum globi inverſe, & dimidiata ratione vis abſolutæ etiam inverſe, id eſt, ſi vis illa dicatur V, in ratione numeri $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc etiam Oſcillantium, cadentium & revolventium corporum tempora poſſunt inter ſe conferri. Nam ſi Rotæ, qua Cyclois intra globum deſcribitur, diameter conſtituatur æqualis ſemidiametro globi, Cyclois evadet linea recta per centrum globi tranſiens, & Oſcillatio jam erit deſcenſus & ſubſequens aſcenſus in hac recta. Unde datur tum tempus deſcenſus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad diſtantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem deſcribit. Eſt enim hoc tempus (per Caſum ſecundum) ad tempus ſemioſcillationis in Trochoide quavis APS ut $\frac{1}{2}BC$ ad $\sqrt{BEC}$.

Corol. 2. Hinc etiam conſectantur quæ *D. C. Wrennus* & *D. C. Hugenius* de Cycloide vulgari adinvenerunt. Nam ſi globi diameter augeatur in infinitum, mutabitur ejus ſuperficies Sphærica in planum, viſq; centripeta aget uniformiter ſecundum lineas huic plano perpendiculares, & Cyclois noſtra abibit in Cycloidem vulgi. Iſto autem in caſu, longitudo arcus Cycloidis, inter planum illud & punctum deſcribens, æqualis evadet quadruplicato ſinui verſo dimidii arcus Rotæ inter idem planum & punctum deſcribens; ut invenit *D. C. Wrennus*: Et pendulum inter duas ejuſmodi Cycloides in ſimili & æquali Cycloide temporibus æqualibus Oſcillabitur, ut demonſtravit *Hugenius*. Sed & deſcenſus gravium, tempore Oſcillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

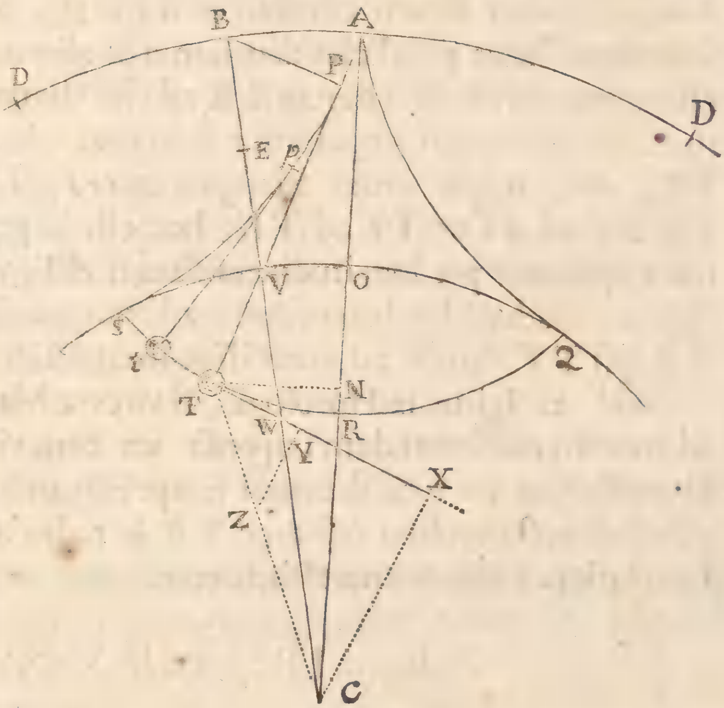
Aptantur autem Propoſitiones a nobis demonſtratæ ad veram conſtitutionem Terræ, quatenus Rotæ eundo in ejus circulis maximis deſcribunt motu clavorum Cycloides extra globum; & Pendula inferius in fodinis & cavernis Terræ ſuſpenſa, in Cycloidibus

intra

intra globos Oſcillari debent, ut Oſcillationes omnes evadant Iſochronæ. Nam gravitas (ut in Libro tertio docebitur) decreſcit in progreſſu a ſuperficie Terræ, ſurſum quidem in duplicata ratione diſtantiarum a centro ejus, deorſum vero in ratione ſimplici.

Prop. LIII. Prob. XXXV.

Conceſſis figurarum curvilinearum Quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis Oſcillationes ſemper Iſochronas peragent.



Oſcilletur corpus *T* in curva quavis linea *STRQ*, cujus axis ſit *OR* tranſiens per virium centrum *C*. Agatur *TX* quæ curvam illam in corporis loco quovis *T* contingat, inq; hac Tangente *TX* capiatur *TY* æqualis arcui *TR*. Nam longitudo arcus illius ex figurarum Quadraturis per Methodos vulgares innoteſcit. De puncto *Y* educatur recta *YZ* Tangenti perpendicularis. Agatur *CT* perpendiculari illi occurrens in *Z*, & erit vis centripeta proportionalis rectæ *TZ*. Q. E. I.

Nam ſi vis, qua corpus trahitur de *T* verſus *C*, exponatur per rectam *TZ* captam ipſi proportionalem, reſolvetur hæc in vires

TY,

TY, *YZ*; quarum *YZ* trahendo corpus ſecundum longitudinem fili *PT*, motum ejus nil mutat, vis autem altera T*Y* motum ejus in curva *STRQ* directe accelerat vel directe retardat. Proinde cum hæc ſit ut via deſcribenda *TR*, accelerationes corporis vel retardationes in Oſcillationum duarum (majoris & minoris) partibus proportionalibus deſcribendis, erunt ſemper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ ſimul deſcribantur. Corpora autem quæ partes totis ſemper proportionales ſimul deſcribunt, ſimul deſcribent totas. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi corpus *T* filo rectilineo *AT* a centro *A* pendens, deſcribat arcum circularem *STRQ*, & interea urgeatur ſecundum lineas parallelas deorſum a vi aliqua, quæ ſit ad vim uniformem gravitatis, ut arcus *TR* ad ejus ſinum *TN*: æqualia erunt Oſcillationum ſingularum tempora. Etenim ob parallelas *TZ*, *AR*, ſimilia erunt triangula *ANT*, *TYZ*; & propterea *TZ* erit ad *AT* ut T*Y* ad T*N*; hoc eſt, ſi gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam *A*T, vis T*Z*, qua Oſcillationes evadent Iſochronæ, erit ad vim gravitatis *A*T, ut arcus T*R* ipſi T*Y* æqualis ad arcus illius ſinum T*N*.

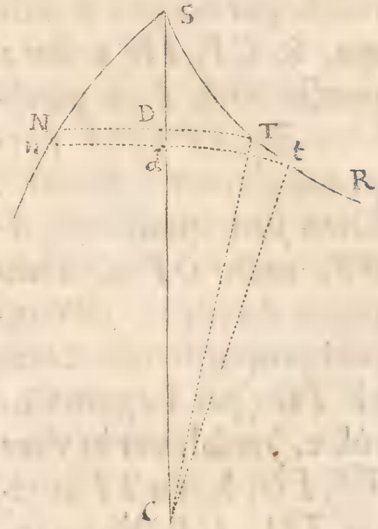
Corol. 2. Igitur in Horologiis, ſi vires a Machina in Pendulum ad motum conſervandum impreſſæ ita cum vi gravitatis componi poſſint, ut vis tota deorſum ſemper ſit ut linea quæ oritur applicando rectangulum ſub arcu T*R* & radio *AR*, ad ſinum T*N*, Oſcillationes omnes erunt Iſochronæ.

Prop. LIV. Prob. XXXVI.

Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora quibus corpora vi qualibet centripeta in lineis quibuſcunq; curvis in plano per centrum virium tranſeunte deſcriptis, deſcendent & aſcendent.

Deſcendat enim corpus de loco quovis *S* per lineam quamvis curvam *S*T*tR* in plano per virium centrum *C* tranſeunte datam. Jungatur *CS* & dividatur eadem in partes innumeras æquales, ſit-

ſitq; *D d* partium illarum aliqua. Centro *C*, intervallis *C D*, *C d* deſcribantur circuli *D T*, *d t*, Lineæ curvæ *S T t R* occurrentes in *T* & *t*. Et ex data tum lege vis centripetæ, tum altitudine *C S* de qua corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in alia quavis altitudine *C T*, per Prop. XXXIX. Tempus autem, quo corpus deſcribit lineolam *T t*, eſt ut lineolæ hujus longitudo (id eſt ut ſecans anguli *t T C*) directe, & velocitas inverſe. Tempori huic proportionalis ſit ordinatim applicata *D N* ad rectam *C S* per punctum *D* perpendicularis, & ob datam *D d* erit rectangulum *D d* x *D N*, hoc eſt area *D N n d*, eidem tempori proportionale. Ergo ſi *S N n* ſit curva illa linea quam punctum *N* perpetuo tangit, erit area *S N D S* proportionalis tempori quo corpus deſcendendo deſcripſit lineam *S T*; proindeq; ex inventa illa area dabitur tempus. Q. E. I.

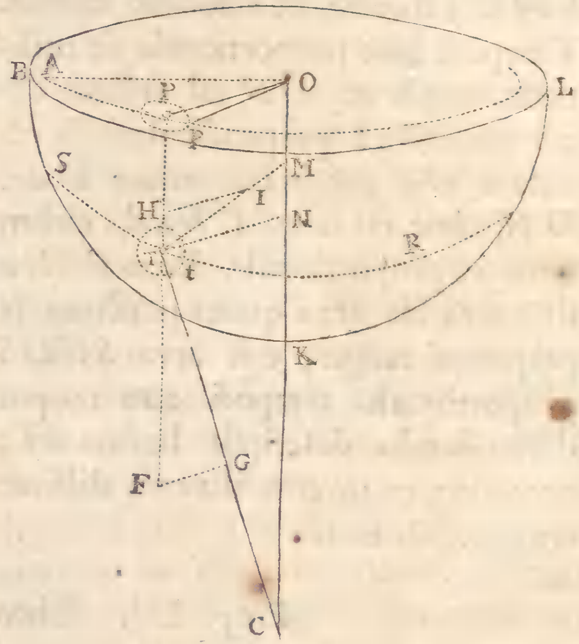


Prop. LV. Theor. XIX.

Si corpus movetur in ſuperficie quacunq; curva, cujus axis per centrum virium tranſit, & a corpore in axem demittatur perpendicularis, eiq; parallela & æqualis ab axis puncto quovis ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem deſcribet.

Sit *B S K L* ſuperficies curva, *T* corpus in ea revolvens, *S T t R* Trajectoria quam corpus in eadem deſcribit, *S* initium Trajectoriæ, *O M N K* axis ſuperficiei curvæ, *T N* recta a corpore in axem perpendicularis, *O P* huic parallela & æqualis a puncto *O* quod in axe datur educta, *A P* veſtigium Trajectoriæ a puncto *P* in

in lineæ volubilis *OP* plano *AOP* deſcriptum, *A* veſtigii initium puncto *S* reſpondens, *TC* recta a corpore ad centrum ducta; *TG* pars ejus vi centripetæ qua corpus urgetur in centrum *C* proportionalis; *TM* recta ad ſuperficiem curvam perpendicularis; *TI* pars ejus vi preſſionis qua corpus urget ſuperficiem, viciſſimq; urgetur verſus *M* a ſuperficie, proportionalis; *PHTF* recta axi parallela per corpus tranſiens, & *GF*, *IH* rectæ a punctis *G* & *I* in parallelam illam *PHTF* perpendiculariter demiſſæ. Dico jam quod area *AOP*, radio *OP* ab initio motus deſcripta, ſit tempori proportionalis. Nam vis *TG* (per Legum Corol. 2.) reſolvitur in vires *TF*, *FG*; & vis *TI* in vires *TH*, *HI*: Vires autem T*F*, T*H* agendo ſecundum lineam *PF* plano *AOP* perpendicularem mutant ſolummodo motum corporis quatenus huic plano perpendicularem. Ideoq; motus ejus quatenus ſecundum poſitionem plani factus, hoc eſt motus puncti *P*, quo Trajectoriæ veſtigium *AP* in hoc plano deſcribitur, idem eſt ac ſi vires T*F*, TH tollerentur, & corpus ſolis viribus *FG*, H*I* agitaretur, hoc eſt idem ac ſi corpus in plano *AOP* vi centripeta ad centrum *O* tendente & ſummam virium *FG* & HI æquante, deſcriberet curvam *AP*. Sed vi tali deſcribetur area *AOP* (per Prop. I.) tempori proportionalis. Q. E. D.



Corol. Eodem argumento ſi corpus a viribus agitatum ad centra duo

duo vel plura in eadem quavis recta *C O* data tendentibus, deſcriberet in ſpatio libero lineam quamcunq; curvam *S T*, foret area *A O P* tempori ſemper proportionalis.

Prop. LVI. Prob. XXXVII.

Conceſſis figurarum curvilinearum Quadraturis, datiſq; tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum ſuperficie curva cujus axis per centrum illud tranſit; invenienda eſt Trajectoria quam corpus in eadem ſuperficie deſcribet, de loco dato, data cum velocitate verſus plagam in ſuperficie illa datam egreſſum.

Stantibus quæ in ſuperiore Propoſitione conſtructa ſunt, exeat corpus de loco *S* in Trajectoriam inveniendam *S T t R*, & ex data ejus velocitate in altitudine *S C* dabitur ejus velocitas in alia quavis altitudine *T C*. Ea cum velocitate, dato tempore quam minimo, deſcribat corpus Trajectoriæ ſuæ particulam *T t*, ſitq; *P p* veſtigium ejus plano *A O P* deſcriptum. Jungatur *O p*, & circelli centro *T* intervallo *T t* in ſuperficie curva deſcripti ſit *P p Q* veſtigium Ellipticum in eodem plano *O A P p* deſcriptum. Et ob datum magnitudine & poſitione circellum, dabitur Ellipſis illa *P p Q*. Cumq; area *P O p* ſit tempori proportionalis, atq; adeo ex dato tempore detur, dabitur *O p* poſitione, & inde dabitur communis ejus & Ellipſeos interſectio *p*, una cum angulo *O P p*, in quo Trajectoriæ veſtigium *A P p* ſecat lineam *O P*. Inde autem invenietur Trajectoriæ veſtigium illud *A P p*, eadem methodo qua curva linea *V I K k* in Propoſitione XLI. ex ſimilibus datis inventa fuit. Tum ex ſingulis veſtigii punctis *P* erigendo ad planum *A O P* perpendicula *P T* ſuperficiei curvæ occurrentia in *T*, dabuntur ſingula Trajectoriæ puncta *T*. Q. E. I.

SECT. XI.

De Motu Corporum Sphæricorum viribus centripetis ſe mutuo petentium.

Hactenus expoſui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum natura. Attractiones enim fieri ſolent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones ſemper mutuæ ſunt & æquales, per Legem tertiam: adeo ut neq; attrahens poſſit quieſcere neq; attractum, ſi duo ſint corpora, ſed ambo (per Legum Corollarium quartum) quaſi attractione mutua, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & ſi plura ſint corpora (quæ vel ab unico attrahantur vel omnia ſe mutuo attrahant) hæc ita inter ſe moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quieſcat vel uniformiter moveatur in directum. Qua de cauſa jam pergo motum exponere corporum ſe mutuo trahentium, conſiderando vires centripetas tanquam Attractiones, quamvis fortaſſe, ſi phyſice loquamur, verius dicantur Impulſus. In Mathematicis enim jam verſamur, & propterea miſſis diſputationibus Phyſicis, familiari utimur ſermone, quo poſſimus a Lectoribus Mathematicis facilius intelligi.

Prop. LVII. Theor. XX.

Corpora duo ſe invicem trahentia deſcribunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum ſe mutuo, figuras ſimiles.

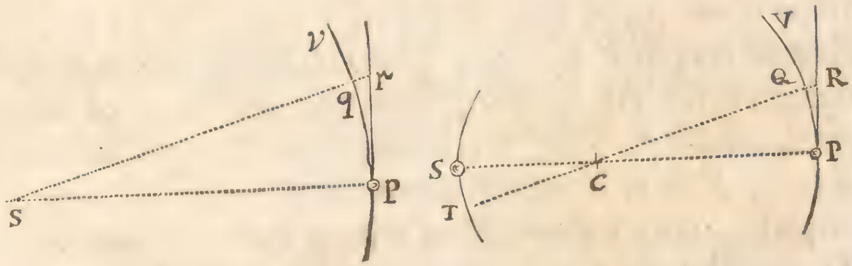
Sunt enim diſtantiæ a communi gravitatis centro reciproce proportionales corporibus, atq; adeo in data ratione ad invicem, & componendo, in data ratione ad diſtantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ diſtantiæ circum terminos ſuos communi motu

tu angulari, propterea quod in directum ſemper jacentes non mutant inclinationem ad ſe mutuo. Lineæ autem rectæ, quæ ſunt in data ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos ſuos feruntur, figuras circum eoſdem terminos (in planis quæ una cum his terminis vel quieſcunt vel motu quovis non angulari moventur) deſcribunt omnino ſimiles. Proinde ſimiles ſunt figuræ quæ his diſtantiis circumactis deſcribuntur. Q. E. D.

Prop. LVIII. Theor. XXI.

Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuo trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod figuris, quas corpora ſic mota deſcribunt circum ſe mutuo, poteſt figura ſimilis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iiſdem deſcribi.

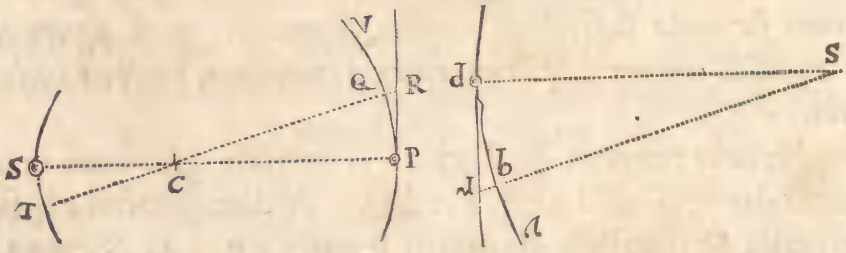
Revolvantur corpora *S*, *P* circa commune gravitatis centrum *C*, pergendo de *S* ad *T* deq; *P* ad *Q*. A dato puncto *s* ipſis *SP*, *TQ* æquales & parallelæ ducantur ſemper *sp*, *sq*; & curva *pqv* quam punctum *p*, revolvendo circum punctum immotum *s*, deſcri-



bit, erit ſimilis & æqualis curvis quas corpora *S*, *P* deſcribunt circum ſe mutuo: proindeq; (per Theor. XX.) ſimilis curvis *ST* & *PQV*, quas eadem corpora deſcribunt circum commune gravitatis centrum *C*: id adeo quia proportiones linearum *SC*, *CP* & *SP* vel *sp* ad invicem dantur.

Cas. 1. Commune illud gravitatis centrum *C*, per Legum Corol-

rollarium quartum, vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo quod id quieſcit, inq; s & p locentur corpora duo, immobile in s, mobile in p, corporibus S & P ſimilia & æqualia. Dein tangant rectæ PR & pr curvas PQ & pq in P & p, & producantur CQ & sq ad R & r. Et ob ſimilitudinem figurarum $CPRQ$, $sprq$, erit RQ ad rq ut CP ad sp, adeoq; in data ratione. Proinde ſi vis qua Corpus P verſus Corpus S, atq; adeo verſus centrum intermedium C attrahitur, eſſet ad vim qua corpus p verſus centrum s attrahitur in eadem illa ratione data, hæ vires æqualibus temporibus attraherent ſemper corpora de tangentibus PR, pr ad arcus PQ, pq, per intervalla ipſis pro-



portionalia RQ, rq; adeoq; vis poſterior efficeret ut corpus p gyraretur in curva pqv, quæ ſimilis eſſet curvæ PQV, in qua vis prior efficit ut corpus P gyretur, & revolutiones iiſdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non ſunt ad invicem in ratione CP ad sp, ſed (ob ſimilitudinem & æqualitatem corporum S & s, P & p, & æqualitatem diſtantiarum SP, sp) ſibi mutuo æquales, corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de Tangentibus; & propterea ut corpus poſterius p trahatur per intervallum majus rq, requiritur tempus majus, idq; in dimidiata ratione intervallorum; propterea quod, per Lemma decimum, ſpatia ipſo motus initio deſcripta ſunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis p eſſe ad velocitatem corporis P in dimidiata ratione diſtantiæ sp ad diſtantiam CP, eo ut temporibus quæ ſint in eadem dimidiata ratione de-

ſcri-

ſcribantur arcus PQ, pq, qui ſunt in ratione integra: Et corpora P, p viribus æqualibus ſemper attracta deſcribent circum centra quieſcentia C & s figuras ſimiles PQV, pqv, quarum poſterior pqv ſimilis eſt & æqualis figuræ quam corpus P circum corpus mobile S deſcribit. Q. E. D.

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum ſpatio in quo corpora moventur inter ſe, progreditur uniformiter in directum; &, per Legum Corollarium ſextum, motus omnes in hoc ſpatio peragentur ut prius, adeoq; corpora deſcribent circum ſe mutuo figuras eaſdem ac prius, & propterea figuræ pqv ſimiles & æquales. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus diſtantiæ ſuæ proportionalibus ſe mutuo trahentia, deſcribunt (per Prop. X.) & circum commune gravitatis centrum, & circum ſe mutuo, Ellipſes concentricas: & vice verſa, ſi tales figuræ deſcribuntur, ſunt vires diſtantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus deſcribunt (per Prop. XI, XII, XIII.) & circum commune gravitatis centrum & circum ſe mutuo ſectiones conicas umbilicos habentes in centro circum quod figuræ deſcribuntur. Et vice verſa, ſi tales figuræ deſcribuntur, vires centripetæ ſunt quadrato diſtantiæ reciproce proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad ſe mutuo ductis, deſcribunt areas temporibus proportionales.

Prop. LIX. Theor. XXII.

Corporum duorum S & P circa commune gravitatis centrum C revolventium tempus periodicum eſſe ad tempus periodicum corporis alterutrius P, circa alterum immotum S gyrantis & figuris quæ corpora circum ſe mutuo deſcribunt figuram ſimilem & æqualem deſcribentis, in dimidiata ratione corporis alterius S, ad ſummam corporum $S+P$.

Namq;

Namq; ex demonſtratione ſuperioris Propoſitionis, tempora quibus arcus quivis ſimiles *P Q* & *p q* deſcribuntur, ſunt in dimidiata ratione diſtantiarum *C P* & *S P* vel *s p*, hoc eſt, in dimidiata ratione corporis *S* ad ſummam corporum *S+P*. Et componendo, ſummæ temporum quibus arcus omnes ſimiles *P Q* & *p q* deſcribuntur, hoc eſt tempora tota quibus figuræ totæ ſimiles deſcribuntur, ſunt in eadem dimidiata ratione. Q. E. D.

Prop. LX. Theor. XXIII.

Si corpora duo S & P, viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahentia, revoluntur circa gravitatis centrum commune: dico quod Ellipſeos, quam corpus alterutrum P hoc motu circa alterum S deſcribit, Axis tranſverſus erit ad axem tranſverſum Ellipſeos, quam corpus idem P circa alterum quieſcens S eodem tempore periodico deſcribere poſſet, ut ſumma corporum duorum S+P ad primam duarum medie proportionalium inter hanc ſummam & corpus illud alterum S.

Nam ſi deſcriptæ Ellipſes eſſent ſibi invicem æquales, tempora periodica, per Theorema ſuperius, forent in dimidiata ratione corporis S ad ſummam corporum *S+P*. Minuatur in hac ratine tempus periodicum in Ellipſi poſteriore, & tempora periodica evadent æqualia, Ellipſeos autem axis tranſverſus per Theorema VII. minuetur in ratione cujus hæc eſt ſeſquiplicata, id eſt in ratione, cujus ratio *S* ad *S+P* eſt triplicata; adeoq; ad axem tranſverſum Ellipſeos alterius, ut prima duarum medie proportionalium inter *S+P* & *S* ad *S+P*. Et inverſe, axis tranſverſus Ellipſeos circa corpus mobile deſcriptæ erit ad axem tranſverſum deſcriptæ circa immobile, ut *S+P* ad primam duarum medie proportionalium inter *S+P* & *S*. Q. E. D.

Prop. LXI. Theor. XXIV.

Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuo trahentia, neq; alias agitata vel impedita, quomodocunq; moveantur; motus eorum perinde ſe habebunt ac ſi non traherent ſe mutuo, ſed utrumq; a corpore tertio in communi gravitatis centro conſtituto viribus iiſdem traheretur: Et Virium trahentium eadem erit Lex reſpectu diſtantiæ corporum a centro illo communi atq; reſpectu diſtantiæ totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora ſe mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium, adeoq; eædem ſunt ac ſi a corpore intermedio manarent. Q. E. D.

Et quoniam data eſt ratio diſtantiæ corporis utriuſvis a centro illo communi ad diſtantiam corporis ejuſdem a corpore altero, dabitur ratio cujuſvis poteſtatis diſtantiæ unius ad eandem poteſtatem diſtantiæ alterius; ut & ratio quantitatis cujuſvis, quæ ex una diſtantia & quantitatibus datis utcunq; derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex altera diſtantia & quantitatibus totidem datis datamq; illam diſtantiarum rationem ad priores habentibus ſimiliter derivatur. Proinde ſi vis, qua corpus unum ab altero trahitur, ſit directe vel inverſe ut diſtantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus diſtantiæ poteſtas; vel deniq; ut quantitas quævis ex hac diſtantia & quantitatibus datis quomodocunq; derivata: erit eadem vis, qua corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directe itidem vel inverſe ut corporis attracti diſtantia a centro illo communi, vel ut eadem diſtantiæ hujus poteſtas, vel deniq; ut quantitas ex hac diſtantia & analogis quantitatibus datis ſimiliter derivata. Hoc eſt Vis trahentis eadem erit Lex reſpectu diſtantiæ utriuſq;. Q. E. D.

Prop.

Prop. LXII. Prob. XXXVIII.

Corporum duorum quæ viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus.

Corpora, per Theorema noviſſimum, perinde movebuntur, ac ſi a corpore tertio in communi gravitatis centro conſtituto traherentur; & centrum illud ipſo motus initio quieſcet (per Hypotheſin) & propterea (per Legum Corol. 4.) ſemper quieſcet. Determinandi ſunt igitur motus Corporum (per Probl. XXV.) perinde ac ſi a viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum ſe mutuo trahentium. Q. E. I.

Prop. LXIII. Prob. XXXIX.

Corporum duorum quæ viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahunt, deq; locis datis, ſecundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.

Ex datis corporum motibus ſub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus ſpatii quod una cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales reſpectu hujus ſpatii. Motus autem ſubſequentes (per Legum Corollarium quintum & Theorema noviſſimum) perinde fiunt in hoc ſpatio, ac ſi ſpatium ipſum una cum communi illo gravitatis centro quieſceret, & corpora non traherent ſe mutuo, ſed a corpore tertio ſito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc ſpatio mobili de loco dato, ſecundum datam rectam, data cum velocitate exeuntis, & vi centripeta ad centrum illud tendente correpti, determinandus eſt motus per Problema nonum & viceſimum ſextum: & habebitur ſimul motus corporis alterius e regione. Cum hoc motu componendus eſt uniformis ille Syſtematis ſpatii & corporum in eo gyrantium

motus

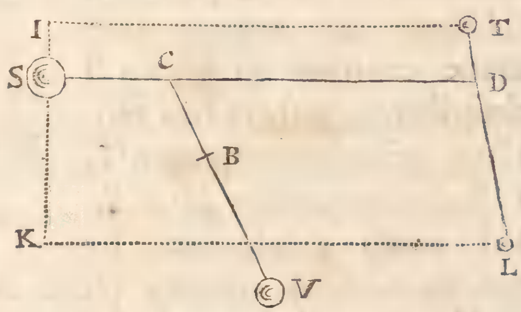
motus progreſſivus ſupra inventus, & habebitur motus abſolutus corporum in ſpatio immobili. Q. E. I.

Prop. LXIV. Prob. XL.

Viribus quibus Corpora ſe mutuo trahunt creſcentibus in ſimplici ratione diſtantiarum a centris: requiruntur motus plurium Corporum inter ſe.

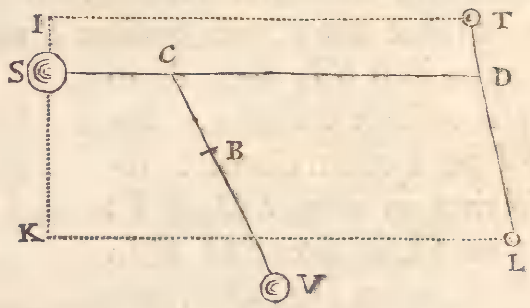
Ponantur imprimis corpora duo *T* & *L* commune habentia gravitatis centrum *D*. Deſcribent hæc per Corollarium primum Theorematis XXI. Ellipſes centra habentes in *D*, quarum magnitudo ex Problemate V. innoteſcit.

Trahat jam corpus tertium *S* priora duo *T* & *L* viribus acceleratricibus *ST*, *SL*, & ab ipſis viciſſim trahatur. Vis *ST* per Legum Corol. 2. reſolvitur in vires *SD*, *DT*; & vis *SL* in vires *SD*, *DL*. Vires autem *DT*, *DL*, quæ ſunt ut ipſarum ſumma *TL*, atq; adeo ut vires acceleratrices quibus corpora *T* & *L*



ſe mutuo trahunt, additæ his viribus corporum *T* & *L*, prior priori & poſterior poſteriori, componunt vires diſtantiis *DT* ac *DL* proportionales, ut prius, ſed viribus prioribus majores; adeoq; (per Corol. 1. Prop. X. & Corol. 1 & 7. Prop. IV.) efficiunt ut corpora illa deſcribant Ellipſes ut prius, ſed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices *SD* & *SD*, actionibus motricibus *SD* x *T* & *SD* x *L*, quæ ſunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & ſecundum lineas *TI*, *LK* ipſi *DS* parallelas, nil mutant ſitus earum ad invicem, ſed faciunt ipſa æqualiter accedere ad lineam *IK*; quam ductam concipe per medium corporis *S*, & lineæ *DS* perpendicularem. Impedietur autem iſte ad lineam *IK* acceſſus

faciendo ut Syſtema corporum T & L ex una parte, & corpus S ex altera, juſtis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum C. Tali motu corpus S (eo quod ſumma virium motricium $SD \times T$ & $SD \times L$, diſtantiæ CS proportionalium, trahitur verſus centrum C) deſcribit Ellipſin circa idem C; & punctum D ob proportionales CS, CD deſcribet Ellipſin conſimilem, e regione. Corpora autem T & L viribus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, (prius priore, poſterius poſteriore) æqualiter & ſecundum lineas parallelas TI & LK (ut dictum eſt) attracta, pergent (per Legum Corollarium quintum & ſextum) circa centrum mobile D Ellipſes ſuas deſcribendo, ut prius. Q. E. I.



Addatur jam corpus quartum V, & ſimili argumento concludetur hoc & punctum C Ellipſes circa omnium commune centrum gravitatis B deſcribere; manentibus motibus priorum corporum T, L & S circa centra D & C, ſed paulo acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. Q. E. I.

Hæc ita ſe habent ubi corpora T & L trahunt ſe mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam trahunt corpora reliqua pro ratione diſtantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut diſtantiæ ductæ in corpora trahentia, & ex præcedentibus facile deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis Ellipſes varias, circa omnium commune gravitatis centrum B, in plano immobili deſcribunt. Q. E. I.

Prop. LXV. Theor. XXV.

Corpora plura quorum vires decreſcunt in duplicata ratione diſtantiarum

rum ab eorundem centris, moveri poſſe inter ſe in Ellipſibus, & radiis ad umbilicos ductis Areas deſcribere temporibus proportionales quam proxime.

In Propoſitione ſuperiore demonſtratus eſt caſus ubi motus plures peraguntur in Ellipſibus accurate. Quo magis recedit lex virium a lege ibi poſita, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus, neq; fieri poteſt ut corpora ſecundum legem hic poſitam ſe mutuo trahentia moveantur in Ellipſibus accurate, niſi ſervando certam proportionem diſtantiarum ab invicem. In ſequentibus autem caſibus non multum ab Ellipſibus errabitur.

Cas. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo diſtantias revolvi, tendantq; ad ſingula vires abſolutæ proportionales iiſdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per Legum Corol. quartum.) vel quieſcet vel movebitur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva eſſe, ut corpus maximum nunquam diſtet ſenſibiliter ab hoc centro; & maximum illud vel quieſcet vel movebitur uniformiter in directum, abſq; errore ſenſibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in Ellipſibus, atq; radiis ad idem ductis deſcribent areas temporibus proportionales; niſi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in ſe mutuo. Diminui autem poſſunt corpora minora uſq; donec error iſte & actiones mutuæ ſint datis quibuſvis minores, atq; adeo donec orbes cum Ellipſibus quadrent, & areæ reſpondeant temporibus, abſq; errore qui non ſit minor quovis dato. Q. E. O.

Cas. 2. Fingamus jam Syſtema corporum minorum modo jam deſcripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum ſe mutuo revolventium corporum Syſtema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longe maximi & ad magnam diſtantiam ſiti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora ſecundum lineas parallelas urgentur, non mutant ſitus corporum ad invicem, ſed ut Syſte-

tema totum, ſervatis partium motibus inter ſe, ſimul transferatur efficiunt: manifeſtum eſt quod ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorſus orietur mutatio motus attractorum inter ſe, niſi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, ſecundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum eſſe inter ſe reciproce ut quadrata diſtantiarum, & augendo corporis maximi diſtantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum minores ſint differentiæ & inclinationes ad invicem quam datæ quævis, perſeverabunt motus partium Syſtematis inter ſe abſq; erroribus qui non ſint quibuſvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem diſtantiam, Syſtema totum ad modum corporis unius attrahitur, movebitur idem hac attractione ad modum corporis unius; hoc eſt, centro ſuo gravitatis deſcribet circa corpus maximum, Sectionem aliquam Conicam (*viz.* Hyperbolam vel Parabolam attractione languida, Ellipſim fortiore,) & Radio ad maximum ducto, verret areas temporibus proportionales, abſq; ullis erroribus, niſi quas partium diſtantiæ (perexiguæ ſane & pro lubitu minuendæ) valeant efficere. Q. E. O.

Simili argumento pergere licet ad caſus magis compoſitos in infinitum.

Corol. 1. In caſu ſecundo; quo propius accedit corpus omnium maximum ad Syſtema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium Syſtematis inter ſe, propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major eſt inclinatio ad invicem, majorq; proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium Syſtematis verſus corpus omnium maximum, non ſint ad invicem reciproce ut quadrata diſtantiarum a corpore illo maximo; præſertim ſi proportionis hujus inæqualitas major ſit quam inæqualitas proportionis diſtantiarum a corpore maximo: Nam ſi vis acceleratrix, æqualiter & ſecundum lineas

pa-

parallelas agendo, nil perturbat motus inter ſe, neceſſe eſt ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorq; ſit vel minor pro majore vel minore inæqualitate. Exceſſus impulſuum majorum agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, neceſſario mutabunt ſitum eorum inter ſe. Et hæc perturbatio addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde ſi Syſtematis hujus partes in Ellipſibus vel Circulis ſine perturbatione inſigni moveantur, manifeſtum eſt, quod eædem a viribus acceleratricibus ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur niſi leviſſime, aut urgentur æqualiter & ſecundum lineas parallelas quamproxime.

Prop. LXVI. Theor. XXVI.

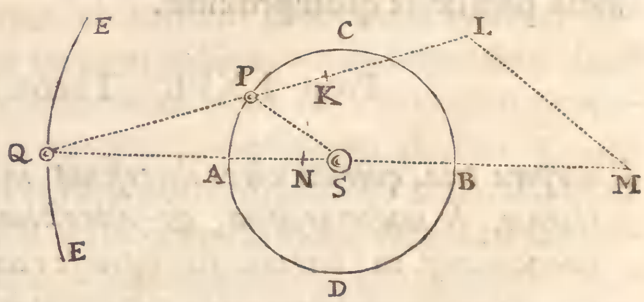
Si corpora tria, quorum vires decreſcunt in duplicata ratione diſtantiarum, ſe mutuo trahant, & attractiones acceleratrices binorum quorumcunq; in tertium ſint inter ſe reciproce ut quadrata diſtantiarum; minora autem circa maximum in plano communi revolvantur: Dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipſum ductis, deſcribet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam Ellipſeos umbilicum in concurſu radiorum habentis magis accedentem, ſi corpus maximum his attractionibus agitetur, quam ſi maximum illud vel a minoribus non attractum quieſcat, vel multo minus vel multo magis attractum aut multo minus aut multo magis agitetur.

Liquet fere ex demonſtratione Corollarii ſecundi Propoſitionis præcedentis; ſed argumento magis diſtincto & latius cogente ſic evincitur.

Cas. 1. Revolvantur corpora minora *P* & *Q* in eodem plano circa maximum *S*, quorum *P* deſcribat orbem interiorem *PAB*, & *Q* exteriorem *QE*. Sit *QK* mediocris diſtantia corporum *P* & *Q*; & corporis *P* verſus *Q* attractio acceleratrix in mediocri illa diſtantia exponatur per eandem. In duplicata ratione *QK*

ad

ad *QP* capiatur *QL* ad *QK*, & erit *QL* attractio acceleratrix corporis *P* verſus *Q* in diſtantia quavis *QP*. Junge *PS*, eiq; parallelam age *LM* occurrentem *QS* in *M*, & attractio *QL* reſolvetur (per Legum Corol. 2.) in attractiones *QM*, *LM*. Et ſic urgebitur corpus *P* vi acceleratrice triplici: una tendente ad *S* & oriunda a mutua attractione corporum *S* & *P*. Hac vi ſola corpus *P*, circum corpus *S* ſive immotum, ſive hac attractione agitatum, deſcribere deberet & areas, radio *PS* temporibus proportionales, & Ellipſin cui umbilicus eſt in centro corporis *S*. Patet hoc per Prob. VI. & Corollaria Theor. *XXI*. Vis altera eſt attractionis *LM*, quæ quoniam tendit a *P* ad *S*, ſuperaddita vi priori coincidet cum ipſa, & ſic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales deſcribantur per Corol. 3. Theor.



XXI. At quoniam non eſt quadrato diſtantiæ *PS* reciproce proportionalis, componet ea cum vi priore vim ab hac proportione aberrantem, idq; eo magis quo major eſt proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per Corol. 1. Prob. VIII. & Corol. 2. Theor XXI.) vis qua Ellipſis circa umbilicum *S* deſcribitur tendere debeat ad umbilicum illum, & eſſe quadrato diſtantiæ *PS* reciproce proportionalis; vis illa compoſita aberrando ab hac proportione, faciet ut Orbis *PAB* aberret a forma Ellipſeos umbilicum habentis in *S*; idq; eo magis quo major eſt aberratio ab hac proportione; atq; adeo etiam quo major eſt proportio vis ſecundæ *LM* ad vim primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia *QM*, trahendo corpus *P* ſecundum lineam ipſi *QS* parallelam, componet cum viribus prioribus vim quæ non amplius dirigitur a *P* in *S*, quæq; ab hac determinatione tanto ma-

magis aberrat, quanto major eſt proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus; atq; adeo quæ faciet ut corpus *P*, radio *SP*, areas non amplius temporibus proportionales deſcribet, atq; aberratio ab hac proportionalitate ut tanto major ſit, quanto major eſt proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero *PAB* aberrationem a forma Elliptica præfata hæc vis tertia duplici de cauſa adaugebit, tum quod non dirigitur a *P* ad *S*, tum etiam quod non ſit proportionalis quadrato diſtantiæ *PS*. Quibus intellectis, manifeſtum eſt quod areæ temporibus tum maxime fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, ſit minima; & quod Orbis *PAB* tum maxime accedit ad præfatam formam Ellipticam, ubi vis tam ſecunda quam tertia, ſed præcipue vis tertia, ſit minima, vi prima manente.

Exponatur corporis *S* attractio acceleratrix verſus *Q* per lineam *QN*; & ſi attractiones acceleratrices *QM*, *QN* æquales eſſent, hæ trahendo corpora *S* & *P* æqualiter & ſecundum lineas parallelas, nil mutarent ſitum eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter ſe (per Legum Corol. 6.) ac ſi hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione ſi attractio *QN* minor eſſet attractione *QM*, tolleret ipſa attractionis *QM* partem *QN*, & maneret pars ſola *MN*, qua temporum & arearum proportionalitas & Orbitæ forma illa Elliptica perturbaretur. Et ſimiliter ſi attractio *QN* major eſſet attractione *QM*, oriretur ex differentia ſola *MN* perturbatio proportionalitatis & Orbitæ. Sic per attractionem *QN* reducitur ſemper attractio tertia ſuperior *QM* ad attractionem *MN*, attractione prima & ſecunda manentibus prorſus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & Orbita *PAB* ad formam præfatam Ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio *MN* vel nulla eſt, vel quam fieri poſſit minima; hoc eſt ubi corporum *P* & *S* attractiones acceleratrices, factæ verſus corpus *Q*, accedunt quantum fieri poteſt ad æqualitatem; id eſt ubi attractio *QN* non eſt nulla, neq; minor minima attractionum omnium *QM*, ſed inter attractionum omni-

ni-

nium *QM* maximam & minimam quaſi mediocris, hoc eſt, non multo major neq; multo minor attractione *QK*. Q.E.D.

Cas. 2. Revolvantur jam corpora minora *P*, *Q* circa maximum *S* in planis diverſis, & vis *LM*, agendo ſecundum lineam *PS* in plano Orbitæ *PAB* ſitam, eundem habebit effectum ac prius, neq; corpus *P* de plano Orbitæ ſuæ deturbabit. At vis altera *NM*, agendo ſecundum lineam quæ ipſi *QS* parallela eſt, (atq; adeo, quando corpus *Q* verſatur extra lineam Nodorum, inclinatur ad planum Orbitæ *PAB*;) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expoſitam, inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus *P* de plano ſuæ Orbitæ. Et hæc perturbatio in dato quovis corporum *P* & *S* ad invicem ſitu, erit ut vis illa generans *MN*, adeoq; minima evadet ubi *MN* eſt minima, hoc eſt (uti jam expoſui) ubi attractio *QN* non eſt multo major neq; multo minor attractione *QK*. Q. E. D.

Corol. 1. Ex his facile colligitur quod ſi corpora plura minora *P*, *Q*, *R* &c. revolvantur circa maximum *S*: motus corporis intimi *P* minime perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum *S* pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur atq; cæteri a ſe mutuo.

Corol. 2. In Syſtemate vero trium corporum *S*, *P*, *Q*; ſi attractiones acceleratrices binorum quorumcunq; in tertium ſint ad invicem reciproce ut quadrata diſtantiarum, corpus *P* radio *PS* aream circa corpus *S* velocius deſcribet prope conjunctionem *A* & oppoſitionem *B*, quam prope quadraturas *C*, *D*. Namq; vis omnis qua corpus *P* urgetur & corpus *S* non urgetur, quæq; non agit ſecundum lineam *PS*, accelerat vel retardat deſcriptionem areæ, perinde ut ipſa in antecedentia vel in conſequentia dirigitur. Talis eſt vis *NM*. Hæc in tranſitu corporis *P* a *C* ad *A* tendit in antecedentia, motumq; accelerat; dein uſq; ad *D* in conſequentia, & motum retardat; tum in antecedentia uſq; ad *B*, & ultimo in conſeqentia tranſeundo a *B* ad *C*.

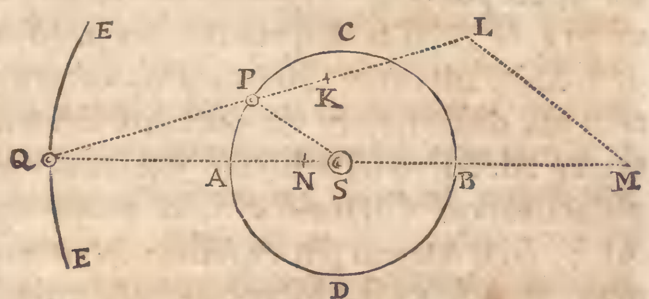
Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus *P*, cæteris

par-

paribus, velocius movetur in Conjunctione & Oppoſitione quam in Quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis *P* cæteris paribus curvior eſt in quadraturis quam in Conjunctione & Oppoſitione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite. Et præterea vis *NM*, in Conjunctione & Oppoſitione, contraria eſt vi qua corpus *S* trahit corpus *P*, adeoq; vim illam minuit; corpus autem *P* minus deflectet a recto tramite, ubi minus urgetur in corpus *S*.

Corol. 5. Unde corpus *P*, cæteris paribus, longius recedet a corpore *S* in quadraturis, quam in Conjunctione & Oppoſitione. Hæc ita ſe habent excluſo motu Excentricitatis. Nam ſi Orbita corporis *P* excentrica ſit, Excentricitas ejus (ut mox in hujus Corol. 9. oſtendetur) evadet maxima ubi Apſides ſunt in Syzygiis; indeq; fieri poteſt ut corpus *P*, ad Apſidem ſummam appellans, abſit longius a corpore *S* in Syzygiis quam in Quadraturis.



Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis *S*, qua corpus *P* retinetur in Orbe ſuo, augetur in quadraturis per additionem vis *LM*, ac diminuitur in Syzygiis per ablationem vis *KL*, & ob magnitudinem vis *KL*, magis diminuitur quam augeatur; eſt autem vis illa centripeta (per Corol. 2, Prop. IV.) in ratione compoſita ex ratione ſimplici radii *SP* directe & ratione duplicata temporis periodici inverſe: patet hanc rationem compoſitam diminui per actionem vis *KL*, adeoq; tempus periodicum, ſi maneat Orbis radius *SP*, augeri, idq; in dimidiata ratione qua vis illa centripeta diminuitur: auctoq; adeo vel diminuto hoc Radio, tempus periodicum augeri magis, vel di-

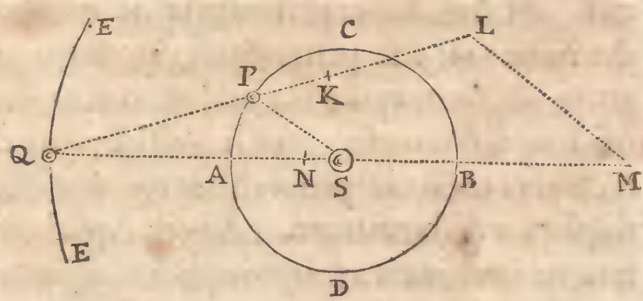
minui minus quam in Radii hujus ratione ſeſquiplicata, per Corol. 6. Prop. IV. Si vis illa corporis centralis paulatim langueſceret, corpus *P* minus ſemper & minus attractum perpetuo recederet longius a centro *S*; & contra, ſi vis illa augeretur, accederet propius. Ergo ſi actio corporis longinqui *Q*, qua vis illa diminuitur, augeatur ac diminuatur per vices, augebitur ſimul ac diminuetur Radius *SP* per vices, & tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compoſita ex ratione ſeſquiplicata Radii & ratione dimidiata qua vis illa centripeta corporis centralis *S* per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui *Q* diminuitur vel augetur.

Corol. 7. Ex præmiſſis conſequitur etiam quod Ellipſeos a corpore *P* deſcriptæ axis ſeu Apſidum linea, quoad motum angularem progreditur & regreditur per vices, ſed magis tamen progreditur, & in ſingulis corporis revolutionibus per exceſſum progreſſionis fertur in conſequentia. Nam vis qua corpus *P* urgetur in corpus *S* in Quadraturis, ubi vis *MN* evanuit, componitur ex vi *LM* & vi centripeta qua corpus *S* trahit corpus *P*. Vis prior *LM*, ſi augeatur diſtantia *PS*, augetur in eadem fere ratione cum hac diſtantia, & vis poſterior decreſcit in duplicata illa ratione, adeoq; ſumma harum virium decreſcit in minore quam duplicata ratione diſtantiæ *PS*, & propterea, per Corol. 1. Prop. XLV. facit Augem ſeu Apſidem ſummam regredi. In Conjunctione vero & Oppoſitione, vis qua corpus *P* urgetur in corpus *S* differentia eſt inter vim qua corpus *S* trahit corpus *P* & vim *KL*; & differentia illa, propterea quod vis *KL* augetur quamproxime in ratione diſtantiæ *PS*, decreſcit in majore quam duplicata ratione diſtantiæ *PS*, adeoq; per Corol. 1. Prop. XLV. facit Augem progredi. In locis inter Syzygias & Quadraturas, pendet motus Augis ex cauſa utraq; conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius exceſſu progrediatur ipſa vel regrediatur. Unde cum vis *KL* in Syzygiis ſit quaſi dupla vis *LM* in quadraturis, exceſſus in tota revolutione erit penes vim *KL*, transferetq; Augem ſingulis

re-

revolutionibus in conſequentia. Veritas autem hujus & præcedentis Corollarii facilius intelligetur concipiendo Syſtema corporum duorum *S*, *P* corporibus pluribus *Q*, *Q*, *Q* &c. in Orbe *QE* conſiſtentibus, undeq; cingi. Namq; horum actionibus actio ipſius S minuetur undiq;, decreſcetq; in ratione pluſquam duplicata diſtantiæ.

Corol. 8. Cum autem pendeat Apſidum progreſſus vel regreſſus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicata ratione diſtantiæ *SP*, in tranſitu corporis ab Apſide ima ad Apſidem ſummam; ut & a ſimili incremento in reditu ad Apſidem imam; atq; adeo maximus ſit ubi proportio vis in Apſide ſumma ad vim in Apſide ima maxime recedit a duplicata ratione diſtantiarum inverſa: manifeſtum eſt quod Apſides in Syzygiis ſuis, per vim ablatitiam *K L* ſeu *NM* — *L M*, progredientur velocius, inq; Quadraturis ſuis tardius recedent per vim addititiam *L M*. Ob diuturnitatem vero temporis quo velocitas progreſſus vel tarditas regreſſus continuatur, fit hæc inæqualitas longe maxima.



Corol. 9. Si corpus aliquod vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ a centro, revolveretur circa hoc centrum in Ellipſi, & mox, in deſcenſu ab Apſide ſumma ſeu Auge ad Apſidem imam, vis illa per acceſſum perpetuum vis novæ augeretur in ratione pluſquam duplicata diſtantiæ diminutæ: Manifeſtum eſt quod corpus, perpetuo acceſſu vis illius novæ impulſum ſemper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quam ſi urgeretur vi ſola creſcente in duplicata ratione diſtantiæ diminutæ, adeoq; Orbem deſcriberet Orbe Elliptico interiorem, & in Apſide ima propius accederet ad centrum quam prius. Orbis igitur, acceſſu

hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in receſſu corporis ab Apſide ima ad Apſidem ſummam, decreſceret iiſdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad diſtantiam priorem, adeoq; ſi vis decreſcat in majori ratione, corpus jam minus attractum aſcendet ad diſtantiam majorem & ſic Orbis Excentricitas adhuc magis augebitur. Igitur ſi ratio incrementi & decrementi vis centripetæ ſingulis revolutionibus augeatur, augebitur ſemper Excentricitas, & e contra, diminuetur eadem ſi ratio illa decreſcat. Jam vero in Syſtemate corporum S, *P*, *Q*, ubi Apſides orbis *P AB* ſunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima eſt, & maxima fit ubi Apſides ſunt in Syzygiis. Si Apſides conſtituantur in quadraturis ratio prope Apſides minor eſt, & prope Syzygias major quam duplicata diſtantiarum, & ex ratione illa majori oritur Augis motus velociſſimus, uti jam dictum eſt. At ſi conſideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progreſſu inter Apſides, hæc minor eſt quam duplicata diſtantiarum. Vis in Apſide ima eſt ad vim in Apſide ſumma in minore quam duplicata ratione diſtantiæ Apſidis ſummæ ab umbilico Ellipſeos ad diſtantiam Apſidis imæ ab eodem umbilico: & e contra, ubi Apſides conſtituuntur in Syzygiis, vis in Apſide ima eſt ad vim in Apſide ſumma in majore quam duplicata ratione diſtantiarum. Nam vires L *M* in quadraturis additæ viribus corporis S componunt vires in ratione minore, & vires *K* L in Syzygiis ſubductæ viribus corporis *S* relinquunt vires in ratione majore. Eſt igitur ratio decrementi & incrementi totius in tranſitu inter Apſides, minima in quadraturis, maxima in Syzygiis: & propterea in tranſitu Apſidum a quadraturis ad Syzygias perpetuo augetur, augetq; Excentricitatem Ellipſeos; inq; tranſitu a Syzygiis ad quadraturas perpetuo diminuitur, & Excentricitatem diminuit.

Corol. 16. Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum Orbis *Q E S* immobile manere; & ex errorum expoſita cauſa manifeſtum eſt, quod ex viribus *NM*, *M*L, quæ ſunt

cau-

cauſa illa tota, vis *ML* agendo ſemper ſecundum planum Orbis *PAB*, nunquam perturbat motus in latitudinem, quodq; vis *NM* ubi Nodi ſunt in Syzygiis, agendo etiam ſecundum idem Orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero ſunt in Quadraturis eos maxime perturbat, corpuſq; *P* de plano Orbis ſui perpetuo trahendo, minuit inclinationem plani in tranſitu corporis a quadraturis ad Syzygias, augetq; viciſſim eandem in tranſitu a Syzygiis ad quadraturas. Unde fit ut corpore in Syzygiis exiſtente inclinatio evadat omnium minima, redeatq; ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad Nodum proximum accedit. At ſi Nodi conſtituantur in Octantibus poſt quadraturas, id eſt inter *C* & *A*, *D* & *B*, intelligetur ex modo expoſitis quod, in tranſitu corporis *P* a Nodo alterutro ad gradum inde nonageſimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in tranſitu per proximos 45 gradus, uſq; ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, & poſtea denuo in tranſitu per alios 45 gradus, uſq; ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaq; diminuitur inclinatio quam augetur, & propterea minor eſt ſemper in nodo ſubſequente quam in præcedente. Et ſimili ratiocinio inclinatio magis augetur quam diminuitur, ubi nodi ſunt in Octantibus alteris inter *A* & *D*, *B* & *C*. Inclinatio igitur ubi Nodi ſunt in Syzygiis eſt omnium maxima. In tranſitu eorum a Syzygiis ad quadraturas, in ſingulis corporis ad Nodos appulſibus, diminuitur, fitq; omnium minima ubi nodi ſunt in quadraturis & corpus in Syzygiis: dein creſcit iiſdem gradibus quibus antea decreverat, Nodiſq; ad Syzygias proximas appulſis ad magnitudinem primam revertitur.

Corol. 11. Quoniam corpus *P* ubi nodi ſunt in quadraturis perpetuo trahitur de plano Orbis ſui, idq; in partem verſus *Q*, in tranſitu ſuo a nodo *C* per Conjunctionem *A* ad nodum *D*; & in contrariam partem in tranſitu a nodo *D* per Oppoſitionem *B* ad nodum *C*; manifeſtum eſt quod in motu ſuo a nodo *C*, corpus perpetuo recedit ab Orbis ſui plano primo *CD*, uſq; dum perventum eſt ad nodum proximum; adeoq; in hoc nodo longiſſime diſtans a plano illo primo *CD*, tranſit per planum Orbis *QES*,

non

non in plani illius Nodo altero *D*, ſed in puncto quod inde vergit ad partes corporis *Q*, quodq; proinde novus eſt Nodi locus in anteriora vergens. Et ſimili argumento pergent Nodi recedere in tranſitu Corporis de hoc nodo in nodum proximum. Nodi igitur in quadraturis conſtituti perpetuo recedunt, in Syzygiis (ubi motus in latitudinem nil perturbatur) quieſcunt; in locis intermediis conditionis utriuſq; participes recedunt tardius, adeoq; ſemper vel retrogradi vel ſtationarii ſingulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

Corol. 12. Omnes illi in his Corollariis deſcripti errores ſunt paulo majores in conjunctione Corporum *P*, *Q* quam in eorum Oppoſitione, idq; ob majores vires generantes *NM* & *ML*.

Corol. 13. Cumq; rationes horum Corollariorum non pendeant a magnitudine corporis *Q*, obtinent præcedentia omnia, ubi corporis *Q* tanta ſtatuitur magnitudo ut circa ipſum revolvatur corporum duorum *S* & *P* Syſtema. Et ex aucto corpore *Q*, auctaq; adeo ipſius vi centripeta, a qua errores corporis *P* oriuntur, evadent errores illi omnes (paribus diſtantiis) majores in hoc caſu quam in altero, ubi corpus *Q* circum Syſtema corporum *P* & *S* revolvitur.

Corol. 14 Cum autem vires *NM*, *ML*, ubi corpus *Q* longinquum eſt, ſint quamproxime ut vis *QK* & ratio *PS* ad *QS* conjunctim, hoc eſt, ſi detur tum diſtantia *PS*, tum corporis *Q* vis abſoluta, ut *QS cub.* reciproce; ſint autem vires illæ *NM*, *ML* cauſæ errorum & effectuum omnium de quibus actum eſt in præcedentibus Corollariis: manifeſtum eſt quod effectus illi omnes, ſtante corporum *S* & *P* Syſtemate, ſint quamproxime in ratione compoſita ex ratione directa vis abſolutæ corporis *Q* & ratione triplicata inverſa diſtantiæ *QS*. Unde ſi Syſtema corporum *S* & *P* revolvatur circa corpus longinquum *Q*, vires illæ *NM*, *ML* & earum effectus erunt (per Corol. 2. & 6. Prop. IV.) reciproce in duplicata ratione temporis periodici. Et inde ſi magnitudo corporis *Q* proportionalis ſit ipſius vi abſolutæ, erunt vires illæ

NM

NM, *ML* & earum effectus directe ut cubus diametri apparentis longinqui corporis *Q* e corpore *S* ſpectati, & vice verſa. Namq; hæ rationes eædem ſunt atq; ratio ſuperior compoſita.

Corol. 15. Et quoniam ſi, manentibus Orbium *QE* & *PAB* forma, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, & ſi corporum *Q* & *S* vel maneant vel mutentur vires in data quavis ratione, hæ vires (hoc eſt vis corporis *S*, qua corpus *P* de recto tramite in Orbitam *PAB* deflectere, & vis corporis *Q*, qua corpus idem *P* de Orbita illa deviare cogitur) agunt ſemper eodem modo & eadem proportione: neceſſe eſt ut ſimiles & proportionales ſint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora; hoc eſt, ut errores omnes lineares ſint ut Orbium diametri, angulares vero iidem qui prius, & errorum linearium ſimilium vel angularium æqualium tempora ut Orbium tempora periodica.

Corol. 16. Unde, ſi dentur Orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunq; corporum magnitudines, vires & diſtantiæ; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno Caſu colligi poſſunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proxime: Sed brevius hac Methodo. Vires *NM*, *ML* cæteris ſtantibus ſunt ut Radius *SP*, & harum effectus periodici (per Corol. 2, Lem. X) ut vires & quadratum temporis periodici corporis *P* conjunctim. Hi ſunt errores lineares corporis *P*; & hinc errores angulares e centro *S* ſpectati (id eſt tam motus Augis & Nodorum, quam omnes in longitudinem & latitudinem errores apparentes) ſunt in qualibet revolutione corporis *P*, ut quadratum temporis revolutionis quam proxime. Conjungantur hæ rationes cum rationibus Corollarii 14. & in quolibet corporum *S*, *P*, *Q* Syſtemate, ubi *P* circum *S* ſibi propinquum, & *S* circum *Q* longinquum revolvitur, errores angulares corporis *P*, de centro *S* apparentes, erunt, in ſingulis revolutionibus corporis illius *P*, ut quadratum temporis periodici corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *S* inverſe. Et inde motus medius

Au-

Augis erit in data ratione ad motum medium Nodorum; & motus uterq; erit ut tempus periodicum corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *S* inverſe. Augendo vel minuendo Excentricitatem & Inclinationem Orbis *P A B* non mutantur motus Augis & Nodorum ſenſibilitur, niſi ubi eædem ſunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cum autem linea *L M* nunc major ſit nunc minor quam radius *P S*, Exponatur vis mediocris *L M* per radium illum *P S*, & erit hæc ad vim mediocrem *Q K* vel *Q N* (quam exponere licet per *Q S*) ut longitudo *P S* ad longitudinem *Q S*. Eſt autem vis mediocris *Q N* vel *Q S*, qua corpus retinetur in orbe ſuo circum *Q*, ad vim qua corpus *P* retinetur in Orbe ſuo circum *S*, in ratione compoſita ex ratione radii *Q S* ad radium *P S*, & ratione duplicata temporis periodici corporis *P* circum *S* ad tempus periodicum corporis *S* circum *Q*. Et ex æquo, vis mediocris *L M*, ad vim qua corpus *P* retinetur in Orbe ſuo circum *S* (quave corpus idem *P* eodem tempore periodico circum punctum quodvis immobile *S* ad diſtantiam *P S* revolvi poſſet) eſt in ratione illa duplicata periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis una cum diſtantia *P S*, datur vis mediocris L *M*; & ea data datur etiam vis *M N* quamproxime per analogiam linearum *P S*, *M N*.

Corol. 18. Iiſdem legibus quibus corpus *P* circum corpus S revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem S ad æquales ab ipſo diſtantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum ac corpori *S* concentricum; & ſingulæ annuli partes, motus ſuos omnes ad legem corporis *P* peragendo, propius accedent ad corpus *S*, & celerius movebuntur in Conjunctione & Oppoſitione ipſarum & corporis *Q*, quam in Quadraturis. Et Nodi annuli hujus ſeu interſectiones ejus cum plano Orbitæ corporis *Q* vel *S*, qui ſcent in Syzygiis; extra Syzygias vero movebuntur in antecedentia, & velociſſime quidem in Quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoq; inclinatio com-

variabitur, & axis ejus ſingulis revolutionibus oſcillabitur, completaq; revolutione ad priſtinum ſitum redibit, niſi quatenus per præceſſionem Nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam globum corporis *S* ex materia non fluida conſtantem ampliari & extendi uſq; ad hunc annulum, & alveo per circuitum excavato continere Aquam, motuq; eodem periodico circa axem ſuum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in ſuperiore Lemmate) in Syzygiis velocior erit, in Quadraturis tardior quam ſuperficies Globi, & ſic fluet in alveo refluetq; ad modum Maris. Aqua revolvendo circa Globi centrum quieſcens, ſi tollatur attractio *Q*, nullum acquiret motum fluxus & refluxus. Par eſt ratio Globi uniformiter progredientis in directum & interea revolventis circa centrum ſuum (per Legum Corol. 5) ut & Globi de curſu rectilineo uniformiter tracti (per Legum Corol. 6.) Accedat autem corpus *Q*, & ab ipſius inæquabili attractione mox turbabitur Aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem *LM* trahet aquam deorſum in Quadraturis, facietq; ipſam deſcendere uſq; ad Syzygias; & vis *KL* trahet eandem ſurſum in Syzygiis, ſiſtetq; deſcenſum ejus & faciet ipſam aſcendere uſq; ad Quadraturas.

Corol. 20. Si annulus jam rigeat & minuatur Globus, ceſſabit motus fluendi & refluendi; ſed Oſcillatorius ille inclinationis motus & præceſſio Nodorum manebunt. Habeat Globus eundem axem cum annulo, gyroſq; compleat iiſdem temporibus, & ſuperficie ſua contingat ipſum interius, eiq; inhæreat; & participando motum ejus, compages utriuſq; Oſcillabitur & Nodi regredientur. Nam Globus, ut mox dicetur, ad ſuſcipiendas impreſſiones omnes indifferens eſt. Annuli Globo orbati maximus inclinationis angulus eſt ubi Nodi ſunt in Syzygiis. Inde in progreſſu Nodorum ad Quadraturas conatur is inclinationem ſuam minuere, & iſto conatu motum imprimit Globo toti. Retinet Globus motum impreſſum uſq; dum annulus conatu contrario

 mo-

motum hunc tollat, imprimatq; motum novum in contrariam partem: Atq; hac ratione maximus decreſcentis inclinationis motus fit in Quadraturis Nodorum, & minimus inclinationis angulus in Octantibus poſt Quadraturas; dein maximus reclinationis motus in Syzygiis & maximus angulus in Octantibus proximis. Et eadem eſt ratio Globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eſt paulo quam juxta polos, vel conſtat ex materia paulo denſiore. Supplet enim vicem annuli iſte materiæ in æquatoris regionibus exceſſus. Et quanquam, aucta utcunq; Globi hujus vi centripeta, tendere ſupponantur omnes ejus partes deorſum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen Phænomena hujus & præcedentis Corollarii vix inde mutabuntur.

Corol. 21. Eadem ratione qua materia Globi juxta æquatorem redundans efficit ut Nodi regrediantur, atq; adeo per hujus incrementum augetur iſte regreſſus, per diminutionem vero diminuitur & per ablationem tollitur; ſi materia pluſquam redundans tollatur, hoc eſt, ſi Globus juxta æquatorem vel depreſſior reddatur vel rarior quam juxta polos, orietur motus Nodorum in conſequentia.

Corol. 22. Et inde viciſſim ex motu Nodorum innoteſcit conſtitutio Globi. Nimirum ſi Globus polos eoſdem conſtanter ſervat & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; ſi in conſequentia, deficit. Pone Globum uniformem & perfecte circinatum in ſpatiis liberis primo quieſcere; dein impetu quocunq; oblique in ſuperficiem ſuam facto propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam Globus iſte ad axes omnes per centrum ſuum tranſeuntes indifferenter ſe habet, neq; propenſior eſt in unum axem, unumve axis ſitum, quam in alium quemvis; perſpicuum eſt quod is axem ſuum axiſq; inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam Globus oblique in eadem illa ſuperficiei parte qua prius, impulſu quocunq; novo; & cum citior vel ſerior impulſus effectum nil mutet, manifeſtum eſt quod hi duo impulſus

ſus ſucceſſive impreſſi eundem producent motum ac ſi ſimul impreſſi fuiſſent, hoc eſt eundem ac ſi Globus vi ſimplici ex utroq; (per Legum Corol. 2.) compoſita impulſus fuiſſet, atq; adeo ſimplicem, circa axem inclinatione datum. Et par eſt ratio impulſus ſecundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulſus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulſus ſecundus abſq; primo generaret; atq; adeo impulſuum amborum factorum in loca quæcunq;: Generabunt hi eundem motum circularem ac ſi ſimul & ſemel in locum interſectionis æquatorum motuum illorum, quos ſeorſim generarent, fuiſſent impreſſi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures diſtinctos, ſed impreſſos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in ſe eſt, gyratur ſemper motu ſimplici & uniformi circa axem unicum inclinatione ſemper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare poteſt. Si Globus plano quocunq; per centrum ſuum & centrum in quod vis dirigitur tranſeunte dividi intelligatur in duo hemiſphæria, urgebit ſemper vis illa utrumq; hemiphærium æqualiter, & propterea Globum quoad motum rotationis nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi a centro ſui motus, turbabit motum Globi, facietq; polos ejus errare per ipſius ſuperficiem, & circulos circum ſe punctumq; ſibi oppoſitum perpetuo deſcribere. Neq; corrigetur iſta vagationis enormitas, niſi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in Caſu, per Corol. 21, Nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, qua ratione, per Corol. 20, Nodi regredientur; vel deniq; ex altera axis parte addendo materiam novam, qua mons inter movendum libretur: & hoc pacto Nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia ſunt vel polo vel æquatori propiores.

Prop.

Prop. LXVII. Theor. XXVII.

Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius Q, circa interiorum P, S commune Gravitatis centrum C, radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales & Orbem ad formam Ellipſeos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum S, radiis ad ipſum ductis, deſcribere poteſt.

Nam corporis Q attractiones verſus S & P componunt ipſius attractionem abſolutam, quæ magis dirigitur in corporum S & P commune gravitatis centrum C, quam in corpus maximum S, quæq; quadrato diſtantiæ QC magis eſt proportionalis reciproce, quam quadrato diſtantiæ QS: ut rem perpendenti facile conſtabit.

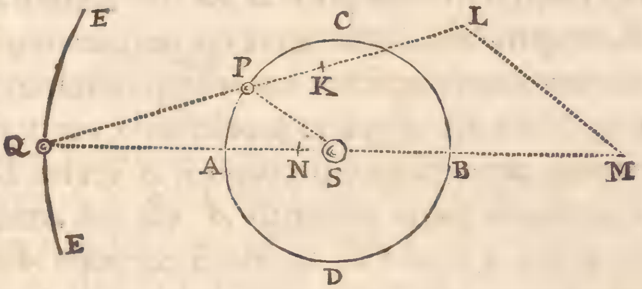
Prop. LXVIII. Theor. XXVIII.

Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius Q circa interiorum P & S commune gravitatis centrum C, radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales, & Orbem ad formam Ellipſeos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, ſi corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atq; cætera agitetur, quam ſi id vel non attractum quieſcat, vel multo magis aut multo minus attractum aut multo magis aut multo minus agitetur.

Demonſtratur eodem fere modo cum Prop. LXVI, ſed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Suffecerit rem ſic æſtimare. Ex demonſtratione Propoſitionis noviſſimæ liquet centrum in quod corpus Q conjunctis viribus urgetur, proximum eſſe communi centro gravitatis illorum duorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quieſceret commune centrum gravitatis corporum trium; deſcriberent corpus Q ex una

na parte, & commune centrum aliorum duorum ex altera parte, circa commune omnium centrum quieſcens, Ellipſes accuratas. Liquet hoc per Corollarium ſecundum Propoſitionis LVIII. collatum cum demonſtratis in Prop. LXIV. & LXV. Perturbatur iſte motus Ellipticus aliquantulum per diſtantiam centri duorum a centro in quod tertium *Q* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima eſt perturbatio, ubi commune trium centrum quieſcit, hoc eſt ubi corpus intimum & maximum *S* lege cæterorum attrahitur: fitq; major ſemper ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis *S*, moveri incipit & magis deinceps magiſq; agitatur.

Corol. Et hinc ſi corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod Orbitæ deſcriptæ propius accedent ad Ellipticas, & arearum deſcriptiones fient magis æquabiles, ſi corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ



ſunt ut eorum vires abſolutæ directe & quadrata diſtantiarum inverſe, ſe mutuo trahent agitentq;, & Orbitæ cujuſq; umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus Orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille Orbitæ ſecundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iſte tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum & ſic deinceps) quam ſi corpus intimum quieſcat & ſtatuatur communis umbilicus orbitarum Omnium.

Prop.

Prop. LXIX. Theor. XXIX.

In Syſtemate corporum plurium A, B, C, D &c. ſi corpus aliquod A trahit cætera omnia B, C, D &c. viribus acceleratricibus quæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a trahente; & corpus aliud B trahit etiam cætera A, C, D &c. viribus quæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a trahente: erunt abſolutæ corporum trahentium A, B vires ad invicem, ut ſunt ipſa corpora A, B, quorum ſunt vires.

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B*, *C*, *D* verſus *A*, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur ex hypotheſi, & ſimiliter attractiones acceleratrices corporum omnium verſus *B*, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur. Eſt autem abſoluta vis attractiva corporis *A* ad vim abſolutam attractivam corporis *B*, ut attractio acceleratrix corporum omnium verſus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium verſus *B*, paribus diſtantiis; & ita eſt attractio acceleratrix corporis *B* verſus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* verſus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* verſus *A* eſt ad attractionem acceleratricem corporis *A* verſus *B*, ut maſſa corporis *A* ad maſſam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per Definitionem ſecundam, ſeptimam & octavam) ex viribus acceleratricibus in corpora attracta ductis oriuntur, ſunt (per motus Legem tertiam) ſibi invicem æquales. Ergo abſoluta vis attractiva corporis *A* eſt ad abſolutam vim attractivam corporis *B*, ut maſſa corporis *A* ad maſſam corporis *B*. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi ſingula Syſtematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ ſint reciproce ut Quadrata diſtantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires abſolutæ ad invicem ut ſunt ipſa corpora.

Corol.

Corol. 2. Eodem argumento, ſi ſingula Syſtematis corpora *A*, *B*, *C*, *D* &c. ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ ſunt vel reciproce vel directe in ratione dignitatis cujuſcunq; diſtantiarum a trahente, quæve ſecundum legem quamcunq; communem ex diſtantiis ab unoquoq; trahente definiuntur; conſtat quod corporum illorum vires abſolutæ ſunt ut corpora.

Corol. 3. In Syſtemate corporum, quorum vires decreſcunt in ratione duplicata diſtantiarum, ſi minora circa maximum in Ellipſibus umbilicum communem in maximi illius centro habentibus quam fieri poteſt accuratiſſimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis deſcribant areas temporibus quam maxime proportionales: erunt corporum illorum vires abſolutæ ad invicem, aut accurate aut quamproxime in ratione corporum; & contra. Patet per Corol. Prop. LXVIII. collatum cum hujus Corol, 1.

Scholium.

His Propoſitionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi ſolent. Rationi enim conſentaneum eſt, ut vires quæ ad corpora diriguntur pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut fit in Magneticis. Et quoties hujuſmodi caſus incidunt, æſtimandæ erunt corporum attractiones, aſſignando ſingulis eorum particulis vires proprias, & colligendo ſummas virium. Vocem attractionis hic generaliter uſurpo pro corporum conatu quocunq; accedendi ad invicem, ſive conatus iſte fiat ab actione corporum vel ſe mutuo petentium, vel per Spiritus emiſſos ſe invicem agitantium, ſive is ab actione Ætheris aut Aeris mediive cujuſcunq; ſeu corporei ſeu incorporei oriatur corpora innatantia in ſe invicem utcunq; impellentis. Eodem ſenſu generali uſurpo vocem impulſus, non ſpecies virium & qualitates phyſicas, ſed quantitates & proportiones Mathematicas in hoc Tractatu expendens: ut in Defini-

nitionibus explicui. In Matheſi inveſtigandæ ſunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuſcunq; poſitis conſequentur: deinde ubi in Phyſicam deſcenditur, conferendæ ſunt hæ rationes cum Phænomenis, ut innoteſcat quænam virium conditiones ſingulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium ſpeciebus, cauſis & rationibus phyſicis tutius diſputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora Sphærica, ex particulis modo jam expoſito attractivis conſtantia, debeant in ſe mutuo agere, & quales motus inde conſequantur.

SECT. XII.

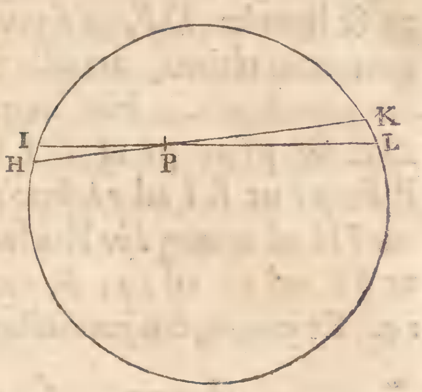
De Corporum Sphæricorum Viribus attractivis.

Prop. LXX. Theor. XXX.

Si ad Sphæricæ ſuperficiei puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: dico quod corpuſculum intra ſuperficiem conſtitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit *HIKL* ſuperficies illa Sphærica, & *P* corpuſculum intus conſtitutum. Per *P* agantur ad hanc ſuperficiem lineæ duæ *HK*, *IL*, arcus quam minimos *HI*, *KL* intercipientes; & ob triangula *HPI*, *LPK* (per Corol. 3. Lem. VII.) ſimilia, arcus illi erunt diſtantiis *HP*, *LP* proportionales, & ſuperficiei Sphæricæ particulæ quævis, ad *HI* & *KL* rectis per punctum *P* tranſeuntibus undiq; terminatæ, erunt in duplicata illa ratione. Ergo vires harum

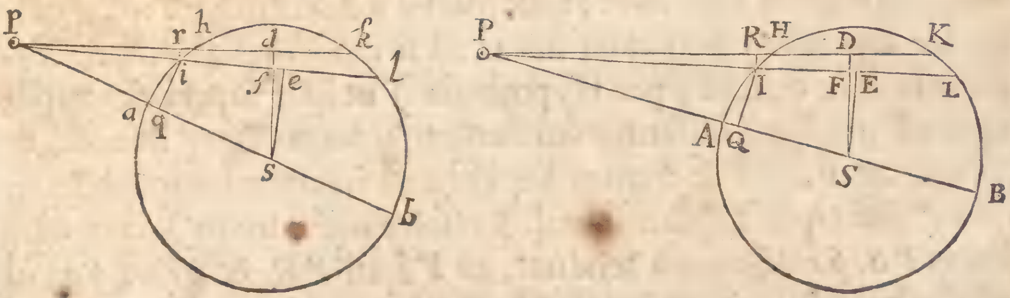
harum particularum in corpus *P* exercitæ ſunt inter ſe æquales. Sunt enim ut particulæ directe & quadrata diſtantiarum inverſe. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur in contrarias partes æqualiter factæ ſe mutuo deſtruunt. Et ſimili argumento attractiones omnes per totam Sphæricam ſuperficiem a contrariis attractionibus deſtruuntur. Proinde corpus *P* nullam in partem his attractionibus impellitur. Q. E. D.



Prop. LXXI. Theor. XXXI.

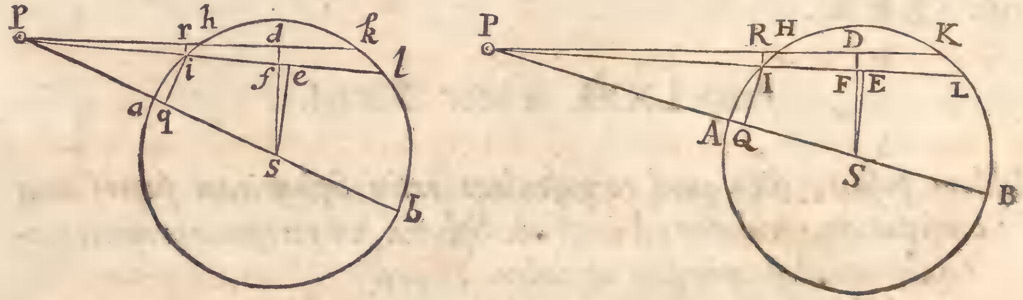
Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra Sphæricam ſuperficiem conſtitutum attrahitur ad centrum Sphæræ, vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab eodem centro.

Sint *AHKB*, *ahkb* æquales duæ ſuperficies Sphæricæ, centris *S*, *s*, diametris *AB*, *ab* deſcriptæ, & *P*, *p* corpuſcula ſita extrinſecus in diametris illis productis. Agantur a corpuſculis lineæ



PHK, *PIL*, *phk*, *pil*, auferentes a circulis maximis *AHB*, *ahb*, æquales arcus quam minimos *HK*, *hk* & *HL*, *hl*: Et ad eas demittantur perpendicula *SD*, *sd*; *SE*, *se*; *IR*, *ir*; quorum

SD, sd ſecent PL, pl in F & f. Demittantur etiam ad diametros perpendicula IQ, iq; & ob æquales DS & ds, ES & es, & angulos evaneſcentes DPE & dpe, lineæ PE, PF & pe, pf & lineolæ DF, df pro æqualibus habeantur: quippe quarum ratio ultima, angulis illis DPE, dpe ſimul evaneſcentibus, eſt æqualitatis. His itaq; conſtitutis, erit PI ad PF ut RI ad DF, & pf ad pi ut DF vel df ad ri; & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut RI ad ri, hoc eſt (per Corol. 3. Lem. VII.) ut arcus IH ad arcum ih. Rurſus PI ad PS ut IQ ad SE, & ps ad pi ut SE vel se ad iq; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut IQ ad iq. Et conjunctis rationibus PI *quad.* $\times pf \times ps$ ad pi *quad.* $\times PF$



$\times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc eſt, ut ſuperficies circularis, quam arcus IH convolutione ſemicirculi AKB circa diametrum AB deſcribet, ad ſuperficiem circularem, quam arcus ih convolutione ſemicirculi akb circa diametrum ab deſcribet. Et vires, quibus hæ ſuperficies ſecundum lineas ad ſe tendentes attrahunt corpuſcula P & p, ſunt (per Hypotheſin) ut ipſæ ſuperficies applicatæ ad quadrata diſtantiarum ſuarum a corporibus, hoc eſt, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntq; hæ vires ad ipſarum partes obliquas quæ (facta per Legum Corol. 2 reſolutione virium) ſecundum lineas PS, ps ad centra tendunt, ut PI ad PQ, & pi ad pq; id eſt (ob ſimilia triangula PIQ & PSF, piq & psf) ut PS ad PF & ps ad pf. Unde ex æquo fit attractio corpuſculi hujus P verſus S ad attractionem corpuſculi p verſus s, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad

pf

$\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc eſt ut *p s quad.* ad *P S quad.* Et ſimili argumento vires, quibus ſuperficies convolutione arcuum *K L*, *kl* deſcriptæ trahunt corpuſcula, erunt ut *p s quad.* ad *P S quad.*; inq; eadem ratione erunt vires ſuperficierum omnium circularium in quas utraq; ſuperficies Sphærica, capiendo ſemper $sd = SD$ & $se = SE$, diſtingui poteſt. Et per Compoſitionem, vires totarum ſuperficierum Sphæricarum in corpuſcula exercitæ erunt in eadem ratione. *Q. E. D.*

Prop. LXXII. Theor. XXXII.

Si ad Sphæræ cujuſvis puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis, ac detur ratio diametri Sphæræ ad diſtantiam corpuſculi a centro ejus; dico quod vis qua corpuſculum attrahitur proportionalis erit ſemidiametro Sphæræ.

Nam concipe corpuſcula duo ſeorſim a Sphæris duabus attrahi, & diſtantias a centris proportionales eſſe diametris, Sphæras autem reſolvi in particulas ſimiles & ſimiliter poſitas ad corpuſcula. Hinc attractiones corpuſculi unius, factæ verſus ſingulas particulas Sphæræ unius, erunt ad attractiones alterius verſus analogas totidem particulas Sphæræ alterius, in ratione compoſita ex ratione particularum directe & ratione duplicata diſtantiarum inverſe. Sed particulæ ſunt ut Sphæræ, hoc eſt in ratione triplicata diametrorum, & diſtantiæ ſunt ut diametri, & ratio prior directe una cum ratione poſteriore bis inverſe eſt ratio diametri ad diametrum. Q. E. D.

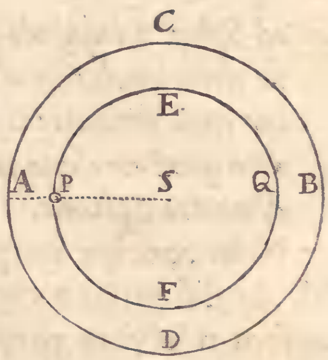
Corol. 1. Hinc ſi corpuſcula in circulis circa Sphæras ex materia æqualiter attractiva conſtantes revolvantur, ſintq; diſtantiæ a centris Sphærarum proportionales earundem diametris; tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice verſa, ſi tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris. Conſtant hæc duo per Corol. 3. Theor. IV.

Prop. LXXIII. Theor. XXXIII.

Si ad ſphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales vires centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: dico quod corpuſculum intra Sphæram conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

In Sphæra *ABCD*, centro *S* deſcripta, locetur corpuſculum *P*, & centro eodem *S* intervallo *SP* concipe Sphæram interiorem *PEQF* deſcribi. Manifeſtum eſt, per Theor. XXX. quod Sphæricæ ſuperficies concentricæ, ex quibus Sphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus per attractiones contrarias deſtructis, nil agunt in corpus *P*. Reſtat ſola attractio Sphæræ interioris *PEQF*. Et per Theor. XXXII. hæc eſt ut diſtantia *PS*. Q. E. D.



Scholium.

Superficies ex quibus ſolida componuntur, hic non ſunt pure Mathematicæ, ſed Orbes adeo tenues ut eorum craſſitudo inſtar nihili ſit; nimirum Orbes evaneſcentes ex quibus Sphæra ultimo conſtat, ubi Orbium illorum numerus augetur & craſſitudo minuitur in infinitum, juxta Methodum ſub initio in Lemmatis generalibus expoſitam. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, ſuperficies & ſolida componi dicuntur, intelligendæ ſunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

Prop.

Prop. LXXIV. Theor. XXXIV.

Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra Sphæram conſtitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

Nam diſtinguatur Sphæra in ſuperficies Sphæricas innumeras concentricas, & attractiones corpuſculi a ſingulis ſuperficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato diſtantiæ corpuſculi a centro, per Theor. XXXI. Et componendo, fiet ſumma attractionum, hoc eſt attractio Sphæræ totius, in eadem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in æqualibus diſtantiis a centris homogenearum Sphærarum, attractiones ſunt ut Sphæræ. Nam per Theor. XXXII. ſi diſtantiæ ſunt proportionales diametris Sphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur diſtantia major in illa ratione, & diſtantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione, adeoq; erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc eſt in ratione Sphærarum.

Corol. 2. In diſtantiis quibuſvis attractiones ſunt ut Sphæræ applicatæ ad quadrata diſtantiarum.

Corol. 3. Si corpuſculum extra Sphæram homogeneam poſitum trahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro, conſtet autem Sphæra ex particulis attractivis; decreſcet vis particulæ cujuſq; in duplicata ratione diſtantiæ a particula.

Prop. LXXV. Theor. XXXV.

Si ad Sphæræ datæ puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis, dico quod Sphæra quævis alia ſimilaris attrahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ centrorum.

Nam particulæ cujuſvis attractio eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ ejus a centro Sphæræ trahentis, (per Theor. XXXI,) &

prop-

propterea eadem eſt ac ſi vis tota attrahens manaret de corpuſculo unico ſito in centro hujus Sphæræ. Hæc autem attractio tanta eſt quanta foret viciſſim attractio corpuſculi ejuſdem, ſi modo illud a ſingulis Sphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur qua ipſas attrahit. Foret autem illa corpuſculi attractio (per Theor XXXIV) reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ ejus a centro Sphæræ; adeoq; huic æqualis attractio Sphæræ eſt in eadem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Attractiones Sphærarum, verſus alias Sphæras homogeneas, ſunt ut Sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum centrorum ſuorum a centris earum quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet ubi Sphæra attracta etiam attrahit. Namq; hujus puncta ſingula trahent ſingula alterius, eadem vi qua ab ipſis viciſſim trahuntur, adeoq; cum in omni attractione urgeatur (per Legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conſervatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ ſuperius de motu corporum circa umbilicum Conicarum Sectionum demonſtrata ſunt, obtinent ubi Sphæra attrahens locatur in umbilico & corpora moventur extra Sphæram.

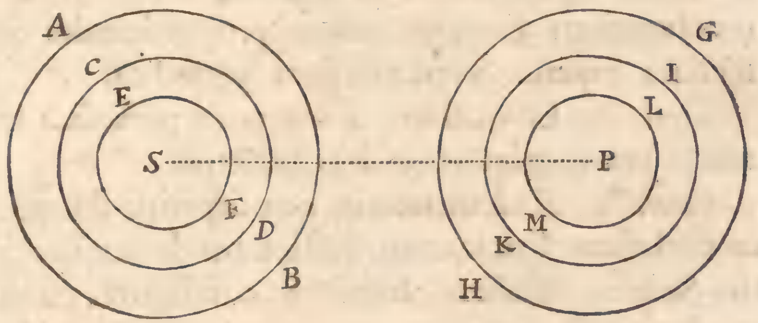
Corol. 4. Ea vero quæ de motu corporum circa centrum Conicarum Sectionum demonſtrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra Sphæram.

Prop. LXXVI. Theor. XXXVI.

Si Sphæræ in progreſſu a centro ad circumferentiam (quod materiæ denſitatem & vim attractivam) utcunq; diſſimilares, in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem a centro diſtantiam ſunt undiq; ſimilares, & vis attractiva puncti cujuſq; decreſcit in duplicata ratione diſtantiæ corporis attracti: dico quod vis tota qua hujuſmodi Sphæra una attrahit aliam ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ centrorum.

Sunto

Sunto Sphæræ quotcunq; concentricæ ſimilares *AB*, *CD*, *EF* &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam denſiorem verſus centrum, vel ſubductæ relinquant tenuiorem; & hæ, per Theor. XXXV, trahent Sphæras alias quotcunq; concentricas ſimilares *GH*, *IK*, *LM*, &c. ſingulæ ſingulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato diſtantiæ *SP*. Et componendo vel dividendo, ſumma virium illarum omnium, vel exceſſus aliquarum ſupra alias, hoc eſt, vis qua Sphæra tota ex concentricis quibuſcunq; vel concentricarum differentiis compoſita *AB*, trahit totam ex concentricis quibuſcunq; vel concentricarum differentiis compoſitam *GH*, erit in eadem ratione. Augeatur numerus Sphærarum concentricarum in infinitum ſic, ut materiæ denſitas una cum vi attractiva, in progreſſu a circumferentia ad centrum, ſecundum Legem quamcunq; creſcat vel decreſcat: & addita materia non attractiva compleatur ubivis denſitas deficiens, eo ut Sphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis qua harum una attrahet alteram erit etiamnum (per argumentum ſuperius) in eadem illa diſtantiæ quadratæ ratione inverſa. Q.E.D.



Corol. 1. Hinc ſi ejuſmodi Sphæræ complures ſibi invicem per omnia ſimiles ſe mutuo trahant; attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt in æqualibus quibuſvis centrorum diſtantiis ut Sphæræ attrahentes.

Corol. 2. Inq; diſtantiis quibuſvis inæqualibus, ut Sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter centra.

Corol.

Corol. 3. Attractiones vero motrices, ſeu pondera Sphærarum in Sphæras erunt, in æqualibus centrorum diſtantiis, ut Sphæræ attrahentes & attractæ conjunctim, id eſt, ut contenta ſub Sphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inq; diſtantiis inæqualibus, ut contenta illa applicata ad quadrata diſtantiarum inter centra.

Corol. 5. Eadem valent ubi attractio oritur a Sphæræ utriuſq; virtute attractiva, mutuo exercita in Sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione ſervata.

Corol. 6. Si hujuſmodi Sphæræ aliquæ circa alias quieſcentes revolvantur, ſingulæ circa ſingulas, ſintq; diſtantiæ inter centra revolventium & quieſcentium proportionales quieſcentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

Corol. 7. Et viciſſim, ſi tempora periodica ſunt æqualia, diſtantiæ erunt proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ ſuperius de motu corporum circa umbilicos Conicarum Sectionum demonſtrata ſunt, obtinent ubi Sphæra attrahens, formæ & conditionis cujuſvis jam deſcriptæ, locatur in umbilico.

Corol. 9. Ut & ubi gyrantia ſunt etiam Sphæræ attrahentes, conditionis cujuſvis jam deſcriptæ.

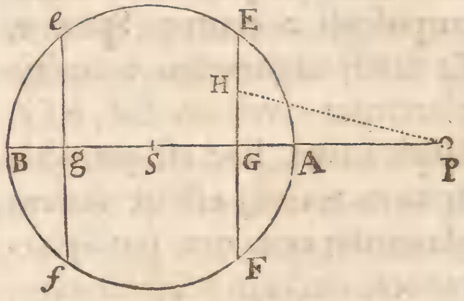
Prop. LXXVII. Theor. XXXVII.

Si ad ſingula Sphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales diſtantiis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis compoſita, qua Sphæræ duæ ſe mutuo trahent, eſt ut diſtantia inter centra Sphærarum.

Cas 1. Sit *ACBD* Sphæra, *S* centrum ejus, *P* corpuſculum attractum, *PASB* axis Sphæræ per centrum corpuſculi tranſiens, *EF*, *ef* plana duo quibus Sphæra ſecatur, huic axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter diſtantia a centro Sphæræ; *Gg* interſectiones planorum & axis, & *H* punctum quodvis in plano *EF*.

Puncti

Puncti *H* vis centripeta in corpuſculum *P* ſecundum lineam *PH* exercita eſt ut diſtantia *PH*, & (per Legum Corol. 2.) ſecuncundum lineam *PG*, ſeu verſus centrum *S*, ut longitudo *PG*. Igitur punctorum omnium in plano *EF*, hoc eſt plani totius vis, qua corpuſculum *P* trahitur verſus centrum *S*, eſt ut numerus punctorum ductus in diſtantiam *PG*: id eſt ut contentum ſub plano ipſo *EF* & diſtantia illa *PG*. Et ſimiliter vis plani *ef*, qua corpuſculum *P* trahitur verſus centrum S, eſt ut planum illud ductum in diſtantiam ſuam *Pg*; ſive ut huic æquale planum *EF* ductum in diſtantiam illam *Pg*; & ſumma virium plani utriuſq; ut planum *EF* ductum in ſummam diſtantiarum *PG* + *Pg*, id eſt, ut planum illud ductum in duplam centri & corpuſculi diſtantiam *PS*, hoc eſt, ut duplum planum *EF* ductum in diſtantiam *PS*, vel ut ſumma æqualium planorum *EF* + *ef* ducta in diſtantiam eandem. Et ſimili argumento, vires omnium planorum in Sphæra tota, hinc inde æqualiter a centro Sphæræ diſtantium, ſunt ut ſumma planorum ducta in diſtantiam *PS*, hoc eſt, ut Sphæra tota ducta in diſtantiam centri ſui *S* a corpuſculo *P*. Q. E. D.



Cas. 2. Trahat jam corpuſculum *P* Sphæram *ACBD*. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua Sphæra illa trahitur, erit ut diſtantia *PS*. Q. E. D.

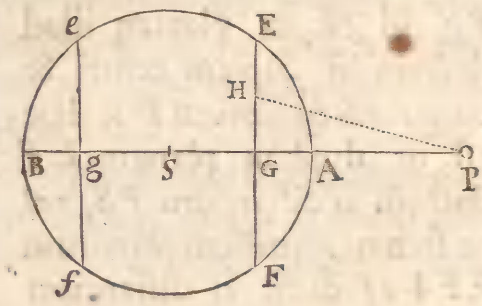
Cas 3. Componatur jam Sphæra altera ex corpuſculis innumeris *P*; & quoniam vis, qua corpuſculum unumquodq; trahitur, eſt ut diſtantia corpuſculi a centro Sphæræ primæ ducta in Sphæram eandem, atq; adeo eadem eſt ac ſi prodiret tota de corpuſculo unico in centro Sphæræ; vis tota qua corpuſcula omnia in Sphæra ſecunda trahuntur, hoc eſt, qua Sphæra illa tota trahitur, eadem erit ac ſi Sphæra illa traheretur vi prodeunte de corpuſ-

 culo

culo unico in centro Sphæræ primæ, & propterea proportionalis eſt diſtantiæ inter centra Sphærarum. Q. E. D.

Caſ. 4. Trahant Sphæræ ſe mutuo, & vis geminata proportionem priorem ſervabit. Q. E. D.

Caſ, 5. Locetur jam corpuſculum *p* intra Sphæram *ACBD*, & quoniam vis plani *ef* in corpuſculum eſt ut contentum ſub plano illo & diſtantia *pg*; & vis contraria plani *EF* ut contentum ſub plano illo & diſtantia *pG*; erit vis ex utraq; compoſita ut differentia contentorum, hoc eſt, ut ſumma æqualium planorum ducta in ſemiſſem differentiæ diſtantiarum, id eſt, ut ſumma illa ducta in *pS*, diſtantiam corpuſculi a centro Sphæræ. Et ſimili argumento attractio planorum omnium *EF*, *ef* in Sphæra tota, hoc eſt attractio Sphæræ totius, eſt ut ſumma planorum omnium, ſeu Sphæra tota, ducta in *pS* diſtantiam corpuſculi a centro Sphæræ. Q. E. D.



Caſ. 6. Et ſi ex corpuſculis innumeris *p* componatur Sphæra nova intra Sphæram priorem *ACBD* ſita, probabitur ut prius, quod attractio, ſive ſimplex Sphæræ unius in alteram, ſive mutua utriuſq; in ſe invicem, erit ut diſtantia centrorum *pS*. Q. E. D.

Prop. LXXVIII. Theor. XXXVIII.

Si Sphæræ in progreſſu a centro ad circumferentiam ſint utcunq; diſſimilares & inæquabiles, in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem a centro diſtantiam ſint undiq; ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſq; ſit ut diſtantia corporis attracti: dico quod vis tota qua hujuſmodi Sphæræ duæ ſe mutuo trahunt ſit proportionalis diſtantiæ inter centra Sphærarum.

De-

Demonſtratur ex Propoſitione præcedente, eodem modo quo Propoſitio LXXVII. ex Propoſitione LXXV. demonſtrata fuit.

Corol. Quæ ſuperius in Propoſitionibus X. & LXIV. de motu corporum circa centra Conicarum Sectionum demonſtrata ſunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi Corporum Sphæricorum, conditionis jam deſcriptæ, ſuntq; corpora attracta Sphæræ conditionis ejuſdem.

Scholium.

Attractionum Caſus duos inſigniores jam dedi expoſitos; nimirum ubi vires centripetæ decreſcunt in duplicata diſtantiarum ratione, vel creſcunt in diſtantiarum ratione ſimplici; efficientes in utroq; Caſu ut corpora gyrentur in Conicis Sectionibus, & componentes corporum Sphæricorum vires centripetas eadem lege in receſſu à centro decreſcentes vel creſcentes cum ſeipſis. Quod eſt notatu dignum. Caſus cæteros, qui concluſiones minus elegantes exhibent, ſigillatim percurrere longum eſſet: Malim cunctos methodo generali ſimul comprehendere ac determinare, ut ſequitur.

Lemma XXIX.

Si deſcribantur centro S circulus quilibet A E B, (Vide Fig. Prop. ſequentis) *& centro P circuli duo E F, e f, ſecantes priorem in E, e, lineamq; P S in F, f; & ad P S demittantur perpendicula E D, e d: dico quod ſi diſtantia arcuum E F, e f in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evaneſcentis D d ad lineam evaneſcentem F f ea ſit, quæ lineæ P E ad lineam P S.*

Nam ſi linea *P e* ſecet arcum *E F* in *q*; & recta *E e*, quæ cum arcu evaneſcente *E e* coincidit, producta occurrat rectæ *P S* in *T*; & ab *S* demittatur in *P E* normalis *SG*: ob ſimilia triangula *EDT*, *edt*, *EDS*; erit *Dd* ad *Ee* ut *DT* ad *ET* ſeu *DE* ad

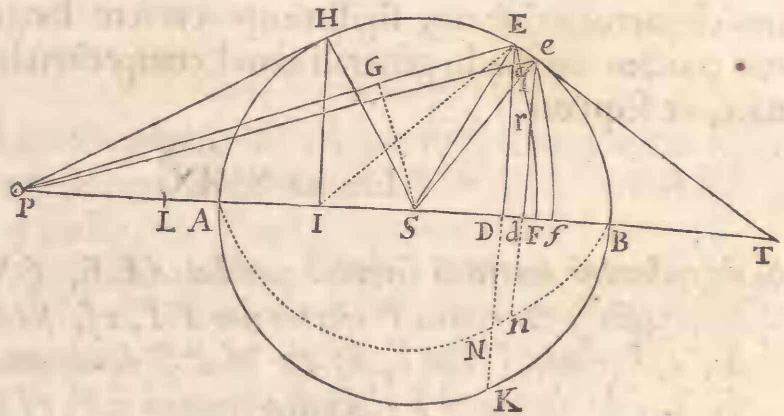
 ES,

ES, & ob triangula Eqe, ESG (per Lem. VIII. & Corol. 3. Lem. VII.) ſimilia, erit Ee ad qe ſeu Ff, ut ES ad SG, & ex æquo Dd ad Ff ut DE ad SG; hoc eſt (ob ſimilia triangula PDE, PGS) ut PE ad PS. Q.E.D.

Prop. LXXIX. Theor. XXXIX.

Si ſuperficies ob latitudinem infinite diminutam jamjam evaneſcens $EFfe$, *convolutione ſui circa axem* PS, *deſcribat ſolidum Sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, qua ſolidum illud trahit corpuſculum ſitum in* P, *eſt in ratione compoſita ex ratione ſolidi* $DEq. \times Ff$ *& ratione vis qua particula data in loco* Ff *traheret idem corpuſculum.*

Nam ſi primo conſideremus vim ſuperficiei Sphæricæ FE, quæ convolutione arcus FE generatur, & linea de ubivis ſecatur in r; erit ſuperficiei pars annularis, convolutione arcus rE genita, ut lineola Dd, manente Sphæræ radio PE, (uti demonſtravit *Archimedes* in Lib. de Sphæra & Cylindro.)



Et hujus vis ſecundum lineas PE vel Pr undiq; in ſuperficie conica ſitas exercita, ut hæc ipſa ſuperficiei pars annularis; hoc eſt, ut lineola Dd, vel quod perinde eſt, ut rectangulum ſub dato Sphæræ radio PE & lineola illa Dd: at ſecundum lineam PS ad centrum S tendentem

tem minor, in ratione *PD* ad *PE*, adeoq; ut *PD* x *Dd*. Dividi jam intelligatur linea *DF* in particulas innumeras æquales, quæ ſingulæ nominentur *Dd*; & ſuperficies *FE* dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut ſumma omnium *PD* x *Dd*, hoc eſt, cum lineolæ omnes *Dd* ſibi invicem æquentur, adeoq; pro datis haberi poſſint, ut ſumma omnium *PD* ducta in *Dd*, id eſt, ut $\frac{1}{2}$ *PFq.* − $\frac{1}{2}$ *PDq.* ſive $\frac{1}{2}$ *PEq.* − $\frac{1}{2}$ *PDq.* vel $\frac{1}{2}$ *DEq.* ductum in *Dd*; hoc eſt, ſi negligatur data $\frac{1}{2}$ *Dd*, ut *DE quad.* Ducatur jam ſuperficies *FE* in altitudinem *Ff*; & fiet ſolidi *EFfe* vis exercita in corpuſculum *P* ut *DEq.* x *Ff*: puta ſi detur vis quam particula aliqua data *Ff* in diſtantia *PF* exercet in corpuſculum *P*. At ſi vis illa non detur, fiet vis ſolidi *EFfe* ut ſolidum *DEq.* x *Ff* & vis illa non data conjunctim. Q. E. D.

Prop. LXXX. Theor. XL.

Si ad Sphæræ alicujus AEB, centro S deſcriptæ, particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad Sphæræ axem AB, in quo corpuſculum aliquod P locatur, erigantur de punctis ſingulis D perpendicula DE, Sphæræ occurrentia in E, & in ipſis capiantur longitudines DN, quæ ſint ut quantitas $\frac{DEq. \times PS}{PE}$ *& vis quam Sphæræ particula ſita in axe ad diſtantiam PE exercet in corpuſculum P conjunctim: dico quod vis tota, qua corpuſculum P trahitur verſus Sphæram, eſt ut area comprehenſa ſub axe Sphæræ AB & linea curva ANB, quam punctum N perpetuo tangit.*

Etenim ſtantibus quæ in Lemmate & Theoremate noviſſimo conſtructa ſunt, concipe axem Sphæræ *AB* dividi in particulas innumeras æquales *Dd*, & Sphæram totam dividi in totidem laminas Sphæricas concavo-convexas *EFfe*; & erigatur perpendiculum *dn*. Per Theorema ſuperius, vis qua lamina *EFfe* trahit corpuſculum *P* eſt ut *DEq.* x *Ff* & vis particulæ unius ad diſtantiam *PE* vel *PF* exercita conjunctim. Eſt autem per Lemma

ma noviſſimum, Dd ad Ff ut PE ad PS, & inde Ff æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq. \times Ff$ æquale Dd in $\frac{DEq. \times PS}{PE}$, & propterea vis laminæ $EFfe$ eſt ut Dd in $\frac{DEq. \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad diſtantiam PF exercita conjunctim, hoc eſt (ex Hypotheſi) ut $DN \times Dd$, ſeu area evaneſcens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires in corpus P exercitæ, ut areæ omnes $DNnd$, hoc eſt Sphæræ vis tota ut area tota $ABNA$. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta ad particulas ſingulas tendens, eadem ſemper maneat in omnibus diſtantiis, & fiat DN ut $\frac{DEq. \times PS}{PE}$: erit vis tota qua corpuſculum a Sphæra attrahitur, ut area $ABNA$.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta ſit reciproce ut diſtantia corpuſculi a ſe attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq. \times PS}{PEq.}$: erit vis qua corpuſculum P a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

Corol. 3. Si particularum vis centripeta ſit reciproce ut cubus diſtantiæ corpuſculi a ſe attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq. \times PS}{PE\,q.q.}$: erit vis qua corpuſculum a tota Sphæra attrahitur ut area $ABNA$.

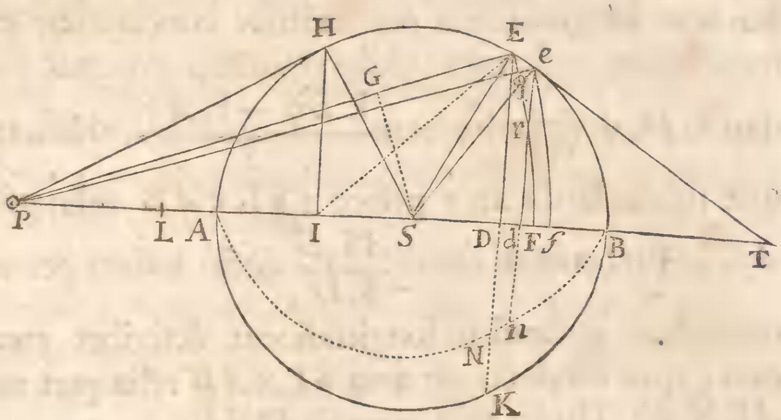
Corol. 4. Et univerſaliter ſi vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ponatur eſſe reciproce ut quantitas V, fiat autem DN ut $\frac{DEq. \times PS}{PE \times V}$; erit vis qua corpuſculum a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

Prop. LXXXI. Prob. XLI.

Stantibus jam poſitis, menſuranda eſt area ABNA.

A puncto P ducatur recta PH Sphæram tangens in H, & ad axem PAB demiſſa Normali HI, biſecetur PI in L; & erit (per

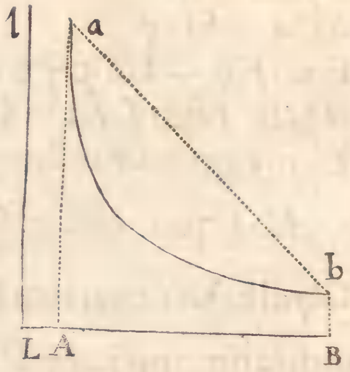
(per Prop. 12, Lib. 2. Elem.) $PEq.$ æquale $PSq.+SEq.+2PSD$. Eſt autem $SEq.$ ſeu $SHq.$ (ob ſimilitudinem triangulorum SPH, SHI) æquale rectangulo PSI. Ergo $PEq.$ æquale eſt contento ſub PS & $PS+SI+2SD$, hoc eſt, ſub PS & $2LS+2SD$, id eſt, ſub PS & $2LD$. Porro $DE\,quad$ æquale eſt $SEq.-SDq.$ ſeu $SEq.-LSq.+2SLD-LDq.$ id eſt, $SLD-LDq.-ALB$. Nam $LSq.-SEq.$ ſeu $LSq.-SAq.$ (per Prop. 6 Lib. 2. Elem) æquatur rectangulo ALB. Scribatur itaq; $2SLD-LDq.-ALB$ pro $DEq.$ & quantitas $\frac{DEq.\times PS}{PE\times V}$, quæ ſecundum Corollarium quartum Propoſitionis præcedentis eſt ut longitudo ordinatim applicatæ DN, reſolvet ſeſe in tres partes $\frac{2SLD\times PS}{PE\times V}-\frac{LDq.\times PS}{PE\times V}-\frac{ALB\times PS}{PE\times V}$: ubi ſi pro V ſcribatur ratio inverſa vis centripetæ, & pro PE medium proportionale inter PS & $2LD$; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum areæ per Methodos vulgatas innoteſcunt. Q. E. F.



Exempl. 1. Si vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ſit reciproce ut diſtantia; pro V ſcribe diſtantiam PE, dein $2PS\times LD$ pro $PEq.$, & fiet DN ut $SL-\frac{1}{2}LD-\frac{ALB}{2LD}$.

Pone

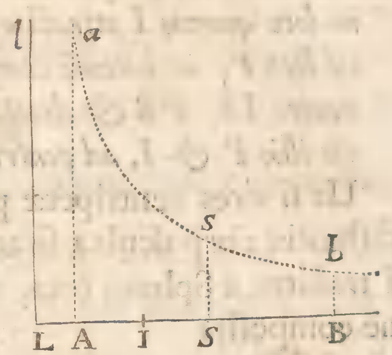
Pone DN æqualem duplo ejus $2\,SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $2\,SL$ ducta in longitudinem AB deſcribet aream rectangulam $2\,SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, ea lege ut inter movendum creſcendo vel decreſcendo æquetur ſemper longitudini LD, deſcribet aream $\frac{LBq. - LAq.}{2}$, id eſt, aream $SL \times AB$; quæ ſubducta de area priore $2\,SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$ ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, deſcribet aream Hyperbolicam; quæ ſubducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quæſitam $ABNA$. Unde talis emergit Problematis conſtructio. Ad puncta L, A, B erige perpendicula Ll, Aa, Bb, quorum Aa ipſi LB, & Bb ipſi LA æquetur. Aſymptotis Ll, LB, per puncta a, b deſcribatur Hyperbola ab. Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæſitæ $ABNA$ æqualem.



Exempl. 2. Si vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ſit reciproce ut cubus diſtantiæ, vel (quod perinde eſt) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; ſcribe $\frac{PE\,cub.}{2\,ASq.}$ pro V, dein $2\,PS \times LD$ pro $PEq.$; & fiet DN ut $\frac{SL \times ASq.}{PS \times LD} - \frac{ASq.}{2\,PS} - \frac{ALB \times ASq.}{2\,PS \times LDq.}$ id eſt (ob continue proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2\,LDq.}$. Si ducantur hujus partes

tres

tres in longitudinem AB, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream Hyperbolicam; ſecunda $\frac{1}{2}SI$ aream $\frac{1}{2}AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq.}$ aream $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id eſt $\frac{1}{2}AB \times SI$. De prima ſubducatur ſumma ſecundæ ac tertiæ, & manebit area quæſita $ABNA$. Unde talis emergit Problematis conſtructio. Ad puncta L, A, S, B erige perpendicula Ll, Aa, Ss, Bb, quorum Ss ipſi SI æquetur, perq; punctum s Aſymptotis Ll, LB deſcribatur Hyperbola asb occurrens perpendiculis Aa, Bb in a & b; & rectangulum $2ASI$ ſubductum de area Hyperbolica $AasbB$ relinquet aream quæſitam $ABNA$.



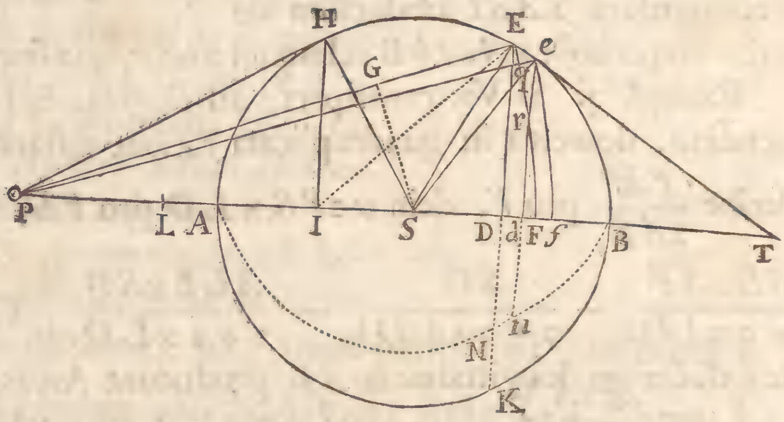
Exempl. 3. Si Vis centripeta, ad ſingulas Sphæræ particulas tendens, decreſcit in quadruplicata ratione diſtantiæ a particulis, ſcribe $\frac{PE^4}{2AS^3}$ pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ pro PE, & fiet DN ut $\frac{SL \times SI^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2} \times LD^{\frac{3}{2}}} - \frac{SI^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2} \times LD^{\frac{1}{2}}} - \frac{ALB \times SI^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2} \times LD^{\frac{5}{2}}}$. Cujus tres partes ductæ in longitudinem AB, producunt Areas totidem, *viz.* $\frac{\sqrt{2} \times SL \times SI^{\frac{3}{2}}}{LA^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sqrt{2} \times SL \times SI^{\frac{3}{2}}}{LB^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{LB^{\frac{1}{2}} \times SI^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{1}{2}} \times SI^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}$ & $\frac{ALB \times SI^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2} \times LA^{\frac{3}{2}}} - \frac{ALB \times SI^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2} \times LB^{\frac{3}{2}}}$. Et hæ poſt debitam reductionem, ſubductis poſterioribus de priori, evadunt $\frac{8SI\,cub.}{3LI}$. Igitur vis tota, qua corpuſculum P in Sphæræ centrum trahitur, eſt ut $\frac{SI\,cub.}{PI}$, id eſt reciproce ut $PS\,cub. \times PI$. Q. E. I.

Eadem Methodo determinari poteſt attractio corpuſculi ſiti intra Sphæram, ſed expeditius per Theorema ſequens.

Prop. LXXXII. Theor. XLI.

In Sphæra centro S intervallo SA deſcripta, ſi capiantur SI, SA, SP continue proportionales: dico quod corpuſculi intra Sphæram in loco quovis I attractio eſt ad attractionem ipſius extra Sphæram in loco P, in ratione compoſita ex dimidiata ratione diſtantiarum a centro IS, PS & dimidiata ratione virium centripetarum, in locis illis P & I, ad centrum tendentium.

Ut ſi vires centripetæ particularum Sphæræ ſint reciproce ut diſtantiæ corpuſculi a ſe attracti; vis, qua corpuſculum ſitum in *I* trahitur a Sphæra tota, erit ad vim qua trahitur in *P*, in ratione compoſita ex dimidiata ratione diſtantiæ *SI* ad diſtantiam *SP* & ratione dimidiata vis centripetæ in loco *I*, a particula aliqua in centro oriundæ,



ad vim centripetam in loco *P* ab eadem in centro particula oriundam, id eſt, ratione dimidiata diſtantiarum *SI*, *SP* ad invicem reciproce. Hæ duæ rationes dimidiatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in *I* & *P* a Sphæra tota factæ æquantur. Simili computo, ſi vires particularum Sphæræ ſunt reciproce in duplicata ratione diſtantiarum, colligetur quod attractio in *I* ſit ad attractionem in *P*, ut diſtantia *SP* ad Sphæræ ſemi-

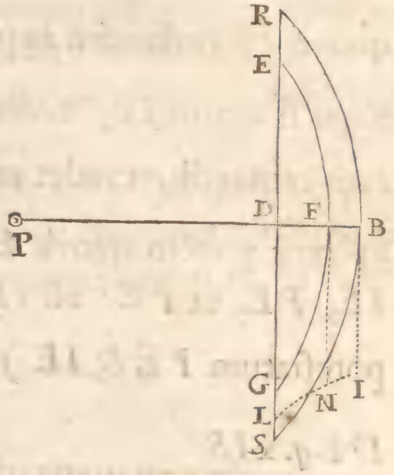
ſemidiametrum SA: Si vires illæ ſunt reciproce in triplicata ratione diſtantiarum, attractiones in I & P erunt ad invicem ut SP *quad.* ad SA *quad.*; ſi in quadruplicata, ut SP *cub.* ad SA *cub.* Unde cum attractio in P, in hoc ultimo caſu, inventa fuit reciproce ut PS *cub.* x PI, attractio in I erit reciproce ut SA *cub.* x PI, id eſt (ob datum SA *cub.*) reciproce ut PI. Et ſimilis eſt progreſſus in infinitum. Theorema vero ſic demonſtratur.

Stantibus jam ante conſtructis, & exiſtente corpore in loco quovis P, ordinatim applicata DN inventa fuit ut $\frac{DEq. \times PS}{PE \times V}$. Ergo ſi agatur IE, ordinata illa ad alium quemvis locum I, mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq. \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, e Sphæræ puncto quovis E manantes, eſſe ad invicem in diſtantiis IE, PE, ut PE^n ad IE^n, (ubi numerus n deſignet indicem poteſtatum PE & IE) & ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq. \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DEq. \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem eſt ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob ſimilia triangula SPE, SEI, fit IE ad PE ut IS ad SE vel SA; pro ratione IE ad PE ſcribe rationem IS ad SA; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. Sed PS ad SA dimidiata eſt ratio diſtantiarum PS, SI; & IE^n ad PE^n dimidiata eſt ratio virium in diſtantiis PS, IS. Ergo ordinatæ, & propterea areæ quas ordinatæ deſcribunt, hiſq; proportionales attractiones, ſunt in ratione compoſita ex dimidiatis illis rationibus. Q. E. D.

Prop. LXXXIII. Prob. XLII.

Invenire vim qua corpuſculum in centro Sphæræ locatum ad ejus ſegmentum quodcunq; attrahitur.

Sit *P* corpus in centro Sphæræ, & *RBSD* ſegmentum ejus plano *RDS* & ſuperficie Sphærica *RBS* contentum. Superficie Sphærica *EFG* centro *P* deſcripta ſecetur *DB* in *F*, ac diſtinguatur ſegmentum in partes *BREFGS*, *FEDG*. Sit autem ſuperficies illa non pure Mathematica, ſed Phyſica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur iſta profunditas *O*, & erit hæc ſuperficies (per demonſtata *Archimedis*) ut $PF \times DF \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum Sphæræ eſſe reciproce ut diſtantiarum dignitas illa cujus Index eſt *n*; & vis qua ſuperficies *FE* trahit corpus *P* erit ut $\frac{DF \times O}{PF^{n-1}}$. Huic proportionale ſit perpendiculum *FN* ductum in *O*; & area curvilinea *BDLIB*, quam ordinatim applicata *FN* in longitudinem *DB* per motum continuum ducta deſcribit, erit ut vis tota qua ſegmentum totum *RBSD* trahit corpus *P*. Q.E.I.



Prop. LXXXIV. Prob. XLIII.

Invenire vim qua corpuſculum, extra centrum Sphæræ in axe ſegmenti cujuſvis locatum, attrahitur ab eodem ſegmento.

A ſegmento *EBK* trahatur corpus *P* (*Vide Fig. Prop.* 79. 80. 81.) in ejus axe *ADB* locatum. Centro *P* intervallo *PE* deſ-

deſcribatur ſuperficies Sphærica *EFK*, qua diſtinguatur ſegmentum in partes duas *EBKF* & *EFKD*. Quæratur vis partis prioris per Prop. LXXXI. & vis partis poſterioris per Prop. LXXXIII.; & ſumma virium erit vis ſegmenti totius *EBKD*. Q.E.I.

Scholium.

Explicatis attractionibus corporum Sphæricorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis ſimiliter conſtantium corporum; ſed iſta particulatim tractare minus ad inſtitutum ſpectat. Suffecerit Propoſitiones quaſdam generaliores de viribus hujuſmodi corporum, deq; motibus inde oriundis, ob eorum in rebus Philoſophicis aliqualem uſum, ſubjungere.

SECT. XIII.

De Corporum etiam non Sphæricorum viribus attractivis.

Prop. LXXXV. Theor. XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum eſt, attractio longe fortior ſit, quam cum vel minimo intervallo ſeparantur ab invicem: vires particularum trahentis, in receſſu corporis attracti, decreſcunt in ratione pluſquam duplicata diſtantiarum a particulis.

Nam ſi vires decreſcunt in ratione duplicata diſtantiarum a particulis; attractio verſus corpus Sphæricum, propterea quod (per Prop. LXXIV.) ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ attracti

tracti corporis a centro Sphæræ, haud ſenſibiliter augebitur ex contactu; atq; adhuc minus augebitur ex contactu, ſi attractio in receſſu corporis attracti decreſcat in ratione minore. Patet igitur Propoſitio de Sphæris attractivis. Et par eſt ratio Orbium Sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res conſtat in Orbibus corpora interius conſtituta trahentibus, cum attractiones paſſim per Orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX.) tollantur, ideoq; vel in ipſo contactu nullæ ſunt. Quod ſi Sphæris hiſce Orbibuſq; Sphæricis partes quælibet a loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari poſſunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel ſubductæ, cum ſint a loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis exceſſum qui ex contactu oritur. Conſtat igitur Propoſitio de corporibus figurarum omnium. Q. E. D.

Prop. LXXXVI. Theor. XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in receſſu corporis attracti decreſcunt in triplicata vel pluſquam triplicata ratione diſtantiarum a particulis: attractio longe fortior erit in contactu, quam cum attrahens & attractum intervallo vel minimo ſeparantur ab invicem.

Nam attractionem in acceſſu attracti corpuſculi ad hujuſmodi Sphæram trahentem augeri in infinitum, conſtat per ſolutionem Problematis XLI. in Exemplo ſecundo ac tertio exhibitam. Idem, per Exempla illa & Theorema XLI inter ſe collata, facile colligitur de attractionibus corporum verſus Orbes concavo-convexos, ſive corpora attracta collocentur extra Orbes, ſive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his Sphæris & Orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eo ut corpora attractiva induant figuram quamvis aſſignatam, conſtabit Propoſitio de corporibus univerſis. Q. E. D.

Prop.

Prop. LXXXVII. Theor. XLIV.

Si corpora duo ſibi invicem ſimilia & ex materia æqualiter attractiva conſtantia ſeorſim attrahant corpuſcula ſibi ipſis proportionalia & ad ſe ſimiliter poſita: attractiones acceleratrices corpuſculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpuſculorum in eorum particulas totis proportionales & in totis ſimiliter poſitas.

Nam ſi corpora diſtinguantur in particulas, quæ ſint totis proportionales & in totis ſimiliter ſitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correſpondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas ſingulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas ſingulas correſpondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum ſecundum. Q. E. D.

Corol. 1. Ergo ſi vires attractivæ particularum, augendo diſtantias corpuſculorum attractorum, decreſcant in ratione dignitatis cujuſvis diſtantiarum: attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directe & diſtantiarum dignitates illæ inverſe. Ut ſi vires particularum decreſcant in ratione duplicata diſtantiarum a corpuſculis attractis, corpora autem ſint ut *A cub.* & *B cub.* adeoq; tum corporum latera cubica, tum corpuſculorum attractorum diſtantiæ a corporibus, ut *A* & *B*: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A\,cub.}{A\,quad.}$ & $\frac{B\,cub.}{B\,quad.}$ id eſt, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si vires particularum decreſcant in ratione triplicata diſtantiarum a corpuſculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A\,cub.}{A\,cub.}$ & $\frac{B\,cub.}{B\,cub.}$ id eſt æquales. Si vires decreſcunt in ratione quadruplicata, attractiones in corpora erunt ut $\frac{A\,cub.}{Aqq.}$ & $\frac{B\,cub.}{Bqq.}$ id eſt reciproce ut latera cubica *A* & *B*. Et ſic in cæteris.

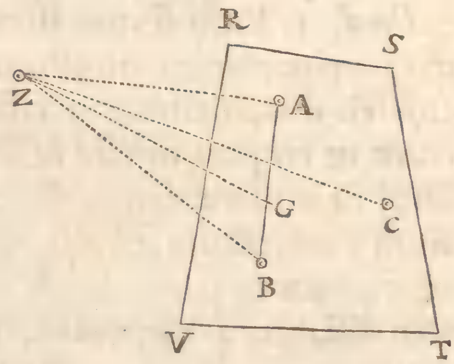
Corol.

Corol. 2. Unde viciſſim, ex viribus quibus corpora ſimilia trahunt corpuſcula ad ſe ſimiliter poſita, colligi poteſt ratio decrementi virium particularum attractivarum in receſſu corpuſculi attracti; ſi modo decrementum illud ſit directe vel inverſe in ratione aliqua diſtantiarum.

Prop. LXXXVIII. Theor. XLV.

Si particularum æqualium corporis cujuſcunq; vires attractivæ ſint ut diſtantiæ locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipſius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materia conſimili & æquali conſtantis & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

Corporis *RSTV* particulæ *A*, *B* trahant corpuſculum aliquod *Z* viribus quæ, ſi particulæ æquantur inter ſe, ſint ut diſtantiæ *AZ*, *BZ*; ſin particulæ ſtatuantur inæquales, ſint ut hæ particulæ in diſtantias ſuas *AZ*, *BZ* reſpective ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur *AB*, & ſecetur ea in *G* ut ſit *AG* ad *BG* ut particula *B* ad particulam *A*; & erit *G* commune centrum gravitatis particularum *A* & *B*. Vis $A \times AZ$ per Legum Corol. 2. reſolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$, & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales *A* ad *B* & *BG* ad *AG*, æquantur, adeoq;, cum dirigantur in partes contrarias, ſe mutuo deſtruunt. Reſtant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab *Z* verſus centrum *G*, & vim $\overline{A+B} \times GZ$ componunt; hoc eſt, vim eandem ac ſi particulæ attractivæ *A* & *B* conſiſterent in eorum communi gravitatis centro *G*, globum ibi componentes.



Eo-

Eodem argumento ſi adjungatur particula tertia C; & componatur hujus vis cum vi $\overline{A+B} \times GZ$ tendente ad centrum G, vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius G & particulæ C; hoc eſt, ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C; & eadem erit ac ſi globus & particula C conſiſterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et ſic pergitur in infinitum. Eadem eſt igitur vis tota particularum omnium corporis cujuſcunq; $RSTV$ ac ſi corpus illud, ſervato gravitatis centro, figuram globi indueret. Q. E. D.

Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit ac ſi corpus attrahens $RSTV$ eſſet Sphæricum: & propterea ſi corpus illud attrahens vel quieſcat, vel progrediatur uniformiter in directum, corpus attractum movebitur in Ellipſi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

Prop. LXXXIX. Theor. XLVI.

Si corpora ſint plura ex particulis æqualibus conſtantia, quarum vires ſunt ut diſtantiæ locorum a ſingulis: vis ex omnium viribus compoſita, qua corpuſculum quodcunq; trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis, & eadem erit ac ſi trahentia illa, ſervato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.

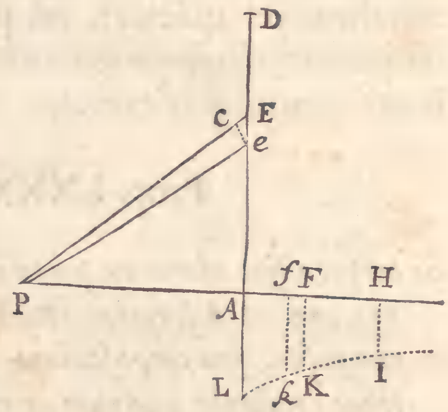
Demonſtratur eodem modo, atq; Propoſitio ſuperior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit ac ſi corpora trahentia, ſervato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur. Ideoq; ſi corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quieſcit, vel progreditur uniformiter in linea recta, corpus attractum movebitur in Ellipſi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

Prop. XC. Prob. XLIV.

Si ad ſingula circuli cujuſcunq; puncta tendant vires centripetæ decreſcentes in quacunq; diſtantiarum ratione: invenire vim qua corpuſculum attrahitur ubivis in recta quæ ad planum circuli per centrum ejus perpendicularis conſiſtit.

Centro *A* intervallo quovis *AD*, in plano cui recta *AP* perpendicularis eſt, deſcribi intelligatur circulus; & invenienda ſit vis qua corpus quodvis *P* in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis *E* ad corpus attractum *P* agatur recta *PE*: In recta *PA* capiatur *PF* ipſi *PE* æqualis, & erigatur Normalis *FK*, quæ ſit ut vis qua punctum *E* trahit corpuſculum *P*. Sitq; *IKL* curva linea quam punctum *K* perpetuo tangit. Occurrat eadem circuli plano in *L*. In *PA* capiatur *PH* æqualis *PD*, & erigatur perpendiculum *HI* curvæ prædictæ occurrens in *I*; & erit corpuſculi *P* attractio in circulum ut area *AHIL* ducta in altitudinem *AP*. Q. E. I.



Etenim in *AE* capiatur linea quam minima *Ee*. Jungatur *Pe*, & in *PA* capiatur *Pf* ipſi *Pe* æqualis. Et quoniam vis, qua annuli punctum quodvis E trahit ad ſe corpus P, ponitur eſſe ut *FK*, & inde vis qua punctum illud trahit corpus P verſus *A* eſt ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis qua annulus totus trahit corpus *P* verſus *A*, ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; annulus autem iſte eſt ut rectangulum ſub radio *AE* & latitudine *Ee*, & hoc rectangulum (ob proportionales *PE* & *AE*, *Ee* & *cE*) æquatur rectangulo *PE* $\times$ *cE*

$\times cE$ ſeu $PE \times Ff$; erit vis qua annulus iſte trahit corpus P verſus A ut $PE \times Ff$ & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim, id eſt, ut contentum $Ff \times AP \times FK$, ſive ut area $FKkf$ ducta in AP. Et propterea ſumma virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro A & intervallo AD deſcribitur, trahunt corpus P verſus A, eſt ut area tota $AHIKL$ ducta in AP. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi vires punctorum decreſcunt in duplicata diſtantiarum ratione, hoc eſt, ſi ſit FK ut $\frac{1}{PF\ quad.}$, atq; adeo area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpuſculi P in circulum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id eſt, ut $\frac{AH}{PH}$.

Corol. 2. Et univerſaliter, ſi vires punctorum ad diſtantias D ſint reciproce ut diſtantiarum dignitas quælibet D^n, hoc eſt, ſi ſit FK ut $\frac{1}{D^n}$, adeoq; area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; erit attractio corpuſculi P in circulum ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

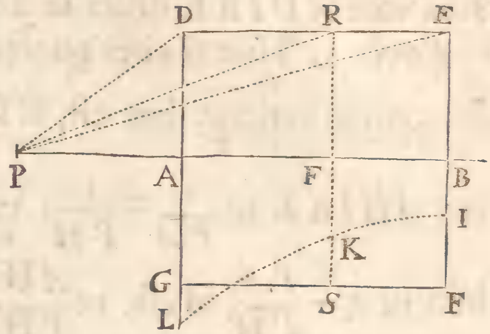
Corol. 3. Et ſi diameter circuli augeatur in infinitum, & numerus n ſit unitate major; attractio corpuſculi P in planum totum infinitum erit reciproce ut PA^{n-2}, propterea quod terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evaneſcet.

Prop. XCI. Prob. XLV.

Invenire attractionem corpuſculi ſiti in axe ſolidi, ad cujus puncta ſingula tendunt vires centripetæ in quacunq; diſtantiarum ratione decreſcentes.

In

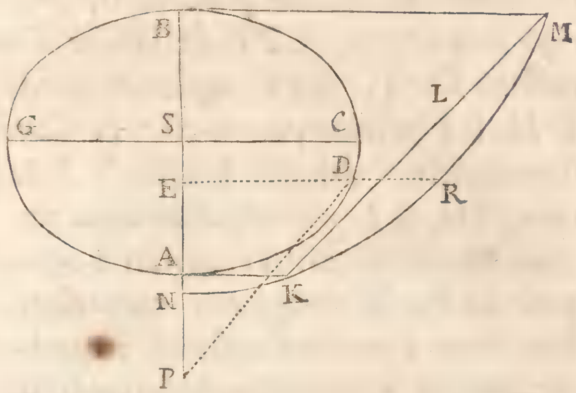
In ſolidum $ADEFG$ trahatur corpuſculum P, ſitum in ejus axe AB. Circulo quolibet RFS ad hunc axem perpendiculari ſecetur hoc ſolidum, & in ejus diametro FS, in plano aliquo $PALKB$ per axem tranſeunte, capiatur (per Prop. XC.) longitudo FK vi qua corpuſculum P in circulum illum attrahitur proportionalis. Tangat autem punctum K curvam lineam LKI, planis extimorum circulorum AL & BI occurrentem in A & B; & erit attractio corpuſculi P in ſolidum ut area $LABI$. Q. E. D.



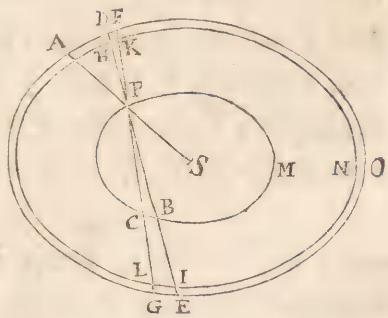
Corol. 1. Unde ſi ſolidum Cylindrus ſit, parallelogrammo $ADEB$ circa axem AB revoluto deſcriptus, & vires centripetæ in ſingula ejus puncta tendentes ſint reciproce ut quadrata diſtantiarum a punctis: erit attractio corpuſculi P in hunc Cylindrum ut $BA - PE + PD$. Nam ordinatim applicata FK (per Corol. 1. Prop. XC) erit ut $1 - \frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem AB, deſcribit aream $1 \times AB$; & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem PB, deſcribit aream 1 in $\overline{PE - AD}$ (id quod ex curvæ LKI quadratura facile oſtendi poteſt:) & ſimiliter pars eadem ducta in longitudinem PA deſcribit aream 1 in $PD - AD$, ductaq; in ipſarum PB, PA differentiam AB deſcribit arearum differentiam 1 in $\overline{PE - PD}$. De contento primo $1 \times AB$ auferatur contentum poſtremum 1 in $PE - PD$, & reſtabit area $LABI$ æqualis 1 in $AB - PE + PD$. Ergo vis huic areæ proportionalis eſt ut $AB - PE + PD$.

Corol. 2. Hinc etiam vis innoteſcit qua Sphærois $AGBCD$ attra-

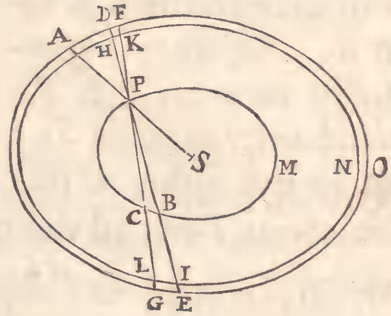
trahit corpus quodvis *P*, exterius in axe ſuo *AB* ſitum. Sit *NKRM* Sectio Conica cujus ordinatim applicata *ER*, ipſi *PE* perpendicularis, æquetur ſemper longitudini *PD*, quæ ducitur ad punctum illud *D*, in quo applicata iſta Sphæroidem ſecat. A Sphæroidis verticibus *A*, *B* ad ejus axem *AB* erigantur perpendicula *AK*, *BM* ipſis *AP*, *BP* æqualia reſpective, & propterea Sectioni Conicæ occurrentia in *K* & *M*; & jungantur *KM* auferens ab eadem ſegmentum *KMRK*. Sit autem Sphæroidis centrum *S* & ſemidiameter maxima *SC*: & vis qua Sphærois trahit corpus *P* erit ad vim qua Sphæra, diametro *AB* deſcripta, trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq. - PS \times KMRK}{PSq. + CSq. - ASq.}$ ad $\frac{AS\ cub.}{3\ PS\ quad.}$. Et eodem computando fundamento invenire licet vires ſegmentorum Sphæroidis.



Corol. 3. Quod ſi corpuſculum intra Sphæroidem in data quavis ejuſdem diametro collocetur; attractio erit ut ipſius diſtantia a centro. Id quod facilius colligetur hoc argumento. Sit *AGOF* Sphærois attrahens, *S* centrum ejus & P corpus attractum. Per corpus illud P agantur tum ſemidiameter *SPA*, tum rectæ duæ quævis *DE*, *FG* Sphæroidi hinc inde occurrentes in *D* & *E*, *F* & *G*: Sintq; *PCM*, *HLN* ſuperficies Sphæroidum duarum interiorum, exteriori ſimilium & concentricarum, quarum prior tran-



tranſeat per corpus *P* & ſecet rectas *DE* & *FG* in *B* & *C*, poſterior ſecet eaſdem rectas in *H*, *I* & *K*, *L*. Habeant autem Sphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptæ *DP* & *BE*, *FP* & *CG*, *DH* & *IE*, *FK* & *LG* ſibi mutuo æquales; propterea quod rectæ *DE*, *PB* & *HI* biſecantur in eodem puncto, ut & rectæ *FG*, *PC* & *KL*. Concipe jam *DPF*, *EPG* deſignare Conos oppoſitos, angulis verticalibus *DPF*, *EPG* infinite parvis deſcriptos, & lineas etiam *DH*, *EI* infinite parvas eſſe; & Conorum particulæ Sphæroidum ſuperficiebus abſciſſæ *DHKF*, *GLIE*, ob æqualitatem linearum *DH*, *EI*, erunt ad invicem ut quadrata diſtantiarum ſuarum a corpuſculo *P*, & propterea corpuſculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, ſi ſuperficiebus Sphæroidum innumerarum ſimilium concentricarum & axem communem habentium dividantur ſpatia *DPF*, *EGCB* in particulas, hæ omnes utrinq; æqualiter trahent corpus *P* in partes contrarias. Æquales igitur ſunt vires coni *DPF* & ſegmenti Conici *EGCB*, & per contrarietatem ſe mutuo deſtruunt. Et par eſt ratio virium materiæ omnis extra Sphæroidem intimam *PCBM*. Trahitur igitur corpus *P* a ſola Sphæroide intima *PCBM*, & propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII.) attractio ejus eſt ad vim, qua corpus *A* trahitur a Sphæroide tota *AGOD*, ut diſtantia *PS* ad diſtantiam *AS*. Q. E. I.



Prop. XCII. Prob. XLVI.

Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta ſingula tendentium.

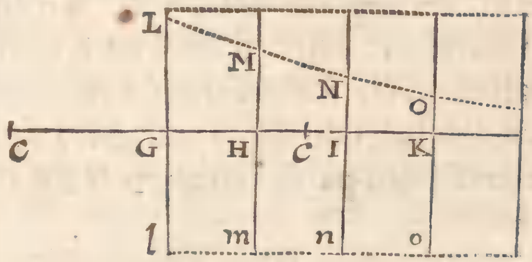
E corpore dato formanda eſt Sphæra vel Cylindrus aliave figura

ra regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX. LXXXI. & XCI.) inveniri poteſt. Dein factis experimentis invenienda eſt vis attractionis in diverſis diſtantiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium ſingularum, quam invenire oportuit.

Prop. XCIII. Theor. XLVII.

Si ſolidum ex una parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, conſtet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in receſſu a ſolido decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis diſtantiarum pluſquam quadraticæ, & vi ſolidi totius corpuſculum ad utramvis plani partem conſtitutum trahatur: dico quod ſolidi vis illa attractiva, in receſſu ab ejus ſuperficie plana, decreſcet in ratione poteſtatis, cujus latus eſt diſtantia corpuſculi a plano, & Index ternario minor quam Index poteſtatis diſtantiarum.

Cas. 1. Sit LGl planum quo Solidum terminatur. Jaceat autem ſolidum ex parte plani hujus verſus I, inq; plana innumera mHM, nIN &c. ipſi GL parallela reſolvatur. Et primo collocetur corpus attractum C extra ſolidum. Agatur autem $CGHI$ planis illis innumeris perpendicularis, & decreſcant vires attractivæ punctorum ſolidi in ratione poteſtatis diſtantiarum,



cujus index ſit numerus n ternario non minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. XC) vis qua planum quodvis mHM trahit punctum C eſt reciproce ut CH^{n-2}. In plano mHM capiatur longitudo HM ipſi CH^{n-2} reciproce proportionalis, & erit vis illa ut HM. Similiter in planis ſingulis lGL, nIN, oKO &c, capiantur

antur longitudines GL, IN, KO &c. ipſis CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2} &c. reciproce proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, adeoq; ſumma virium ut ſumma longitudinum, hoc eſt, vis ſolidi totius ut area $GLOK$ in infinitum verſus OK producta. Sed area illa per notas quadraturarum methodos eſt reciproce ut CG^{n-3}, & propterea vis ſolidi totius eſt reciproce ut CG^{n-3} Q.E.D.

Caſ. 2. Collocetur jam corpuſculum C ex parte plani lGL intra ſolidum, & capiatur diſtantia CK æqualis diſtantiæ CG. Et ſolidi pars $LGloKO$, planis parallelis lGL, oKO terminata, corpuſculum C in medio ſitum nullam in partem trahet, contrariis oppoſitorum punctorum actionibus ſe mutuo per æqualitatem tollentibus. Proinde corpuſculum C ſola vi ſolidi ultra planum OK ſiti trahitur. Hæc autem vis (per Caſum primum) eſt reciproce ut CK^{n-3}, hoc eſt (ob æquales CG, CK) reciproce ut CG^{n-3}. Q. E. D.



Corol. 1. Hinc ſi ſolidum $LGIN$ planis duobus infinitis parallelis LG, IN utrinq; terminetur; innoteſcit ejus vis attractiva, ſubducendo de vi attractiva ſolidi totius infiniti $LGKO$ vim attractivam partis ulterioris $NIKO$, in infinitum verſus KO productæ.

Corol. 2. Si ſolidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene eſt momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo diſtantiam decreſcet quam proxime in ratione poteſtatis CG^{n-3}.

Corol. 3. Et hinc ſi corpus quodvis finitum & ex una parte planum trahat corpuſculum e regione medii illius plani, & diſtantia inter corpuſculum & planum collata cum dimenſionibus

cor-

corporis attrahentis perexigua ſit, conſtet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis pluſquam quadruplicatæ diſtantiarum; vis attractiva corporis totius decreſcet quamproxime in ratione poteſtatis, cujus latus ſit diſtantia illa perexigua, & Index ternario minor quam Index poteſtatis prioris. De corpore ex particulis conſtante, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis triplicatæ diſtantiarum, aſſertio non valet, propterea quod, in hoc caſu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in Corollario ſecundo, ſemper eſt infinite major quam attractio partis citerioris.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter verſus planum datum trahatur, & ex data lege attractionis quæratur motus corporis: Solvetur Problema quærendo (per Prop. XXVII.) motum corporis recta deſcendentis ad hoc planum, & (per Legum Corol. 2.) componendo motum iſtum cum uniformi motu, ſecundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, ſi quæratur Lex attractionis in planum ſecundum lineas perpendiculares factæ, ea conditione ut corpus attractum in data quacunq; curva linea moveatur, ſolvetur Problema operando ad exemplum Problematis tertii.

Operationes autem contrahi ſolent reſolvendo ordinatim applicatas in ſeries convergentes. Ut ſi ad baſem *A* in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo *B*, quæ ſit ut baſis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quæratur vis qua corpus, ſecundum poſitionem ordinatim applicatæ, vel in baſem attractum vel a baſi fugatum, moveri poſſit in curva linea quam ordinatim applicata termino ſuo ſuperiore ſemper attingit; Suppono baſem augeri parte

 te

te quam minima O, & ordinatim applicatam $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$ reſolvo in Seriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{n}{m} O A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn} O^2 A^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atq; hujus termino in quo O duarum eſt dimenſionum, id eſt termino $\frac{mm-mn}{2nn} O^2 A^{\frac{m-2n}{n}}$ vim proportionalem eſſe ſuppono. Eſt igitur vis quæſita ut $\frac{mm-mn}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde eſt, ut $\frac{mm-mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut ſi ordinatim applicata Parabolam attingat, exiſtente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^{\circ}$, adeoq; dabitur. Data igitur vi corpus movebitur in Parabola, quemadmodum *Galilæus* demonſtravit. Quod ſi ordinatim applicata Hyperbolam attingat, exiſtente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $\bar{2} B^{-3}$ ſeu $\frac{2}{B\,cub.}$: adeoq; vi, quæ ſit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in Hyperbola. Sed miſſis hujuſmodi Propoſitionibus, pergo ad alias quaſdam de motu, quas nondum attigi.

SECT.

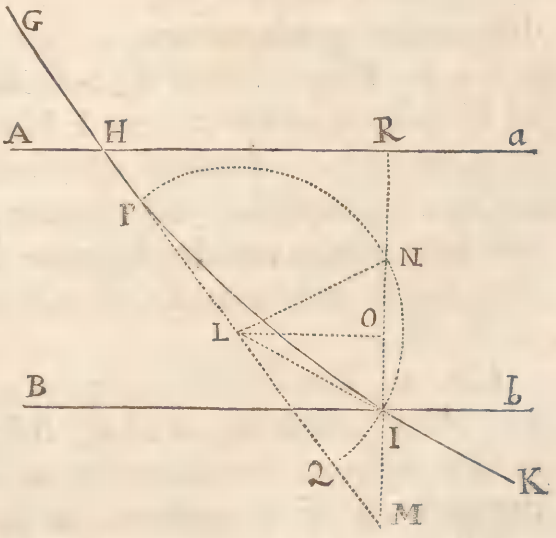
SECT. XIV.

De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad ſingulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

Prop. XCIV. Theor. XLVIII.

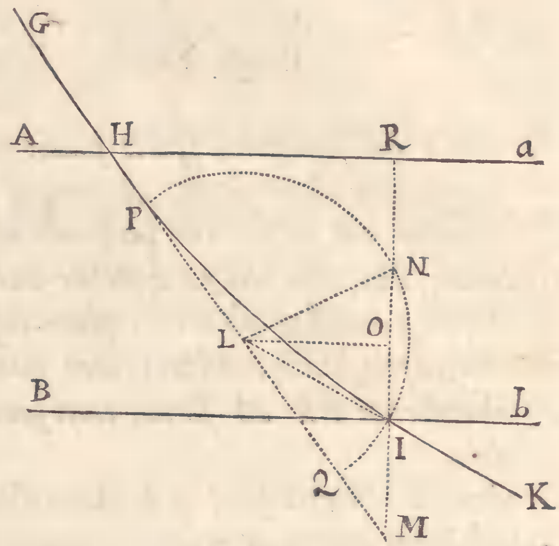
Si media duo ſimilaria, ſpatio planis parallelis utrinq; terminato, diſtinguantur ab invicem, & corpus in tranſitu per hoc ſpatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter verſus medium alterutrum, neq; ulla alia vi agitetur vel impediatur; Sit autem attractio, in æqualibus ab utroq; plano diſtantiis ad eandem ipſius partem captis, ubiq; eadem: dico quod ſinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad ſinum emergentiæ ex plano altero in ratione data.

Cas. 1. Sunto *Aa*, *Bb* plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius *Aa* ſecundam lineam G*H*, ac toto ſuo per ſpatium intermedium tranſitu attrahatur vel impellatur verſus medium incidentiæ, eaq; actione deſcribat lineam curvam *HI*, & emergat ſecundum lineam *IK*. Ad planum emergentiæ *Bb* erigatur perpendiculum *IM*, occurrens tum lineæ incidentiæ *GH* productæ in *M*, tum plano incidentiæ *Aa* in *R*; & linea emergentiæ *KI* producta occurrat *HM* in *L*. Centro *L* intervallo



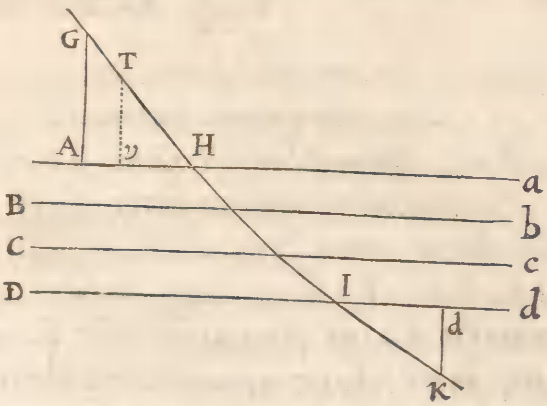
vallo

vallo LI deſcribatur circulus, ſecans tam HM in P & Q, quam MI productam in N; & primo ſi attractio vel impulſus ponatur uniformis, erit (ex demonſtatis *Galilæi*) curva HI Parabola, cujus hæc eſt proprietas, ut rectangulum ſub dato latere recto & linea IM æquale ſit HM quadrato; ſed & linea HM biſecabitur in L. Unde ſi ad MI demittatur perpendiculum LO, æquales erunt MO, OR; & additis æqualibus IO, ON, fient totæ æquales MN, IR. Proinde cum IR detur, datur etiam MN, eſtq; rectangulum NMI ad rectangulum ſub latere recto & IM, hoc eſt, ad $HMq.$, in data ratione. Sed rectangulum NMI æquale eſt rectangulo PMQ, id eſt, differentiæ quadratorum $MLq.$ & $PLq.$ ſeu $LIq.$; & $HMq.$ datam rationem habet ad ſui ipſius quartam partem $LMq.$: ergo datur ratio $MLq. - LIq.$ ad $MLq.$, & diviſim, ratio $LIq.$ ad $MLq.$, & ratio dimidiata LI ad ML. Sed in omni triangulo LMI, ſinus angulorum ſunt proportionales lateribus oppoſitis. Ergo datur ratio ſinus anguli incidentiæ LMR ad ſinum anguli emergentiæ LIR. Q. E. D.



Cas. 2. Tranſeat jam corpus ſucceſſive per ſpatia plura parallelis planis terminata, $AabB$, $BbcC$ &c. & agitetur vi quæ ſit in ſingulis ſeparatim uniformis, at in diverſis diverſa; & per jam demonſtrata, ſinus incidentiæ in planum primum Aa erit ad ſinum emergentiæ ex plano ſecundo Bb, in data ratione; & hic ſinus, qui eſt ſinus incidentiæ in planum ſecundum Bb, erit ad ſinum

num emergentiæ ex plano tertio Cc, in data ratione; & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto Dd, in data ratione; & ſic in infinitum: & ex æquo ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo in data ratione. Minuatur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eo ut attractionis vel impulſus actio ſecundum legem quamcunq; aſſignatam continua reddatur; & ratio ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. Q. E. D.



Prop. XCV. Theor. XLIX.

Iiſdem poſitis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam eſt ad ejus velocitatem poſt emergentiam, ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ.

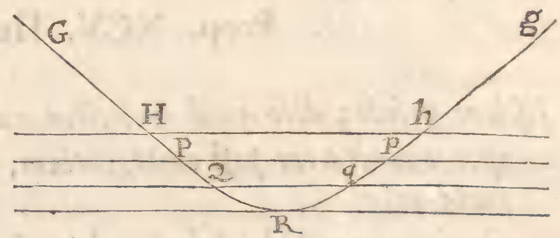
Capiantur AH, Id æquales, & erigantur perpendicula AG, dK occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ GH, IK, in G & K. In GH capiatur TH æqualis IK, & ad planum Aa demittatur normaliter Tv. Et per Legum Corol. 2. diſtinguatur motus corporis in duos, unum planis Aa, Bb, Cc &c. perpendicularem, alterum iiſdem parallelum. Vis attractionis vel impulſus agendo ſecundum lineas perpendiculares nil mutat motum ſecundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa ſecundum parallelas intervalla, quæ ſunt inter lineam AG & punctum H, interq; punctum I & lineam dK; hoc eſt, æqualibus temporibus deſcribet lineas GH, IK.

IK. Proinde velocitas ante incidentiam eſt ad velocitatem poſt emergentiam, ut *GH* ad *IK* vel *TH*, id eſt, ut *AH* vel *Id* ad *v*H, hoc eſt (reſpectu radii *TH* vel *IK*) ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ. Q. E. D.

Prop. XCVI. Theor. L.

Iiſdem poſitis & quod motus ante incidentiam velocior ſit quam poſtea: dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

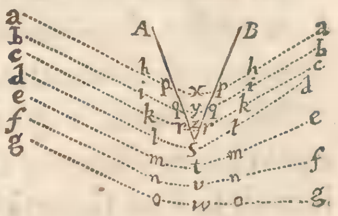
Nam concipe corpus inter plana parallela *Aa*, *Bb*, *Cc* &c. deſcribere arcus Parabolicos, ut ſupra; ſintq; arcus illi H*P*, *PQ*, *QR*, &c. Et ſit ea lineæ incidentiæ GH obliquitas ad planum primum *Aa*, ut ſinus incidentiæ ſit ad radium circuli, cujus eſt ſinus, in ea ratione quam habet idem ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ ex plano *Dd*, in ſpatium *DdeE*: & ob ſinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, adeoq; linea emergentiæ coincidet cum plano *Dd*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto *R*; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perſpicuum eſt quod corpus non poteſt ultra pergere verſus planum *Ee*. Sed nec poteſt idem pergere in linea emergentiæ *Rd*, propterea quod perpetuo attrahitur vel impellitur verſus medium incidentiæ. Revertetur itaq; inter plana *Cc*, *Dd* deſcribendo arcum Parabolæ *QRq*, cujus vertex principalis (juxta demonſtrata *Galilæi*) eſt in *R*; ſecabit planum *Cc* in eodem angulo in *q*, ac prius in *Q*; dein pergendo in arcubus parabolicis *qp*, *ph* &c. arcubus prioribus *QP*, *P*H ſimilibus & æqualibus, ſecabit reliqua plana in iiſdem angulis in *p*, *h* &c. ac prius in *P*, H &c. emergetq; tandem eadem obliquitate in *h*, qua incidit in H. Concipe jam plano-



norum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee* intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulſus ſecundum legem quamcunq; aſſignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ ſemper angulo incidentiæ æqualis exiſtens, eidem etiamnum manebit æqualis. Q. E. D.

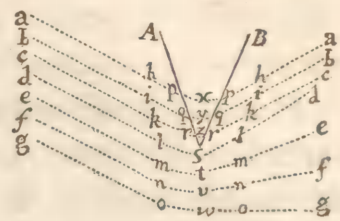
Scholium.

Harum attractionum haud multum diſſimiles ſunt Lucis reflexiones & refractiones, factæ ſecundum datam Secantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per conſequens ſecundum datam Sinuum rationem, ut expoſuit *Carteſius*. Namq; Lucem ſucceſſive propagari & ſpatio quaſi decem minutorum primorum a Sole ad Terram venire, jam conſtat per Phænomena Satellitum *Jovis*, Obſervationibus diverſorum Aſtronomorum confirmata. Radii autem in aere exiſtentes (ubi dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebroſum cubiculum admiſſa, invenit, & ipſe quoq; expertus ſum) in tranſitu ſuo prope corporum vel opacorum vel perſpicuorum angulos (quales ſunt nummorum ex auro, argento & ære cuſorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quaſi attracti in eadem; & ex his radiis, qui in tranſitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, quaſi magis attracti, ut ipſe etiam diligenter obſervavi.



In figura deſignat *s* aciem cultri vel cunei cujuſvis *AsB*; & *gowog*, *fnvnf*, *emtme*, *dlsld* ſunt radii, arcubus *owo*, *nvn*, *mtm*, *lsl* verſus cultrum incurvati; idq; magis vel minus pro diſtantia eorum a cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par eſt ratio incidentium in vi-

vitrum. Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, ſed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, poſtquam illud ingreſſi ſunt: uti in radiis *ckzkc*, *biyib*, *ahxha* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x* incurvatis, delineatum eſt. Igitur ob analogiam quæ eſt inter propagationem radiorum lucis & progreſſum corporum, viſum eſt Propoſitiones ſequentes in uſus opticos ſubjungere; interea de natura radiorum (utrum ſint corpora necne) nihil omnino diſputans, ſed trajectorias corporum trajectoriis radiorum perſimiles ſolummodo determinans.



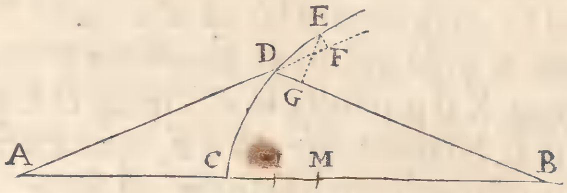
Prop. XCVII. Prob. XLVII.

Poſito quod ſinus incidentiæ in ſuperficiem aliquam ſit ad ſinum emergentiæ in data ratione, quodq; incurvatio viæ corporum juxta ſuperficiem illam fiat in ſpatio breviſſimo, quod ut punctum conſiderari poſſit; determinare ſuperficiem quæ corpuſcula omnia de loco dato ſucceſſive manantia convergere faciat ad alium locum datum.

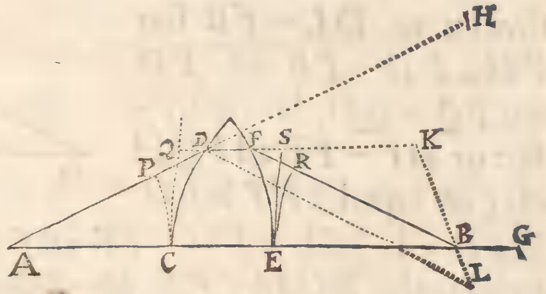
Sit *A* locus a quo corpuſcula divergunt; *B* locus in quem convergere debent; *CDE* curva linea quæ circa axem *AB* revoluta deſcribat ſuperficiem quæſitam; *D*, *E* curvæ illius puncta duo quævis; & *EF*, *EG* perpendicula in corporis vias *AD*, *DB* demiſſa. Accedat punctum *D* ad punctum *E*; & lineæ *DF* qua *AD* augetur, ad lineam *DG* qua *DB* diminuitur, ratio ultima erit eadem quæ ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ. Datur ergo ratio incrementi lineæ *AD* ad decrementum lineæ *DB*; & propterea ſi in axe *AB* ſumatur ubivis punctum *C*, per quod curva *CDE* tranſire debet, & capiatur ipſius *AC* incrementum *CM*, ad ipſius *BC* decrementum *CN* in data ratione; centriſq; *A*, *B*, &

B, & intervallis *AM*, *BN* deſcribantur circuli duo ſe mutuo ſecantes in *D*: punctum illud *D* tanget curvam quæſitam *CDE*, eandemq; ubivis tangendo determinabit. Q. E. I.

Corol. 1. Faciendo autem ut punctum *A* vel *B* nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti *C*, habebuntur figuræ illæ omnes quas *Carteſius* in Optica & Geometria ad refractiones expoſuit. Quarum inventionem cum *Carteſius* maximi fecerit & ſtudioſe celaverit, viſum fuit hic propoſitione exponere.



Corol. 2. Si corpus in ſuperficiem quamvis *CD*, ſecundum lineam rectam *AD* lege quavis ductam incidens, emergat ſecundum aliam quamvis rectam *DK*, & a puncto *C* duci intelligantur lineæ curvæ *CP*, *CQ* ipſis *AD*, *DK* ſemper perpendiculares: erunt incrementa linearum *PD*, *QD*, atq; adeo lineæ ipſæ *PD*, *QD*, incrementis iſtis genitæ, ut ſinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.



Prop. XCVIII. Prob. XLVIII.

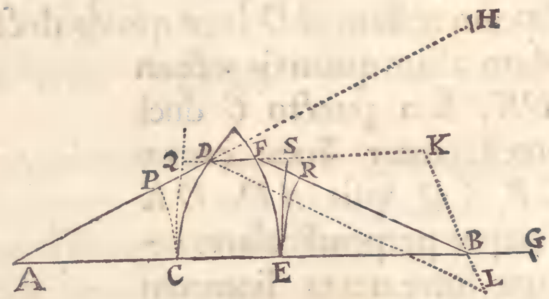
Iiſdem poſitis, & circa axem AB deſcripta ſuperficie quacunq; attractiva CD, regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato A exeuntia tranſire debent: invenire ſuperficiem ſecundam attractivam EF, quæ corpora illa ad locum datum B convergere faciat.

Juncta *AB* ſecet ſuperficiem primam in *C* & ſecundam in *E*,

 punctο

punɛto D utcunq; aſſumpto. Et poſito ſinu incidentiæ in ſuperficiem primam ad ſinum emergentiæ ex eadem, & ſinu emergentiæ e ſuperficie ſecunda ad ſinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N; produc tum AB ad G ut ſit BG ad CE ut $M-N$ ad N, tum AD ad H ut ſit AH æqualis AG, tum etiam DF ad K ut ſit DK ad DH ut N ad M. Junge KB, & centro D intervallo DH deſcribe circulum occurrentem KB productæ in L, ipſiq; DL parallelam age BF: & punctum F tanget lineam EF, quæ circa axem AB revoluta deſcribet ſuperficiem quæſitam. Q. E. F.

Nam concipe lineas CP, CQ ipſis AD, DF reſpective, & lineas ER, ES ipſis FB, FD ubiq; perpendiculares eſſe, adeoq; QS ipſi CE ſemper æqualem; & erit (per Corol. 2. Prop. XCVII.) PD ad QD ut M ad N, adeoq; ut DL ad DK vel FB ad FK; & diviſim ut $DL-FB$ ſeu $PH-PD-FB$ ad FD ſeu $FQ-QD$; & compoſite ut $HP-FB$ ad FQ, id eſt (ob æquales HP & CG, QS & CE) $CE+BG-FR$ ad $CE-FS$. Verum (ob proportionales BG ad CE & $M-N$ ad N) eſt etiam $CE+BG$ ad CE ut M ad N: adeoq; diviſim FR ad FS ut M ad N, & propterea per Corol. 2. Prop. XCVII. ſuperficies EF cogit corpus in ſe ſecundum lineam DF incidens pergere in linea FR, ad locum B. Q. E. D.



Scholium.

Eadem methodo pergere liceret ad ſuperficies tres vel plures. Ad uſus autem Opticos maxime accommodatæ ſunt figuræ Sphæricæ. Si Perſpicillorum vitra Objectiva ex vitris duobus Sphærice

ce figuratis & Aquam inter ſe claudentibus conflentur, fieri poteſt ut a refractionibus aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum ſuperficiebus extremis, ſatis accurate corrigantur. Talia autem vitra Objectiva vitris Ellipticis & Hyperbolicis præferenda ſunt, non ſolum quod facilius & accuratius formari poſſint, ſed etiam quod penicillos radiorum extra axem vitri ſitos accuratius refringant. Verum tamen diverſa diverſorum radiorum refrangibilitas impedimento eſt, quo minus Optica per figuras vel Sphæricas vel alias quaſcunq; perfici poſſit. Niſi corrigi poſſint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis imperite collocabitur.

DE

DE MOTU CORPORUM

Liber SECUNDUS.

SECT. I.

De Motu corporum quibus reſiſtitur in ratione velocitatis.

Prop. I. Theor. I.

Corporis, cui reſiſtitur in ratione velocitatis, motus ex reſiſtentia amiſſus eſt ut ſpatium movendo confectum.

NAm cum motus ſingulis temporis particulis amiſſus ſit ut velocitas, hoc eſt ut itineris confecti particula: erit componendo motus toto tempore amiſſus ut iter totum. Q. E. D.

Corol. Igitur ſi corpus gravitate omni deſtitutum in ſpatiis liberis ſola vi inſita moveatur, ac detur tum motus totus ſub initio, tum etiam motus reliquus poſt ſpatium aliquod confectum, dabitur ſpatium totum quod corpus infinito tempore deſcribere poteſt. Erit enim ſpatium illud ad ſpatium jam deſcriptum ut motus totus ſub initio ad motus illius partem amiſſam.

Lem

Lemma. I.

Quantitates differentiis ſuis proportionales, ſunt continue proportionales.

Sit A ad *A*−*B* ut *B* ad *B*−*C* & *C* ad *C*−*D* &c. & dividendo fiet *A* ad *B* ut *B* ad *C* & *C* ad *D* &c. Q. E. D.

Prop. II. Theor. II.

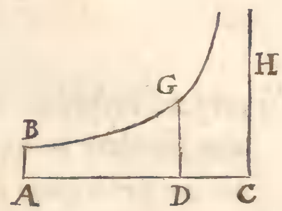
Si corpori reſiſtitur in ratione velocitatis, & ſola vi inſita per Medium ſimilare moveatur, ſumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis ſingulorum temporum ſunt in progreſſione Geometrica, & ſpatia ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales, & ſi ipſis particularum initiis agat vis reſiſtentiæ impulſu unico, quæ ſit ut velocitas, erit decrementum velocitatis ſingulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis ſuis proportionales, & propterea (per Lem. I. Lib. II.) continue proportionales. Proinde ſi ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipſis temporum initiis, ut termini in progreſſione continua, qui per ſaltum capiuntur, omiſſo paſſim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea ſunt æquales. Igitur velocitates his terminis proportionales, ſunt in progreſſione Geometrica. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ, & augeatur earum numerus in infinitum, eo ut reſiſtentiæ impulſus reddatur continuus, & velocitates in principiis æqualium temporum, ſemper continue proportionales, erunt in hoc etiam Caſu continue proportionales. Q. E. D.

Cas.

Caſ. 2. Et diviſim velocitatum differentiæ, hoc eſt earum partes ſingulis temporibus amiſſæ, ſunt ut totæ: Spatia autem ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitatum partes amiſſæ, (per Prop. I. Lib. II.) & propterea etiam ut totæ. Q. E. D.

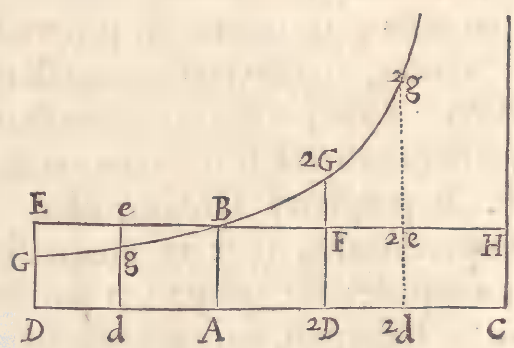
Corol. Hinc ſi Aſymptotis rectangulis *ADC*, *CH* deſcribatur Hyperbola *BG*, ſintq; *AB*, *DG* ad Aſymptoton *AC* perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum reſiſtentia Medii, ipſo motus initio, per lineam quamvis datam *AC*, elapſo autem tempore aliquo per lineam indefinitam *DC*: exponi poteſt tempus per aream *ABGD*, & ſpatium eo tempore deſcriptum per lineam *AD*. Nam ſi area illa per motum puncti *D* augeatur uniformiter ad modum temporis, decreſcet recta *DC* in ratione Geometrica ad modum velocitatis, & partes rectæ *AC* æqualibus temporibus deſcriptæ decreſcent in eadem ratione.



Prop. III. Prob. I.

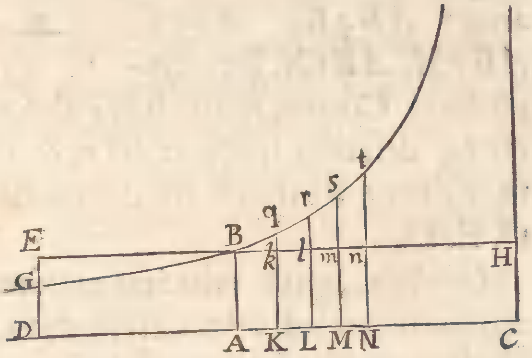
Corporis, cui dum in Medio ſimilari recta aſcendit vel deſcendit, reſiſtitur in ratione velocitatis, quodq; ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

Corpore aſcendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum *BC*, & reſiſtentia Medii initio aſcenſus per rectangulum *BD* ſumptum ad contrarias partes. Aſymptotis rectangulis *AC*, *CH*, per punctum *B* deſcribatur Hyperbola ſecans perpendicula *DE*, *de* in *G*, *g*; & corpus aſcendendo, tempore *DGgd*, deſcribet ſpatium *EGge*, tempore *DGBA* ſpatium

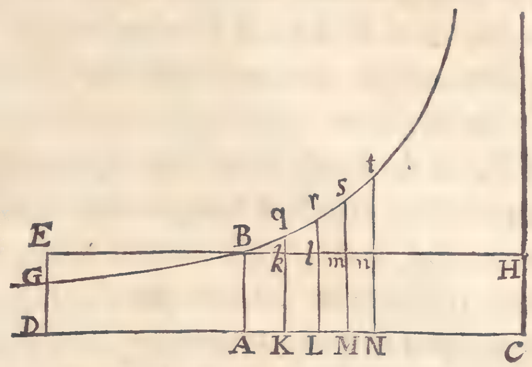


um aſcenſus totius EGB, tempore $AB2G2D$ ſpatium deſcenſus $BF2G$, atq; tempore $2D2G2g2d$ ſpatium deſcenſus $2GF2e2g$: & velocitates corporis (reſiſtentiæ Medii proportionales) in horum temporum periodis erunt $ABED$, $ABed$, nulla, $ABF2D$, $AB2e2d$ reſpectivè; atq; maxima velocitas, quam corpus deſcendendo poteſt acquirere, erit BC.

Reſolvatur enim rectangulum AH in rectangula innumera Ak, Kl, Lm, Mn, &c. quæ ſint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, Ak, Al, Am, An, &c. ut velocitates totæ, atq; adeo (per Hypotheſin) ut reſiſtentia Medii in principio ſingulorum temporum æqualium. Fiat AC ad AK vel $ABHC$ ad $ABkK$, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in principio temporis ſecundi, deq; vi gravitatis ſubducantur reſiſtentiæ, & manebunt $ABHC$, $KkHC$, $LlHC$, $NnHC$, &c. ut vires abſolutæ quibus corpus in principio ſingulorum temporum urgetur, atq; adeo (per motus Legem II.) ut incrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula Ak, Kl, Lm, Mn &c; & propterea (per Lem. I. Lib. II.) in progreſſione Geometrica. Quare ſi rectæ Kk, Ll, Mm, Nn &c. productæ occurrant Hyperbolæ in q, r, s, t &c. erunt areæ $ABqK$, $KqrL$, $LrsM$, $MstN$ &c. æquales, adeoq; tum temporibus tum viribus gravitatis ſemper æqualibus analogæ. Eſt autem area $ABqK$ (per Corol. 3 Lem. VII. & Lem. VIII. Lib. I.) ad aream Bkq ut Kq ad $\frac{1}{2}kq$ ſeu AC ad $\frac{1}{2}AK$, hoc eſt ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in medio temporis primi. Et ſimili argumento areæ $qKLr$, $rLMs$, $sMNt$, &c. ſunt ad areas $qklr$, $rlms$, $smnt$ &c. ut vires gravitatis ad reſiſtentias in medio temporis ſecundi, ter-



tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales *BAKq*, *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. ſint viribus grauitatis analogæ, erunt areæ *Bkq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. reſiſtentiis in mediis ſingulorum temporum, hoc eſt, (per Hypotheſin) velocitatibus, atq; adeo deſcriptis ſpatiis analogæ. Sumantur analogarum ſummæ, & erunt areæ *Bkq*, *Blr*, *Bms*, *Bnt*, &c. ſpatiis totis deſcriptis analogæ; necnon areæ *ABqK*, *ABrL*, *ABsM*, *ABtN*, &c. temporibus. Corpus igitur inter deſcendendum, tempore quovis *ABrL*, deſcribit ſpatium *Blr*, & tempore *LrtN* ſpatium *rlnt*. Q. E. D. Et ſimilis eſt demonſtratio motus expoſiti in aſcenſu. Q. E. D.



Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo poteſt acquirere, eſt ad velocitatem dato quovis tempore acquiſitam, ut vis data gravitatis qua perpetuo urgetur, ad exceſſum vis hujus ſupra vim qua in fine temporis illius reſiſtitur.

Corol. 2. Tempore autem aucto in progreſſione Arithmetica, ſumma velocitatis illius maximæ ac velocitatis in aſcenſu (atq; etiam earundem differentia in deſcenſu) decreſcit in progreſſione Geometrica.

Corol. 3. Sed & differentiæ ſpatiorum, quæ in æqualibus temporum differentiis deſcribuntur, decreſcunt in eadem progreſſione Geometrica.

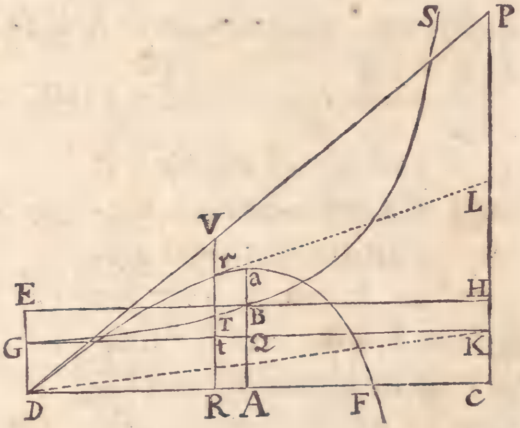
Corol. 4. Spatium vero a corpore deſcriptum differentia eſt duorum ſpatiorum, quorum alterum eſt ut tempus ſumptum ab initio deſcenſus, & alterum ut velocitas, quæ etiam ipſo deſcenſus initio æquantur inter ſe.

Prop.

Prop. IV. Prob. II.

Poſito quod vis gravitatis in Medio aliquo ſimilari uniformis ſit, ac tendat perpendiculariter ad planum Horizontis; definire motum Projectilis, in eodem reſiſtentiam velocitati proportionalem patientis.

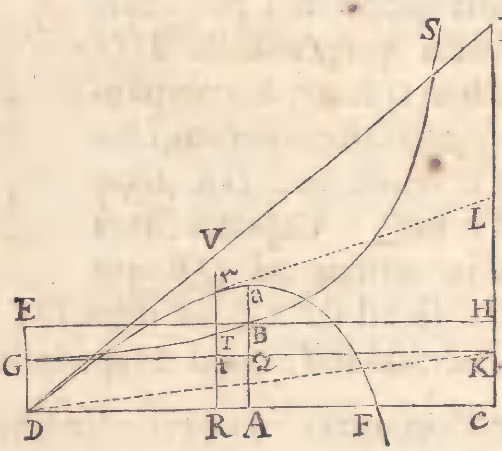
E loco quovis *D* egrediatur Projectile ſecundum lineam quamvis rectam *DP*, & per longitudinem *DP* exponatur ejuſdem velocitas ſub initio motus. A puncto *P* ad lineam Horizontalem *DC* demittatur perpendiculum *PC*, & ſecetur *DC* in *A* ut ſit *DA* ad *AC* ut reſiſtentia Medii ex motu in altitudinem ſub initio orta, ad vim gravitatis; vel (quod perinde eſt) ut ſit rectangulum ſub *DA* & *DP* ad rectangulum ſub *AC* & *PC* ut reſiſtentia tota ſub initio motus ad vim Gravitatis. Deſcribatur Hyperbola quævis *GTBS* ſecans erecta perpendicula *DG*, *AB* in *G* & *B*; & compleatur parallelogrammum *DGKC*, cujus latus *GK* ſecet *AB* in *Q*. Capiatur linea *N* in ratione ad *QB* qua *DC* ſit ad *CP*; & ad rectæ *DC* punctum quodvis *R* erecto perpendiculo *RT*, quod Hyperbolæ in *T*, & rectis *GK*, *DP* in *t* & *V* occurrat; in eo cape *Vr* æqualem $\frac{tGT}{N}$, & Projectile tempore *DRTG* perveniet ad punctum *r*, deſcribens curvam lineam *DraF*, quam punctum *r* ſemper tangit; perveniens autem ad maximam altitudinem *a* in perpendiculo *AB*, & poſtea ſemper



 ap-

appropinquans ad Aſymptoton PLC. Eſtq; velocitas ejus in puncto quovis r ut Curvæ Tangens rL. Q. E. D.

Eſt enim N ad QB ut DC ad CP ſeu DR ad RV, adeoq; RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & Rr (id eſt $RV - Vr$ ſeu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream $RDGT$, & (per Legum Corol. 2.) diſtinguatur motus corporis in duos, unum aſcenſus, alterum ad latus. Et cum reſiſtentia ſit ut motus, diſtinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoq; longitudo a motu ad latus deſcripta erit (per Prop. II. hujus) ut linea DR, altitudo vero (per Prop. III. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$, hoc eſt ut linea Rr. Ipſo autem motus initio area $RDGT$ æqualis eſt rectangulo $DR \times AQ$, ideoq; linea illa Rr (ſeu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc eſt ad DR ut $AB - AQ$ (ſeu QB) ad N, id eſt ut CP ad DC; atq; adeo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem ſub initio. Cum igitur Rr ſemper ſit ut altitudo, ac DR ſemper ut longitudo, atq; Rr ad DR ſub initio ut altitudo ad longitudinem: neceſſe eſt ut Rr ſemper ſit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in linea $DraF$, quam punctum r perpetuo tangit. Q. E. D.



Corol. 1. Hinc ſi Vertice D, Diametro DE deorſum producta, & latere recto quod ſit ad $2DP$ ut reſiſtentia tota, ipſo motus

tus initio, ad vim gravitatis, Parabola conſtruatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco *D* ſecundum rectam *DP*, ut in Medio uniformi reſiſtente deſcribat Curvam *DraF*, ea ipſa erit quacum exire debet de eodem loco *D*, ſecundum eandem rectam *DR*, ut in ſpatio non reſiſtente deſcribat Parabolam. Nam Latus rectum Parabolæ hujus, ipſo motus initio, eſt $\frac{DV\,quad.}{Vr}$ & Vr eſt $\frac{tGT}{N}$ ſeu $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Recta autem, quæ, ſi duceretur, Hyperbolam *GTB* tangeret in *G*, parallela eſt ipſi *DK*, ideoq; Tt eſt $\frac{CK \times DR}{DC}$, & *N* erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr eſt $\frac{DRq. \times CK \times CP}{2\,CDq. \times Q}$, id eſt (ob proportionales *DR* & *DC*, *DV* & *DP*) $\frac{DVq. \times CK \times CP}{2\,DPq. \times QB}$. & Latus rectum $\frac{DV\,quad.}{Vr.}$ prodit $\frac{2\,DPq. \times QB}{CK \times CP}$, id eſt (ob proportionales *QB* & *CK*, *DA* & *AC*) $\frac{2DPq. \times DA}{AC \times CP}$, adeoq; ad $2DP$ ut $DP \times DA$ ad $PC \times AC$; hoc eſt ut reſiſtentia ad gravitatem. Q. E. D.

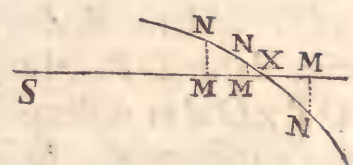
Corol. 2. Unde ſi corpus de loco quovis *D*, data cum velocitate, ſecundum rectam quamvis poſitione datam *DP* projiciatur, & reſiſtentia Medii ipſo motus initio detur, inveniri poteſt Curva *DraF*, quam corpus idem deſcribet. Nam ex data velocitate datur latus rectum Parabolæ, ut notum eſt. Et ſumendo $2DP$ ad latus illud rectum ut eſt vis Gravitatis ad vim reſiſtentiæ, datur *DP*. Dein ſecando *DC* in *A*, ut ſit $CP \times AC$ ad $DP \times DA$ in eadem illa ratione Gravitatis ad reſiſtentiam, dabitur punctum *A*. Et inde datur Curva *DraF*.

Corol. 3. Et contra, ſi datur curva *DraF*, dabitur & velocitas corporis & reſiſtentia Medii in locis ſingulis *r*. Nam ex data

ta ratione $CP \times AC$ ad $DP \times DA$, datur tum reſiſtentia Medii ſub initio motus, tum latus rectum Parabolæ: & inde datur etiam velocitas ſub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis rL, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis reſiſtentia in loco quovis r.

Corol. 4. Cum autem longitudo $2DP$ ſit ad latus rectum Parabolæ ut gravitas ad reſiſtentiam in D; & ex aucta Velocitate augeatur reſiſtentia in eadem ratione, at latus rectum Parabolæ augeatur in ratione illa duplicata: patet longitudinem $2DP$ augeri in ratione illa ſimplici, adeoq; velocitati ſemper proportionalem eſſe, neq; ex angulo CDP mutato augeri vel minui, niſi mutetur quoq; velocitas.

Corol. 5. Unde liquet methodus determinandi Curvam D*raF* ex Phænominis quamproxime, & inde colligendi reſiſtentiam & velocitatem quacum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia eadem cum velocitate, de loco D, ſecundum angulos diverſos CDP, cDp (minuſcularum literarum locis ſubintellectis) & cognoſcantur loca F, f, ubi incidunt in horizontale planum DC. Tum aſſumpta quacunq; longitudine pro DP vel Dp, fingatur quod reſiſtentia in D ſit ad gravitatem in ratione qualibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis SM. Deinde per computationem, ex longitudine illa aſſumpta DP, inveniantur longitudines DF, Df, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventa, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendiculum MN. Idem fac iterum ac tertio, aſſumendo ſemper novam reſiſtentiæ ad gravitatem rationem SM, & colligendo novam differentiam MN. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ SM, & negativæ ad alteram; & per puncta N, N, N agatur curva regularis NNN ſecans rectam



SM-

SMMM in X, & erit *SX* vera ratio reſiſtentiæ ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex hac ratione colligenda eſt longitudo *DF* per calculum; & longitudo quæ ſit ad aſſumptam longitudinem *DP* ut modo inventa longitudo *DF* ad longitudinem eandem per experimentum cognitam, erit vera longitudo *DP*. Qua inventa, habetur tum Curva Linea *DraF* quam corpus deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis.

Scholium.

Cæterum corpora reſiſti in ratione velocitatis Hypotheſis eſt magis Mathematica quam Naturalis. Obtinet hæc ratio quamproxime ubi corpora in Mediis rigore aliquo præditis tardiſſime moventur. In Mediis autem quæ rigore omni vacant (uti poſthac demonſtrabitur) corpora reſiſtuntur in duplicata ratione velocitatum. Actione corporis velocioris communicatur eidem Medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis, adeoq; tempore æquali (ob majorem Medii quantitatem perturbatam) communicatur motus in duplicata ratione major; eſtq; reſiſtentia (per motus Legem 2. & 3.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hac lege Reſiſtentiæ.

SECT.

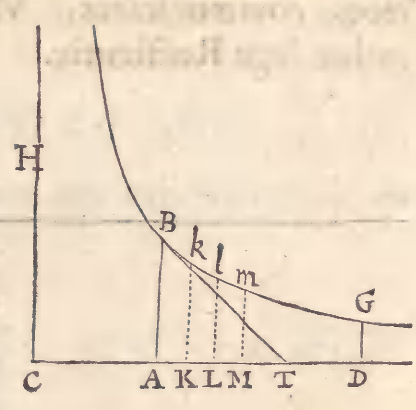
SECT. II.

De motu corporum quibus reſiſtitur in duplicata ratione velocitatum.

Prop. V. Theor. III.

Si corpori reſiſtitur in velocitatis ratione duplicata, & ſola vi inſita per Medium ſimilare movetur, tempora vero ſumantur in progreſſione Geometrica a minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio ſingulorum temporum ſunt in eadem progreſſione Geometrica inverſe, & quod ſpatia ſunt æqualia quæ ſingulis temporibus deſcribuntur.

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis eſt reſiſtentia Medii, & reſiſtentiæ proportionale eſt decrementum velocitatis; ſi tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum ſingulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionales. Sunto temporis particulæ illæ *AK*, *KL*, *LM*, &c. in recta *CD* ſumptæ, & erigantur perpendicula *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm*, &c. Hyperbolæ *BklmG*, centro *C* Aſymptotis rectangulis *CD*, *CH*, deſcriptæ occurrentia in *B*, *k*, *l*, *m*, &c. & erit *AB* ad *Kk* ut *CK* ad *CA*, & diviſim *AB*−*Kk* ad *Kk* ut *AK* ad *CA*, & viciſſim *AB*−*Kk* ad *AK* ut *Kk* ad *CA*, adeoq; ut *AB* x *Kk* ad *AB* x *CA*. Unde cum



AK & *AB* x *CA* dentur, erit *AB*−*Kk* ut *AB* x *Kk*; & ultimo, ubi coeunt *AB* & *Kk*, ut *ABq*. Et ſimili argumento erunt

runt $Kk - Ll$, $Ll - Mm$, &c. ut $Kkq.$, $Llq.$ &c. Linearum igitur AB, Kk, Ll, Mm quadrata ſunt ut earundem differentiæ, & idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipſarum differentiæ, ſimilis erit ambarum progreſſio. Quo demonſtrato, conſequens eſt etiam ut areæ his lineis deſcriptæ ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus deſcribuntur. Ergo ſi velocitas initio primi temporis AK exponatur per lineam AB, & velocitas initio ſecundi KL per lineam Kk, & longitudo primo tempore deſcripta per aream $AKkB$, velocitates omnes ſubſequentes exponentur per lineas ſubſequentes Ll, Mm, &c. & longitudines deſcriptæ per areas Kl, Lm, &c. & compoſite, ſi tempus totum exponatur per ſummam partium ſuarum AM, longitudo tota deſcripta exponetur per ſummam partium ſuarum $AMmB$. Concipe jam tempus AM ita dividi in partes AK, KL, LM, &c. ut ſint CA, CK, CL, CM, &c. in progreſſione Geometrica, & erunt partes illæ in eadem progreſſione, & velocitates AB, Kk, Ll, Mm, &c. in progreſſione eadem inverſa, atq; ſpatia deſcripta Ak, Kl, Lm, &c. æqualia. Q. E. D.

Corol. 1. Patet ergo quod ſi tempus exponatur per Aſymptoti partem quamvis AD, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam AB; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam DG, & ſpatium totum deſcriptum per aream Hyperbolicam adjacentem $ABGD$; necnon ſpatium quod corpus aliquod eodem tempore AD, velocitate prima AB, in Medio non reſiſtente deſcribere poſſet, per rectangulum. $AB \times AD$.

Corol. 2. Unde datur ſpatium in Medio reſiſtente deſcriptum, capi ndo illud ad ſpatium quod velocitate uniformi AB in Medio non reſiſtente ſimul deſcribi poſſet, ut eſt area Hyperbolica $ABGD$ ad rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 3. Datur etiam reſiſtentia Medii, ſtatuendo eam ipſo motus initio æqualem eſſe vi uniformi centripetæ, quæ, in cadente corpore, tempore AC, in Medio non reſiſtente, generare poſſet velocitatem AB. Nam ſi ducatur BT quæ tangat Hyperbolam

in

in *B*, & occurrat Aſymptoto in *T*; recta *AT* æqualis erit ipſi *AC*, & tempus exponet quo reſiſtentia prima uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem totam *AB*.

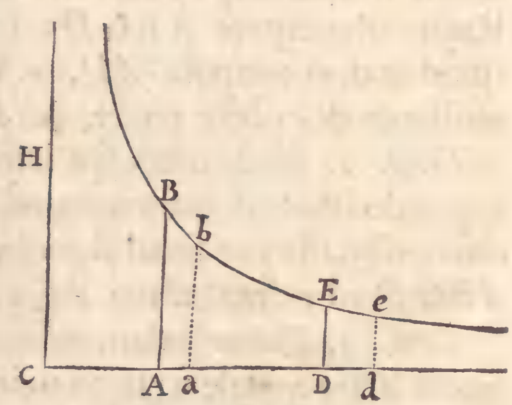
Corol. 4. Et inde datur etiam proportio hujus reſiſtentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et viceverſa, ſi datur proportio reſiſtentiæ ad datam quamvis vim centripetam, datur tempus *AC*, quo vis centripeta reſiſtentiæ æqualis generare poſſit velocitatem quamvis *AB*; & inde datur punctum *B* per quod Hyperbola Aſymptotis *CH*, *CD* deſcribi debet; ut & ſpatium *ABGD*, quod corpus incipiendo motum ſuum cum velocitate illa *AB*, tempore quovis *AD*, in Medio ſimilari reſiſtente deſcribere poteſt.

Prop. VI. Theor. IV.

Corpora Sphærica homogenea & æqualia, reſiſtentiis in duplicata ratione velocitatum impedita, & ſolis viribus inſitis incitata, temporibus quæ ſunt reciproce ut velocitates ſub initio, deſcribunt ſemper æqualia ſpatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.

Aſymptotis rectangulis *CD*, *CH* deſcripta Hyperbola quavis *BbEe* ſecante perpendicula *AB*, *ab*, *DE*, *de*, in *B*, *b*, *E*, *e*, exponantur velocitates initiales per perpendicula *AB*, *DE*, & tempora per lineas *Aa*, *Dd*. Eſt ergo ut *Aa* ad *Dd* ita (per Hypotheſin) *DE* ad *AB*, & ita (ex natura Hyperbolæ) *CA* ad *CD*; & componendo, ita *Ca* ad *Cd*. Ergo areæ *ABba*, *DEed*, hoc eſt ſpatia deſcripta æquantur inter ſe, & velocitates primæ *AB*,



AB, *DE* ſunt ultimis *ab*, *de*, & propterea (dividendo) partibus etiam ſuis amiſſis *AB*−*ab*, *DE*−*de* proportionales. Q. E. D.

Prop. VII. Theor. V.

Corpora Sphærica quibus reſiſtitur in duplicata ratione velocitatum, temporibus quæ ſunt ut motus primi directe & reſiſtentiæ primæ inverſe, amittent partes motuum proportionales totis, & ſpatia deſcribent temporibus iſtis in velocitates primas ductis proportionalia.

Namq; motuum partes amiſſæ ſunt ut reſiſtentiæ & tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ ſint totis proportionales, debebit reſiſtentia & corpus conjunctim eſſe ut motus. Proinde tempus erit ut Motus directe & reſiſtentia inverſe. Quare temporum particulis in ea ratione ſumptis, corpora amittent ſemper particulas motuum proportionales totis, adeoq; retinebunt velocitates in ratione prima. Et ob datam velocitatum rationem, deſcribent ſemper ſpatia quæ ſunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur ſi æquivelocia corpora reſiſtuntur in duplicata ratione diametrorum, Globi homogenei quibuſcunq ; cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia diametris ſuis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim Globi cujuſq; erit ut ejus velocitas & Maſſa conjunctim, id eſt ut velocitas & cubus diametri; reſiſtentia (per Hypotheſin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc Propoſitionem) eſt in ratione priore directe & ratione poſteriore inverſe, id eſt ut diameter directe & velocitas inverſe; adeoq; ſpatium (tempori & velocitati proportionale) eſt ut diameter.

Corol. 2. Si æquivelocia corpora reſiſtuntur in ratione ſeſquialtera diametrorum: Globi homogenei quibuſcunq; cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia in ſeſquialtera ratione diametrorum,

rum, amittent partes motuum proportionales totis. Nam tempus augetur in ratione reſiſtentiæ diminutæ, & ſpatium augetur in ratione temporis.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi æquivelocia corpora reſiſtuntur in ratione dignitatis cujuſcunq; diametrorum, ſpatia quibus Globi homogenei, quibuſcunq; cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicata. Sunto diametri D & E; & ſi reſiſtentiæ ſint ut D^n & E^n, ſpatia quibus amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Igitur deſcribendo ſpatia ipſis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eadem ratione ad invicem ac ſub initio.

Corol. 4. Quod ſi Globi non ſint homogenei, ſpatium a Globo denſiore deſcriptum augeri debet in ratione denſitatis. Motus enim ſub pari velocitate major eſt in ratione denſitatis, & tempus (per hanc Propoſitionem) augetur in ratione motus directe, ac ſpatium deſcriptum in ratione temporis.

Corol. 5. Et ſi Globi moveantur in Mediis diverſis, ſpatium in Medio, quod cæteris paribus magis reſiſtit, diminuendum erit in ratione majoris reſiſtentiæ. Tempus enim (per hanc Propoſitionem) diminuetur in ratione reſiſtentiæ, & ſpatium in ratione temporis.

Lemma. II.

Momentum Genitæ æquatur momentis Terminorum ſingulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.

Genitam voco quantitatem omnem quæ ex Terminis quibuſcunq; in Arithmetica per multiplicationem, diviſionem & extractionem radicum; in Geometria per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium abſq; additione & ſubductione generatur. Ejuſmodi quantitates

tes ſunt Facti, Quoti, Radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica & ſimiles. Has quantitates ut indeterminatas & inſtabiles, & quaſi motu fluxuve perpetuo creſcentes vel decreſcentes hic conſidero, & eorum incrementa vel decrementa momentanea ſub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis ſeu affirmativis, ac decrementa pro ſubductitiis ſeu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Momenta, quam primum finitæ ſunt magnitudinis, deſinunt eſſe momenta. Finiri enim repugnat aliquatenus perpetuo eorum incremento vel decremento. Intelligenda ſunt principia jamjam naſcentia finitarum magnitudinum. Neq; enim ſpectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum, ſed prima naſcentium proportio. Eodem recidit ſi loco momentorum uſurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum, (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hiſce proportionales. Termini autem cujuſq; Generantis coefficiens eſt quantitas, quæ oritur applicando Genitam ad hunc Terminum.

Igitur ſenſus Lemmatis eſt, ut ſi quantitatum quarumcunq; perpetuo motu creſcentium vel decreſcentium A, B, C, &c. Momenta, vel mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio rectanguli AB fuerit $Ab + aB$, & contenti ABC momentum fuerit $ABc + AbC + aBC$: & dignitatum A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A^2}$, & $\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$ momenta $2Aa$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ reſpective. Et generaliter ut dignitatis cujuſcunq; $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut Genitæ A *quad.* x B momentum fuerit $2aAB + A^2b$; & Genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2 + 4A^3bB^3C^2 + 2A^3B^4Cc$; & Genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ ſive A^3B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2} - 2A^3bB^{-3}$: & ſic in cæteris. Demonſtratur vero Lemma in hunc modum.

Caſ. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A-\frac{1}{2}a$ in $B-\frac{1}{2}b$, ſeu $AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}Ab+\frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta ſunt, evadit $A+\frac{1}{2}a$ in $B+\frac{1}{2}b$ ſeu $AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}Ab+\frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo ſubducatur rectangulum prius, & manebit exceſſus $aB+Ab$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB+Ab$. Q. E. D.

Caſ. 2. Ponatur AB æquale G, & contenti ABC ſeu GC momentum (per Caſ. 1.) erit $gC+Gc$, id eſt (ſi pro G & g ſcribantur AB & $aB+Ab$) $aBC+AbC+ABc$. Et par eſt ratio contenti ſub lateribus quotcunq;. Q. E. D.

Caſ. 3. Ponantur A, B, C æqualia; & ipſius A^2, id eſt rectanguli AB, momentum $aB+Ab$ erit $2aA$, ipſius autem A^3, id eſt contenti ABC, momentum $aBC+AbC+ABc$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuſcunq; A^n eſt naA^{n-1}. Q. E. D.

Caſ. 4. Unde cum $\frac{1}{A}$ in A ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ductum in A, una cum $\frac{1}{A}$ ducto in a erit momentum ipſius 1, id eſt nihil. Proinde momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ſeu A^{-1} eſt $\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cum $\frac{1}{A^n}$ in A^n ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A_n una cum $\frac{1}{A^n}$ in naA^{n-1} erit nihil. Et propterea momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$ ſeu A^{-n} erit $-\frac{na}{A^{n+1}}$. Q. E. D.

Caſ. 5. Et cum $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ ſit A, momentum ipſius $A^{\frac{1}{2}}$ in $2A^{\frac{1}{2}}$ erit a, per Caſ. 3: ideoq; momentum ipſius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ ſive

$2aA^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter ſi ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æqualem B, erit A^m æquale B^n, ideoq; maA^{m-1} æquale nbB^{n-1}, & maA^{-1} æquale nbB^{-1} ſeu $\frac{nb}{A^{\frac{m}{n}}}$, adeoq; $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b, id eſt æquale momento ipſius $A^{\frac{m}{n}}$. Q. E. D.

Cas. 6. Igitur Genitæ cujuſcunq; $A^m B^n$ momentum eſt momentum ipſius A^m ductum in B^n, una cum momento ipſius B^n ducto in A^m, id eſt $maA^{m-1} + nbB^{n-1}$; idq; ſive dignitatum indices m & n ſint integri numeri vel fracti, ſive affirmativi vel negativi. Et par eſt ratio contenti ſub pluribus dignitatibus. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in continue proportionalibus, ſi terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipſos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continue proportionales; & ſi detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter ſe ut $-2A$, $-B$, D, $2E$, $3F$.

Corol. 2. Et ſi in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum eſt de lateribus rectanguli cujuſcunq; dati.

Corol. 3. Et ſi ſumma vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

Scholium.

In literis quæ mihi cum Geometra peritiſſimo *G. G. Leibnitio* annis abhinc decem intercedebant, cum ſignificarem me compotem eſſe methodi determinandi Maximas & Minimas, ducendi Tan-

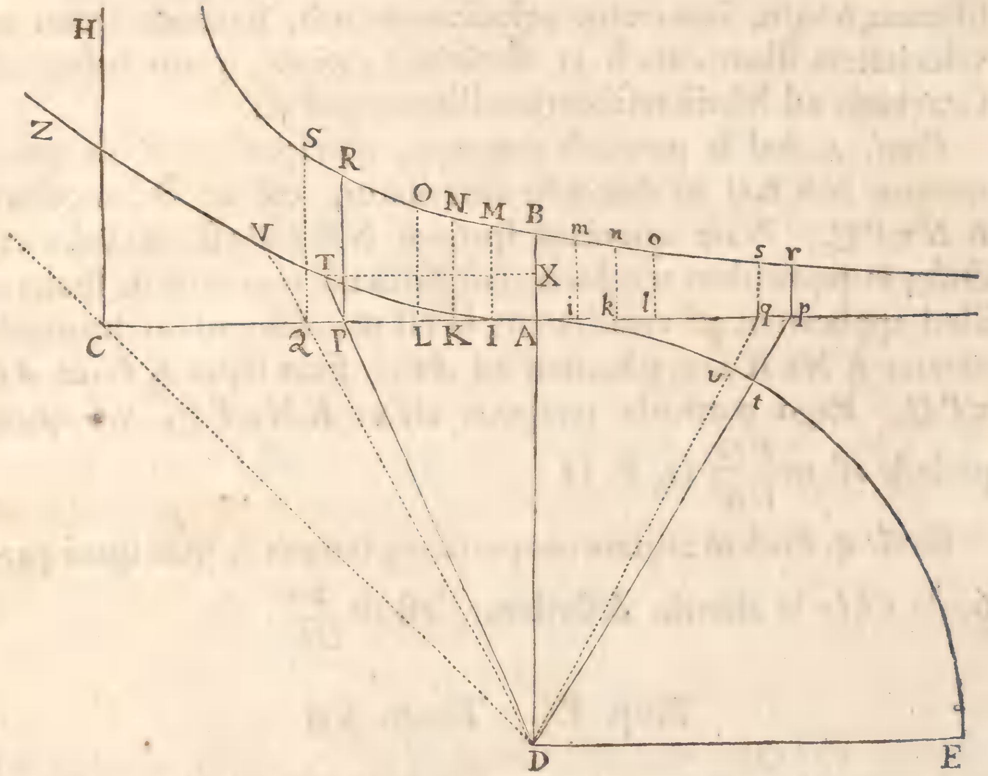
Tangentes, & ſimilia peragendi, quæ in terminis ſurdis æque ac in rationalibus procederet, & literis tranſpoſitis hanc ſententiam involventibus [Data æquatione quotcunq; fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, & vice verſa] eandem celarem: reſcripſit Vir Clariſſimus ſe quoq; in ejuſmodi methodum incidiſſe, & methodum ſuam communicavit a mea vix abludentem præterquam in verborum & notarum formulis. Utriuſq; fundamentum continetur in hoc Lemmate.

Prop. VIII. Theor. VI.

Si corpus in Medio uniformi, Gravitate uniformiter agente, recta aſcendat vel deſcendat, & ſpatium totum deſcriptum diſtinguatur in partes æquales, inq; principiis ſingularum partium (addendo reſiſtentiam Medii ad vim gravitatis, quando corpus aſcendit, vel ſubducendo ipſam quando corpus deſcendit) colligantur vires abſolutæ; dico quod vires illæ abſolutæ ſunt in progreſſione Geometrica.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC; reſiſtentia per lineam indefinitam AK; vis abſoluta in deſcenſu corporis per differentiam KC; velocitas corporis per lineam AP (quæ ſit media proportionalis inter AK & AC, ideoq; in dimidiata ratione reſiſtentiæ) incrementum reſiſtentiæ data temporis particula factum per lineolam KL, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam PQ; & centro C Aſymptotis rectangulis CA, CH deſcribatur Hyperbola quævis BNS, erectis perpendiculis AB, KN, LO, PR, QS occurrens in B, N, O, R, S. Quoniam AK eſt ut $APq.$, erit hujus momentum KL ut illius momentum $2APQ$, id eſt ut AP in KC. Nam velocitatis incrementum PQ, per motus Leg. 2. proportionale eſt vi generanti KC. Componatur ratio ipſius KL cum ratione ipſius KN, & fiet rectangulum $KL \times KN$ ut $AP \times KC \times KN$; hoc eſt, ob datum rectangulum $KC \times KN$, ut AP. Atqui areæ Hyperbolicæ

KNOL ad rectangulum *KL*x*KN* ratio ultima, ubi coeunt puncta *K* & *L*, eſt æqualitatis. Ergo area illa Hyperbolica evaneſcens eſt ut *AP*. Componitur igitur area tota Hyperbolica *ABOL* ex particulis *KNOL* velocitati *AP* ſemper proportionalibus, & propterea ſpatio velocitate iſta deſcripto proportionalis eſt. Dividatur jam area illa in partes æquales *ABMI*, *IMNK*,



KNOL, &c. & vires abſolutæ *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt in progreſſione Geometrica. Q. E. D. Et ſimili argumento, in aſcenſu corporis, ſumendo, ad contrariam partem puncti *A*, æquales areas *ABmi*, *imnk*, *knol*, &c. conſtabit quod vires abſolutæ *AC*, *iC*, *kC*, *lC*, &c. ſunt continue proportionales. Ideoq; ſi ſpatia omnia in aſcenſu & deſcenſu capiantur æqualia; omnes vires abſolutæ *lC*, *kC*, *iC*, *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt continue proportionales. Q. E. D.

Corol.

Corol. 1. Hinc ſi ſpatium deſcriptum exponatur per aream Hyperbolicam $ABNK$; exponi poſſunt vis gravitatis, velocitas corporis & reſiſtentia Medii per lineas AC, AP & AK reſpective; & vice verſa.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum deſcendendo poteſt unquam acquirere, exponens eſt linea AC.

Corol. 3. Igitur ſi in data aliqua velocitate cognoſcatur reſiſtentia Medii, invenietur velocitas maxima, ſumendo ipſam ad velocitatem illam datam in dimidiata ratione, quam habet vis Gravitatis ad Medii reſiſtentiam illam cognitam.

Corol. 4. Sed & particula temporis, quo ſpatii particula quam minima $NKLO$ in deſcenſu deſcribitur, eſt ut rectangulum $KN \times PQ$. Nam quoniam ſpatium $NKLO$ eſt ut velocitas ducta in particulam temporis; erit particula temporis ut ſpatium illud applicatum ad velocitatem, id eſt ut rectangulum quam minimum $KN \times KL$ applicatum ad AP. Erat ſupra KL ut $AP \times PQ$. Ergo particula temporis eſt ut $KN \times PQ$, vel quod perinde eſt, ut $\frac{PQ}{CK}$. Q. E. D.

Corol. 5. Eodem argumento particula temporis, quo ſpatii particula $nklo$ in aſcenſu deſcribitur, eſt ut $\frac{pq}{Ck}$.

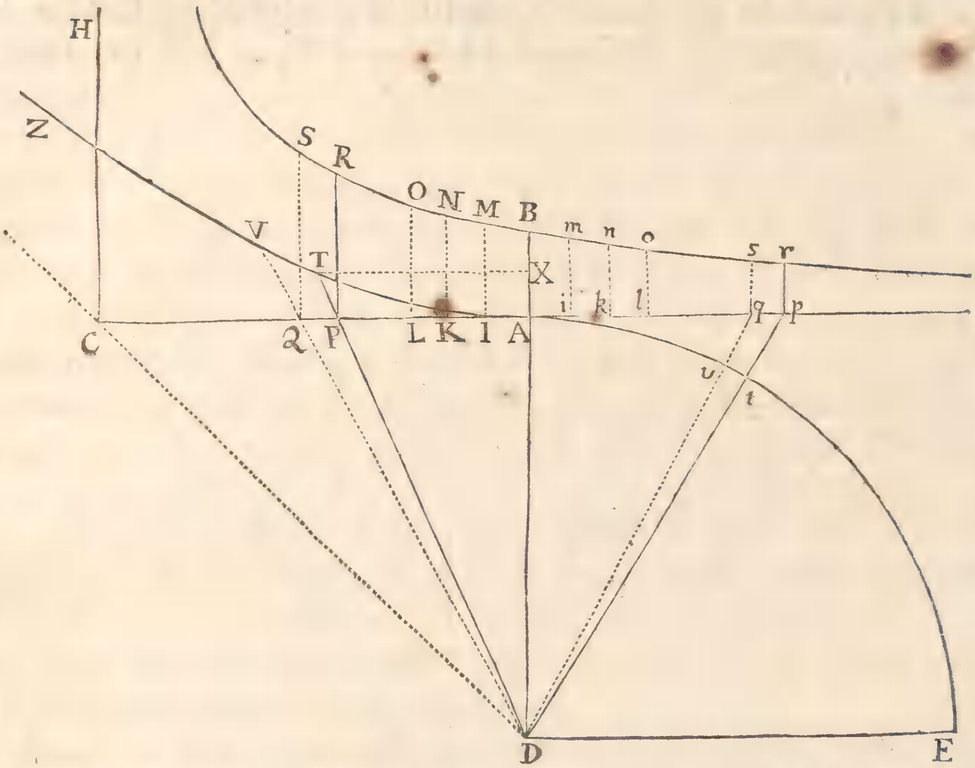
Prop. IX. Theor. VII.

Poſitis jam demonſtratis, dico quod ſi Tangentes angulorum ſectoris Circularis & ſectoris Hyperbolici ſumantur velocitatibus proportionales, exiſtente radio juſtæ magnitudinis: erit tempus omne aſcenſus futuri ut ſector Circuli, & tempus omne deſcenſus præteriti ut ſector Hyperbolæ.

Rectæ AC, qua vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur AD. Centro D ſemidiametro AD deſcribatur tum circuli Quadrans AtE, tum Hyperbola rectangula AVZ axem

axem habens AX, verticem principalem A & Aſymptoton DC. Jungantur Dp, DP, & erit Sector circularis AtD ut tempus aſcenſus omnis futuri; & Sector Hyperbolicus ATD ut tempus deſcenſus omnis præteriti.

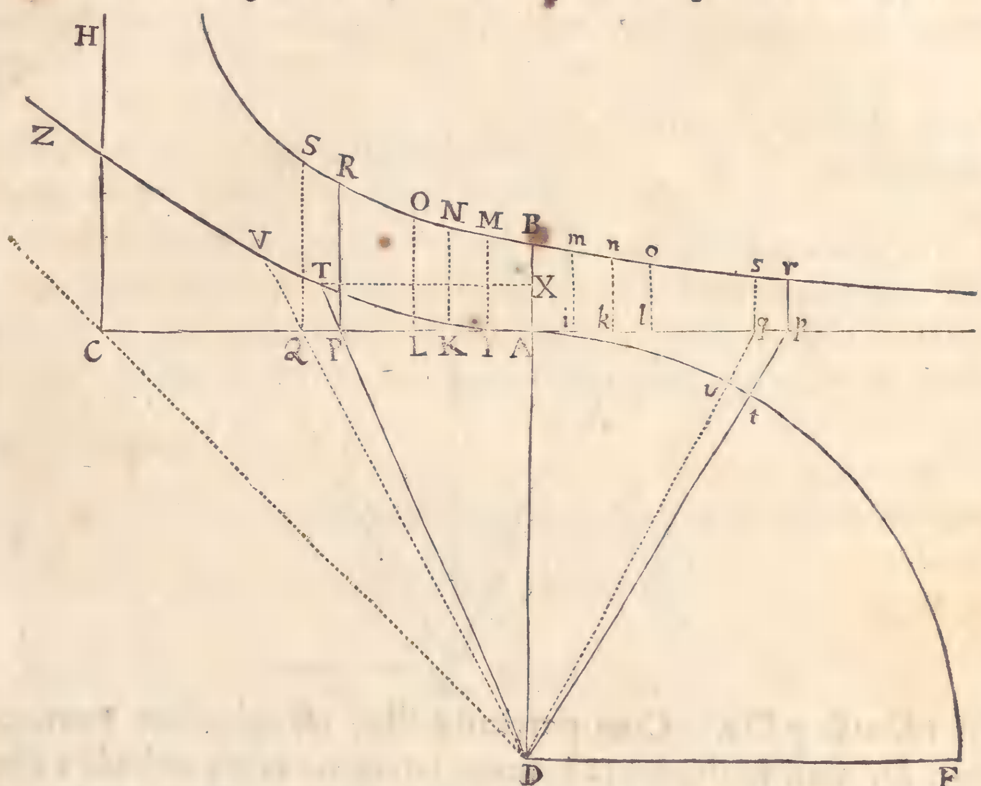
Cas 1. Agatur enim Dvq abſcindens Sectoris ADt & trianguli ADp momenta, ſeu particulas quam minimas ſimul deſcriptas tDv & pDq.



Cum particulæ illæ, ob angulum communem D, ſunt in duplicata ratione laterum, erit particula tDv ut $\frac{qDp}{pD\,quad.}$. Sed $pD\,quad.$ eſt $AD\,quad. + Ap\,quad.$ id eſt $AD\,quad. + Ak \times AD$ ſeu $AD \times Ck$; & qDp eſt $\frac{1}{2}AD \times pq$. Ergo Sectoris particula vDt eſt ut $\frac{pq}{Ck}$, id eſt, per Corol. 5, Prop. VIII. ut particula temporis. Et componendo fit ſumma particularum omnium tDv in Sectore ADt, ut ſumma particularum temporis ſingulis velocitatis decreſcentis Ap particulis amiſſis pq

reſpondentium, uſq; dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc eſt, Sector totus *ADt* eſt ut aſcenſus totius futuri tempus. Q. E. D.

Cas. 2. Agatur *DQV* abſcindens tum Sectoris *DAV*, tum trianguli *DAQ* particulas quam minimas *TDV* & *PDQ*; & erunt hæ particulæ ad invicem ut *DTq.* ad *DPq.* id eſt (ſi *TX* & *AP* parallelæ ſint) ut *DXq.* ad *DAq.* vel *TXq.* ad *APq.* & diviſim ut *DXq.* − *TXq.* ad *ADq.* − *APq.* Sed ex natura



Hyperbolæ *DXq.* − *TXq.* eſt *ADq.*, & per Hypotheſin *APq.* eſt *AD* x *AK*. Ergo particulæ ſunt ad invicem ut *ADq.* ad *ADq.* − *AD* x *AK*; id eſt ut *AD* ad *AD* − *AK* ſeu *AC* ad *CK*: ideoq; Sectoris particula *TDV* eſt $\frac{PDQ \times AC}{CK}$, atq; adeo ob datas *AC* & *AD*, ut $\frac{PQ}{CK}$; & propterea per Corol. 5. Prop.

VIII.

VIII. Lib. II. ut particula temporis incremento velocitatis PQ reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum temporis, quibus omnes velocitatis AP particulæ PQ generantur, ut ſumma particularum Sectoris ADT, id eſt tempus totum ut Sector totus. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi AB æquetur quartæ parti ipſius AC, ſpatium $ABRP$, quod corpus tempore quovis ATD cadendo deſcribit, erit ad ſpatium quod corpus ſemiſſe velocitatis maximæ AC, eodem tempore uniformiter progrediendo deſcribere poteſt, ut area $ABRP$, qua ſpatium cadendo deſcriptum exponitur, ad aream ATD qua tempus exponitur. Nam cum ſit AC ad AP ut AP ad AK, erit $2APQ$ æquale $AC \times KL$ (per Corol 1. Lem. II. hujus) adeoq; KL ad PQ ut $2AP$ ad AC, & inde LKN ad $PQ \times \frac{1}{2} AD$ ſeu DPQ ut $2AP \times KN$ ad $\frac{1}{2} AC \times AD$. Sed erat DPQ ad DTV ut CK ad AC. Ergo ex æquo LKN eſt ad DTV ut $2AP \times KN \times CK$ ad $\frac{1}{2} AC$ *cub.*; id eſt, ob æquales CKN & $\frac{1}{4} ACq.$, ut AP ad AC; hoc eſt ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo poteſt acquirere. Cum igitur arearum $ABKN$ & AVD momenta LKN & DTV ſunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes ſimul genitæ ut ſpatia ſimul deſcripta, ideoq; areæ totæ ab initio genitæ $ABKN$ & AVD ut ſpatia tota ab initio deſcenſus deſcripta. Q. E. D.

Corol. 2. Idem conſequitur etiam de ſpatio quod in aſcenſu deſcribitur. Nimirum quod ſpatium illud omne ſit ad ſpatium, uniformi cum velocitate AC eodem tempore deſcriptum, ut eſt area $ABnk$ ad Sectorem ADt.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore ATD cadentis eſt ad velocitatem, quam eodem tempore in ſpatio non reſiſtente acquireret, ut triangulum APD ad Sectorem Hyperbolicum ATD. Nam velocitas in Medio non reſiſtente foret ut tempus ATD, & in Medio reſiſtente eſt ut AP, id eſt ut triangulum APD. Et velocitates illæ initio deſcenſus æquantur inter ſe, perinde ut areæ illæ ATD, APD.

 Corol.

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in aſcenſu eſt ad velocitatem, qua corpus eodem tempore in ſpatio non reſiſtente omnem ſuum aſcendendi motum amittere poſſet, ut triangulum *ApD* ad Sectorem circularem *AtD*; ſive ut recta *Ap* ad arcum *At*.

Corol. 5. Eſt igitur tempus quo corpus in Medio reſiſtente cadendo velocitatem A*P* acquirit, ad tempus quo velocitatem maximam A*C* in ſpatio non reſiſtente cadendo acquirere poſſet, ut Sector A*DT* ad triangulum A*DC*: & tempus, quo velocitatem A*p* in Medio reſiſtente aſcendendo poſſit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in ſpatio non reſiſtente aſcendendo poſſet amittere, ut arcus *At* ad ejus Tangentem *Ap*.

Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum. Nam corporis in infinitum deſcendentis datur velocitas maxima, per Corol. 2. & 3. Theor. VI, Lib. II. indeq; datur & ſpatium quod ſemiſſe velocitatis illius dato tempore deſcribi poteſt, & tempus quo corpus velocitatem illam in ſpatio non reſiſtente cadendo poſſet acquirere. Et ſumendo Sectorem A*DT* vel A*Dt* ad triangulum A*DC* in ratione temporum; dabitur tum velocitas A*P* vel A*p*, tum area A*BKN* vel A*Bkn*, quæ eſt ad Sectorem ut ſpatium quæſitum ad ſpatium jam ante inventum.

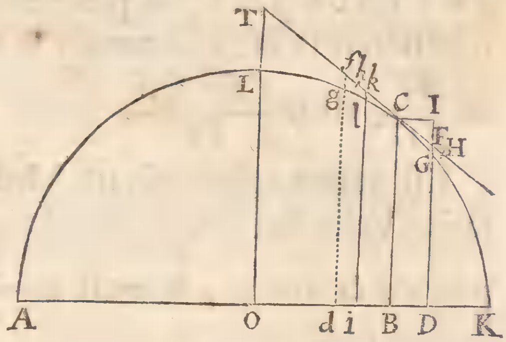
Corol. 7. Et regrediendo, ex dato aſcenſus vel deſcenſus ſpatio A*Bnk* vel A*BNK*, dabitur tempus A*Dt* vel A*DT*.

Prop. X. Prob. III.

Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum Horizontis, ſitq; reſiſtentia ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum Medii denſitas in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas in iiſdem locis.

Sit A*K* planum illud plano Schematis perpendiculare; A*CK* linea curva; *C* corpus in ipſa motum; & *FCf* recta ipſam tangens

gens in *C*. Fingatur autem corpus *C* nunc progredi ab A ad *K* per lineam illam A*CK*, nunc vero regredi per eandem lineam; & in progreſſu impediri a Medio, in regreſſu æque promoveri, ſic ut in iiſdem locis eadem ſemper ſit corporis progredientis & regredientis velocitas. Æqualibus autem temporibus deſcribat corpus progrediens arcum quam minimum *CG*, & corpus regrediens arcum *Cg*; & ſint *CH*, *Ch* longitudines æquales rectilineæ, quas corpora de loco *C* exeuntia, his temporibus, abſq; Medii & Gravitatis actionibus deſcriberent: & a punctis *C*, *G*, *g* ad planum horizontale A*K* demittantur perpendicula *CB*, *GD*, *gd*, quorum *GD* ac *gd* tangenti occurrant in *F* & *f*. Per Medii reſiſtentiam fit ut corpus progrediens, vice longitudinis *CH*, deſcribat ſolummodo longitudinem *CF*; & per vim gravitatis tranſfertur corpus de *F* in *G*: adeoq; lineola *HF* vi reſiſtentiæ, & lineola *FG* vi gravitatis ſimul generantur. Proinde (per Lem. X. Lib. I.) lineola *FG* eſt ut vis gravitatis & quadratum temporis conjunctim, adeoq; (ob datam gravitatem) ut quadratum temporis; & lineola *HF* ut reſiſtentia & quadratum temporis, hoc eſt ut reſiſtentia & lineola *FG*. Et inde reſiſtentia fit ut *HF* directe & *FG* inverſe, ſive ut $\frac{HF}{FG}$. Hæc ita ſe habent in lineolis naſcentibus. Nam in lineolis finitæ magnitudinis hæ rationes non ſunt accuratæ.



Et ſimili argumento eſt *fg* ut quadratum temporis, adeoq; ob æqualia tempora æquatur ipſi *FG*; & impulſus quo corpus regrediens urgetur eſt ut $\frac{hf}{fg}$. Sed impulſus corporis regredientis

&

& reſiſtentia progredientis ipſo motus initio æquantur, adeoq; & ipſis proportionales $\frac{bf}{fg}$ & $\frac{HF}{FG}$ æquantur; & propterea ob æquales fg & FG, æquantur etiam bf & HF, ſuntq; adeo CF, CH (vel Cb) & Cf in progreſſione Arithmetica, & inde HF ſemidifferentia eſt ipſarum Cf & CF; & reſiſtentia quæ ſupra fuit ut $\frac{HF}{FG}$, eſt ut $\frac{Cf-CF}{FG}$.

Eſt autem reſiſtentia ut Medii denſitas & quadratum velocitatis. Velocitas autem ut deſcripta longitudo CF directe & tempus $\surd FG$ inverſe, hoc eſt ut $\frac{CF}{\surd FG}$, adeoq; quadratum velocitatis ut $\frac{CFq.}{FG}$. Quare reſiſtentia, ipſiq; proportionalis $\frac{Cf-CF}{FG}$ eſt ut Medii denſitas & $\frac{CFq.}{FG}$ conjunctim; & inde Medii denſitas ut $\frac{Cf-CF}{FG}$ directe & $\frac{CFq.}{FG}$ inverſe, id eſt ut $\frac{Cf-CF}{CFq.}$. Q. E. D.

Corol. 1. Et hinc colligitur, quod ſi in Cf capiatur Ck æqualis CF, & ad planum horizontale AK demittatur perpendiculum ki, ſecans curvam ACK in l; fiet Medii denſitas ut $\frac{FG-kl}{CF \times \overline{FG+kl}}$. Erit enim fC ad kC ut $\surd fg$ ſeu $\surd FG$ ad $\surd kl$, & diviſim fk ad kC, id eſt $Cf-CF$ ad CF ut $\surd FG - \surd kl$ ad $\surd kl$; hoc eſt (ſi ducatur terminus uterq; in $\surd FG + \surd kl$) ut $FG - kl$ ad $kl + \surd FG \times kl$, ſive ad $FG + kl$. Nam ratio prima naſcentium $kl + \surd FG \times kl$ & $FG + kl$ eſt æqualitatis. Scribatur itaq; $\frac{FG-kl}{FG+kl}$ pro $\frac{Cf-CF}{CF}$; & Medii denſitas, quæ fuit ut $\frac{Cf-CF}{CF\,quad.}$ evadet ut $\frac{FG-kl}{CF \times FG+kl}$.

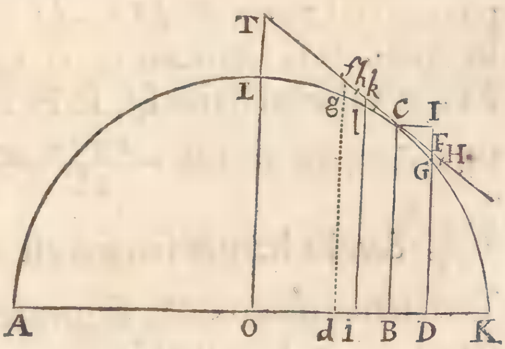
Corol.

Corol. 2. Unde cum 2 HF & $Cf - CF$ æquentur, & FG & kl (ob rationem æqualitatis) componant 2 FG; erit 2 HF ad CF ut $FG - kl$ ad 2 FG; & inde HF ad FG, hoc eſt reſiſtentia ad gravitatem, ut rectangulum CF in $FG - kl$ ad 4 FG *quad.*

Corol. 3. Et hinc ſi curva linea definiatur per relationem inter baſem ſeu abſciſſam AB & ordinatim applicatam BC; (ut moris eſt) & valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem: Problema per primos ſeriei terminos expedite ſolvetur: ut in Exemplis ſequentibus.

Exempl. 1. Sit Linea ACK ſemicirculus ſuper diametro AK deſcriptus, & requiratur Medii denſitas quæ faciat ut Projectile in hac linea moveatur.

Biſecetur ſemicirculi diameter AK in O; & dic OK n, OB a, BC e, & BD vel Bi o: & erit $DGq.$ ſeu $OGq. - ODq.$ æquale $nn - aa - 2ao - oo$ ſeu $ee - 2ao - oo$; & radice per methodum noſtram extracta, fiet $DG = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5}$ &c. Hic ſcribatur nn pro $ee + aa$ & evadet $DG = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} -$ &c.



Hujuſmodi Series diſtinguo in terminos ſucceſſivos in hunc modum. Terminum primum appello in quo quantitas infinite parva o non extat; ſecundum in quo quantitas illa extat unius dimenſionis; tertium in quo extat duarum, quartum in quo trium eſt, & ſic in infinitum. Et primus terminus, qui hic eſt e, denotabit ſemper longitudinem ordinatæ BC inſiſtentis ad indefinitæ quantitatis initium B; ſecundus termi-

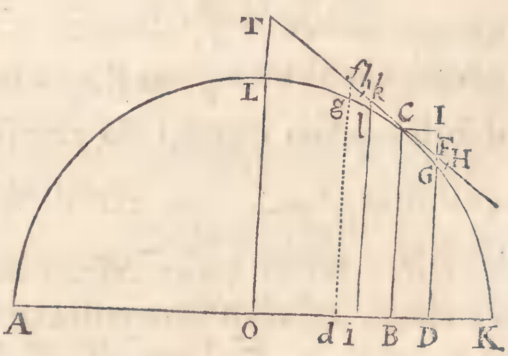
nus

nus qui hic eſt $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam inter *BC* & *DF*, id eſt lineolam *IF*, quæ abſcinditur complendo parallelogrammum *BC-ID*, atq; adeo poſitionem Tangentis *CF* ſemper determinat: ut in hoc caſu capiendo *IF* ad *IC* ut eſt $\frac{ao}{e}$ ad o ſeu a ad e. Terminus tertius, qui hic eſt $\frac{nnoo}{2e^3}$ deſignabit lineolam *FG*, quæ jacet inter Tangentem & Curvam, adeoq; determinat angulum contactus *FCG*, ſeu curvaturam quam curva linea habet in *C*. Si lineola illa *FG* finitæ eſt magnitudinis, deſignabitur per terminum tertium una cum ſubſequentibus in infinitum. At ſi lineola illa minuatur in infinitum, termini ſubſequentes evadent infinite minores tertio, ideoq; negligi poſſunt. Terminus quartus, qui hic eſt $\frac{anno^3}{2e^5}$, exhibet variationem Curvaturæ; quintus variationem variationis, & ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum Serierum in ſolutione Problematum, quæ pendent a Tangentibus & curvatura Curvarum.

Præterea *CF* eſt latus quadratum ex *CIq.* & *IFq.* hoc eſt ex *BDq.* & quadrato termini ſecundi. Eſtq; *F*G $+ kl$ æqualis duplo termini tertii, & *F*G $- kl$ æqualis duplo quarti. Nam valor ipſius *D*G convertitur in valorem ipſius il, & valor ipſius *F*G in valorem ipſius kl, ſcribendo *Bi* pro *BD*, ſeu $-o$ pro $+o$. Proinde cum *F*G ſit $-\frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ &c. erit $kl = -\frac{nnoo}{2e^3} + \frac{anno^3}{2e^5}$, &c. Et horum ſumma eſt $-\frac{nnoo}{e^3}$, differentia $-\frac{anno^3}{e^5}$. Terminum quintum & ſequentes hic negligo, ut infinite minores quam qui in hoc Problemate conſiderandi veniant. Itaq; ſi deſignetur Series univerſaliter his terminis $\mp Qo - Roo - So^3$ &c. erit *CF* æqualis $\sqrt{oo + QQoo}$, *F*G $+ kl$ æqualis $2Roo$, & *F*G $- kl$ æqualis $2So^3$. Pro *CF*, *F*G $+ kl$ & *F*G $- kl$ ſcribantur hi

hi earum valores, & Medii denſitas quæ erat ut $\frac{FG-kl}{CF \text{ in } FG+kl}$ jam fiet ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. Deducendo igitur Problema unumquodq; ad ſeriem convergentem, & hic pro Q, R & S ſcribendo terminos ſeriei ipſis reſpondentes; deinde etiam ponendo reſiſtentiam Medii in loco quovis G eſſe ad Gravitatem ut $S\sqrt{1+QQ}$ ad $2RR$, & velocitatem eſſe illam ipſam quacum corpus, de loco C ſecundum rectam CF egrediens, in Parabola, diametrum CB & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ habente, deinceps moveri poſſet, ſolvetur Problema.

Sic in Problemate jam ſolvendo, ſi ſcribantur $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$ ſeu $\frac{n}{e}$ pro $\sqrt{1+QQ}$, $\frac{nn}{2e^3}$ pro R, & $\frac{ann}{2e^5}$ pro S, prodibit Medii denſitas ut $\frac{a}{ne}$, hoc eſt (ob datam n) ut $\frac{a}{e}$ ſeu $\frac{OB}{BC}$, id eſt ut Tangentis longitudo illa CT, quæ ad ſemidiametrum OL ipſi AK normaliter inſiſtentem terminatur; & reſiſtentia erit ad gravitatem ut a ad n, id eſt ut OB ad circuli ſemidiametrum OK, velocitas autem erit ut $\sqrt{2BC}$. Igitur ſi corpus C certa cum velocitate, ſecundum lineam ipſi OK parallelam, exeat de loco L, & Medii denſitas in ſingulis locis C ſit ut longitudo tangentis CT, & reſiſtentia etiam in loco aliquo C ſit ad vim gravitatis ut OB ad OK; corpus illud deſcribet circuli quadrantem LCK. Q.E.I.



At ſi corpus idem de loco A ſecundum lineam ipſi AK per-

pendicularem egrederetur, ſumenda eſſet OB ſeu a ad contrarias partes centri O, & propterea ſignum ejus mutandum eſſet, & ſcribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret Medii denſitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem denſitatem (hoc eſt quæ motus corporum accelerat) Natura non admittit, & propterea naturaliter fieri non poteſt ut corpus aſcendendo ab A deſcribat circuli quadrantem AL. Ad hunc effectum deberet corpus a Medio impellente accelerari, non a reſiſtente impediri.

Exempl. 2. Sit linea $ALCK$ Parabola, axem habens OL horizonti AK perpendicularem, & requiratur Medii denſitas quæ faciat ut projectile in ipſa moveatur.

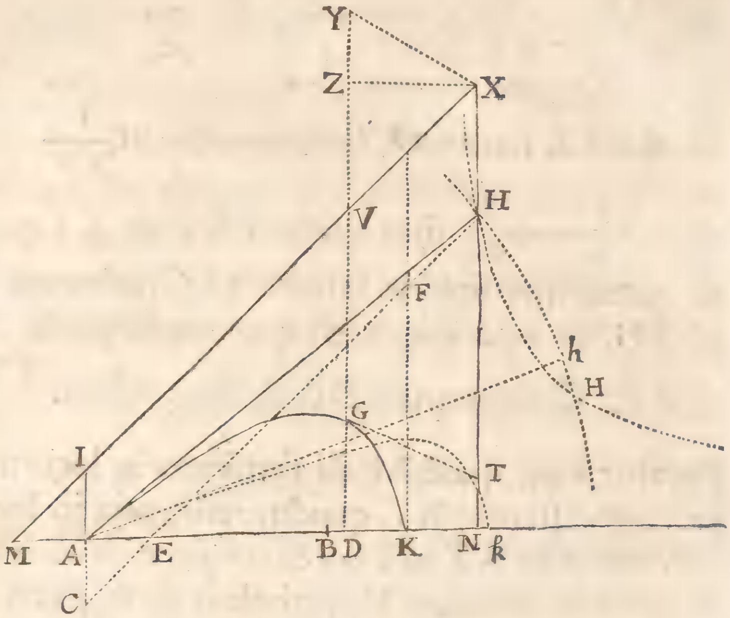
Ex natura Parabolæ, rectangulum ADK æquale eſt rectangulo ſub ordinata DG & recta aliqua data: hoc eſt, ſi dicantur recta illa b, AB a, AK c, BC e & BD o; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$ ſeu $ac-aa-2ao+co-oo$ æquale eſt rectangulo b in DG, adeoq; DG æquale $\frac{ac-aa}{b}+\frac{c-2a}{b}o-\frac{oo}{b}$. Jam ſcribendus eſſet hujus ſeriei ſecundus terminus $\frac{c-2a}{b}o$ pro Qo, & ejus coefficiens $\frac{c-2a}{b}$ pro Q; tertius item terminus $\frac{oo}{b}$ pro Roo, & ejus coefficiens $\frac{1}{b}$ pro R. Cum vero plures non ſint termini, debebit quarti termini So^3 coefficiens S evaneſcere, & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ cui Medii denſitas proportionalis eſt, nihil erit. Nulla igitur Medii denſitate movebitur Projectile in Parabola, uti olim demonſtravit *Galilæus*. Q. E. I.

Exempl. 3. Sit linea AGK Hyperbola, Aſymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem; & quæratur Medii denſitas quæ faciat ut Projectile moveatur in hac linea.

Sit MX Aſymptotos altera, ordinatim applicatæ DG pro-

ductæ

ductæ occurrens in *V*, & ex natura Hyperbolæ, rectangulum *XV* in *VG* dabitur. Datur autem ratio *DN* ad *VX*, & propterea datur etiam rectangulum *DN* in *VG*. Sit illud *bb*; & completo parallelogrammo *DNXZ*, dicatur *BN* *a*, *BD* *o*, *NX* *c*, & ratio data *VZ* ad *ZX*



vel *DN* ponatur eſſe $\frac{m}{n}$. Et erit *DN* æqualis $a-o$, *VG* æqualis $\frac{bb}{a-o}$, *VZ* æqualis $\frac{m}{n}\overline{a-o}$, & *GD* ſeu $NX - VZ - VG$ æqualis $c - \frac{m}{n}a + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{a-o}$. Reſolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ in ſeriem convergentem $\frac{bb}{a} + \frac{bb}{aa}o + \frac{bb}{a^3}oo + \frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & fiet *GD* æqualis $c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a} + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o - \frac{bb}{a^3}o^2 - \frac{bb}{a^4}o^3$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ uſurpandus eſt pro Qo, tertius cum ſigno mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro Ro^2, & quartus cum ſigno etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ pro So^3, eorumq; coefficientes $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ ſcribendæ ſunt,

in

in Regula ſuperiore, pro *Q*, *R* & *S*. Quo facto prodit medii denſitas

ut $\frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1-\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}}$ ſeu $\frac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}}$ id

eſt, ſi in *VZ* ſumatur *VY* æqualis *V*G, ut $\frac{1}{XY}$. Namq; aa & $\frac{mm}{nn}$

$aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$ ſunt ipſarum X*Z* & *ZY* quadrata. Reſiſtentia autem invenitur in ratione ad Gravitatem quam habet X*Y* ad *Y*G, & velocitas ea eſt quacum corpus in Parabola pergeret verticem *G* diametrum *DG* & latus rectum $\frac{YX\ quad.}{VG}$ habente. Ponatur itaq; quod Medii denſitates in locis ſingulis *G* ſint reciproce ut diſtantiæ X*Y*, quodq; reſiſtentia in loco aliquo *G* ſit ad gravitatem ut X*Y* ad *YG*; & corpus de loco *A* juſta cum velocitate emiſſum deſcribet Hyperbolam illam *AGK*. Q.E.I.

Exempl. 4. Ponatur indefinite, quod linea *AGK* Hyperbola ſit, centro X Aſymptotis *M*X, *N*X ea lege deſcripta, ut conſtructo rectangulo X*ZDN* cujus latus *ZD* ſecet Hyperbolam in *G* & Aſymptoton ejus in *V*, fuerit *VG* reciproce ut ipſius *Z*X vel *DN* dignitas aliqua *ND* ^{n}, cujus index eſt numerus *n*: & quæratur Medii denſitas, qua Projectile progrediatur in hac curva.

Pro *DN*, *BD*, *N*X ſcribantur *A*, *O*, *C* reſpective, ſitq; *VZ* ad *Z*X vel *DN* ut *d* ad *e*, & VG æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, & erit *DN* æqualis $A-O$, VG $=\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$, VZ $=\frac{d}{e}$ in $A-O$, & G*D* ſeu NX–VZ –VG æqualis $C-\frac{d}{e}A+\frac{d}{e}O-\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$. Reſolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$ in ſeriem infinitam $\frac{bb}{A^n}+\frac{nbbO}{A^{n+1}}+\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2+$ $+\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. ac fiet G*D* æqualis $C-\frac{d}{e}A-\frac{bb}{A^n}+$

+

$+\frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O - \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 - \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $\frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^n+1}O$ uſurpandus eſt pro Qo, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$ pro Ro^2, quartus $\frac{n^3+2nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ pro So^3. Et inde Medii denſitas $\frac{S}{R \times \sqrt{1+QQ}}$, in loco quovis G, fit $\frac{n+2}{3\sqrt{A^2+\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$, adeoq; ſi in VZ capiatur VY æqualis $n \times VG$, eſt reciproce ut XY. Sunt enim A^2 & $\frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}$ in $A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$ ipſarum XZ & ZY quadrata. Reſiſtentia autem in eodem loco G fit ad Gravitatem ut S in $\frac{XY}{A}$ ad $2RR$, id eſt XY ad $\frac{3nn+3n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipſa eſt quacum corpus projectum in Parabola pergeret, verticem G, diametrum GD & Latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ ſeu $\frac{2XY\ quad.}{nn+n \text{ in } VG}$ habente. *Q. E. I.*

Scholium.

Quoniam motus non fit in Parabola niſi in Medio non reſiſtente, in Hyperbolis vero hic deſcriptis fit per reſiſtentiam perpetuam; perſpicuum eſt quod linea, quam Projectile in Medio uniformiter reſiſtente deſcribit, propius accedit ad Hyperbolas haſce quam ad Parabolam. Eſt utiq; linea illa Hyperbolici generis, ſed quæ circa verticem magis diſtat ab Aſymptotis; in partibus a vertice remotioribus propius ad ipſas accedit quam pro ratione Hyperbolarum quas hic deſcripſi. Tanta vero non

eſt inter has & illam differentia, quin illius loco poſſint hæ in rebus practicis non incommode adhiberi. Et utiliores forſan futuræ ſunt hæ, quam Hyperbola magis accurata & ſimul magis compoſita. Ipſæ vero in uſum ſic deducentur.

Compleatur parallelogrammum *XYGT*, & ex natura harum Hyperbolarum facile colligitur quod recta *GT* tangit Hyperbolam in *G*, ideoq; denſitas Medii in *G* eſt reciproce ut tangens *GT*, & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq.}{GV}}$, reſiſtentia autem ad vim gravitatis ut *GT* ad $\frac{3nn+3n}{n+2}$ *GV*.

Proinde ſi corpus de loco *A* ſecundum rectam *AH* projectum deſcribat Hyperbolam *AGK*, & *AH* producta occurrat Aſymptoto *NX* in *H*, actaq; *AI* occurrat alteri Aſymptoto *MX* in *I*: erit Medii denſitas in *A* reciproce ut *AH*, & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq.}{AI}}$, ac reſiſtentia ibidem ad Gravitatem ut *AH* ad $\frac{3nn+3n}{n+2}$ in *AI*. Unde prodeunt ſequentes Regulæ.

Reg. 1. Si ſervetur Medii denſitas in *A* & mutetur angulus *NAH*, manebunt longitudines *AH*, *AI*, *HX*. Ideoq; ſi longitudines illæ in aliquo caſu inveniantur, Hyperbola deinceps ex dato quovis angulo *NAH* expedite determinari poteſt.

Reg. 2. Si ſervetur tum angulus *NAH* tum Medii denſitas in *A*, & mutetur velocitas quacum corpus projicitur; ſervabitur longitudo *AH*, & mutabitur *AI* in duplicata ratione velocitatis reciproce.

Reg. 3. Si tam angulus *NAH* quam corporis velocitas in *A*, gravitaſq; acceleratrix ſervetur, & proportio reſiſtentiæ in *A* ad gravitatem motricem augeatur in ratione quacunque: augebitur proportio *AH* ad *AI* in eadem ratione, manente Parabolæ latere recto, eiq; proportionali longitudine $\frac{AHq.}{AI}$; & propterea minuetur *AH* in eadem ratione, & *AI* minuetur in ratione illa duplica-

plicata. Augetur vero proportio reſiſtentiæ ad pondus, ubi vel gravitas ſpecifica ſub æquali magnitudine fit minor, vel Medii denſitas major, vel reſiſtentia, ex magnitudine diminuta, diminuitur in minore ratione quam pondus.

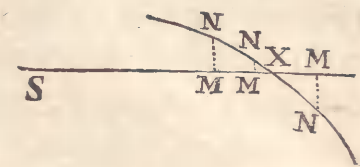
Reg. 4. Quoniam denſitas Medii prope verticem Hyperbolæ minor eſt quam in loco *A*, ut ſervetur denſitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium *GT* ad Tangentem *AH* inveniri, & denſitas in *A*, per Regulam tertiam, diminui in ratione paulo minore quam ſemiſummæ Tangentium ad Tangentem *AH*.

Reg. 5. Si dantur longitudines *AH*, *AI*, & deſcribenda ſit figura *AGK*: produc *HN* ad *X*, ut ſit *HX* æqualis facto ſub $n+1$ & *AI*; centroq; *X* & Aſymptotis *MX*, *NX* per punctum *A* deſcribatur Hyperbola, ea lege ut ſit *AI* ad quamvis *VG* ut XV^n ad XI^n.

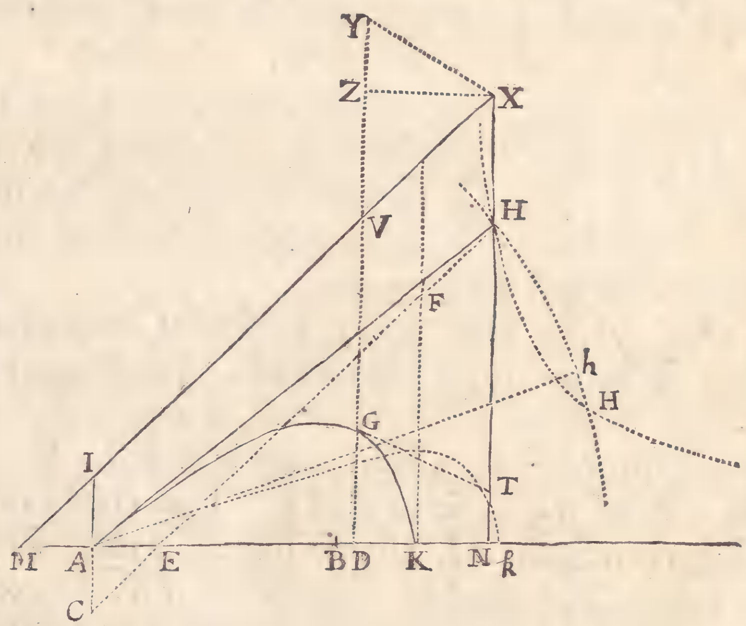
Reg. 6. Quo major eſt numerus *n*, eo magis accuratæ ſunt hæ Hyperbolæ in aſcenſu corporis ab *A*, & minus accuratæ in ejus deſcenſu ad *G*; & contra. Hyperbola Conica mediocrem rationem tenet, eſtq; cæteris ſimplicior. Igitur ſi Hyperbola ſit hujus generis, & punctum *K*, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis *AN* per punctum *A* tranſeuntem, quæratur: occurrat producta *AN* Aſymptotis *MX*, *NX* in *M* & *N*, & ſumatur *NK* ipſi *AM* æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc Hyperbolam ex Phænominis. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia eadem velocitate, in angulis diverſis *HAK*, *hAK*, incidentq; in planum Horizontis in *K* & *k*; & notetur proportio *AK* ad *Ak*. Sit ea *d* ad *e*. Tum erecto cujuſvis longitudinis perpendiculo *AI*, aſſume utcunq; longitudinem *AH* vel *Ah*, & inde collige graphice longitudines *AK*, *Ak*, per Reg. 6. Si ratio *AK* ad *Ak* ſit eadem cum ratione *d* ad *e*, longitudo *AH* recte aſſumpta fuit. Sin minus cape in recta infinita *SM* longitudinem *SM* æqualem aſſumptæ *AH*, & erige perpendiculum *MN* æquale

quale rationum differentiæ $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex aſſumptis pluribus longitudinibus *AH* invenienda ſunt plura puncta *N*: & tum demum ſi per omnia agatur Curva linea regularis *NNXN*, hæc abſcindet *SX* quæſitæ longitudini *AH* æqualem. Ad uſus Mechanicos ſufficit longitudines *AH*, *AI* eaſdem in angulis omnibus *HAK* retinere. Sin figura ad inveniendam reſiſtentiam Medij accuratius determinanda ſit, corrigendæ ſunt ſemper hæ longitudines per Regulam quartam.

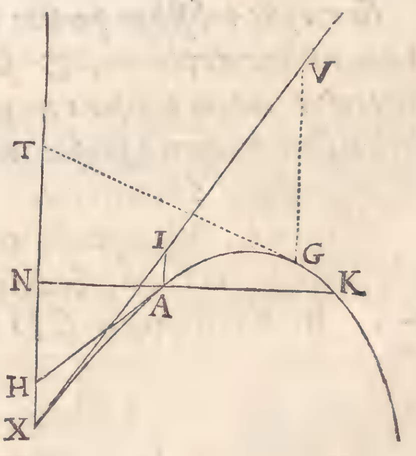


Reg. 8. Inventis longitudinibus *AH*, *HX*; ſi jam deſideretur poſitio rectæ *AH*, ſecundum quam Projectile data illa cum velocitate emiſſum incidit in punctum quodvis *K*: ad puncta *A* & *K* erigantur rectæ *AC*, *KF* horizonti perpendiculares, quarum *AC* deorſum tandat, & æquetur ipſi *AI* ſeu ½ *HX*. Aſymptotis *AK*, *KF* deſcribatur Hyperbola, cujus Conjugata tranſeat per punctum *C*, centroq; *A* & intervallo *AH* deſcribatur Circulus ſecans Hyperbolam illam in pun-



puncto *H*; & projectile ſecundum rectam *AH* emiſſum incidet in punctum *K*. *Q.E.I.* Nam punctum *H*, ob datam longitudinem *AH*, locatur alicubi in circulo deſcripto. Agatur *CH* occurrens ipſis *AK* & *KF*, illi in *C*, huic in *F*, & ob parallelas *CH*, *MX* & æquales *AC*, *AI*, erit *AE* æqualis *AM*, & propterea etiam æqualis *KN*. Sed *CE* eſt ad *AE* ut F H ad *KN*, & propterea *CE* & *FH* æquantur. Incidit ergo punctum *H* in Hyperbolam Aſymptotis *AK*, *KF* deſcriptam, cujus conjugata tranſit per punctum *C*, atq adeo reperitur in communi interſectione Hyperbolæ hujus & circuli deſcripti. *Q. E. D.* Notandum eſt autem quod hæc operatio perinde ſe habet, ſive recta *AKN* horizonti parallela ſit, ſive ad horizontem in angulo quovis inclinata: quodq; ex duabus interſectionibus *H*, *H* duo prodeunt anguli *NAH*, *NAH*, quorum minor eligendus eſt; & quod in Praxi mechanica ſufficit circulum ſemel deſcribere, deinde regulam interminatam *CH* ita applicare ad punctum *C*, ut ejus pars *FH*, circulo & rectæ *FK* interjecta, æqualis ſit ejus parti *CE* inter punctum *C* & rectam *HK* ſitæ.

Quæ de Hyperbolis dicta ſunt facile applicantur ad Parabolas. Nam ſi *XAGK* Parabolam deſignet quam recta *XV* tangat in vertice X, ſintq; ordinatim applicatæ *IA*, *VG* ut quælibet abſciſſarum *XI*, XV dignitates XI^n, XV^n; agantur X*T*, T*G*, *HA*, quarum X*T* parallela ſit V*G*, & *TG*, *HA* parabolam tangant in *G* & *A*: & corpus de loco quovis *A*, ſecundum rectam *AH* productam, juſta cum velocitate projectum, deſcribet hanc Parabolam, ſi modo denſitas Medij, in locis ſingulis *G*, ſit reciproce ut tangens *GT*. Velocitas autem in *G* ea erit quacum Projectile pergeret,



 in

in ſpatio non reſiſtente, in Parabola Conica, verticem *G*, diametrum V *G* deorſum productam, & latus rectum $\frac{2\,TGq.}{nn-n \times VG}$ habente. Et reſiſtentia in G erit ad vim Gravitatis ut *T* G ad $\frac{3nn-3n}{n-2}$V G. Vnde ſi *NAK* lineam horizontalem deſignet, & manente tum denſitate Medij in *A*, tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcunq; angulus *NAH*, manebunt longitudines *A*H, *AI*, HX, & inde datur Parabolæ vertex X, & poſitio rectæ X *I*, & ſumendo *V*G ad *IA* ut XV^n ad XI^n, dantur omnia Parabolæ puncta G, per quæ Projectile tranſibit.

S E C T. III.

De motu corporum quæ reſiſtuntur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata.

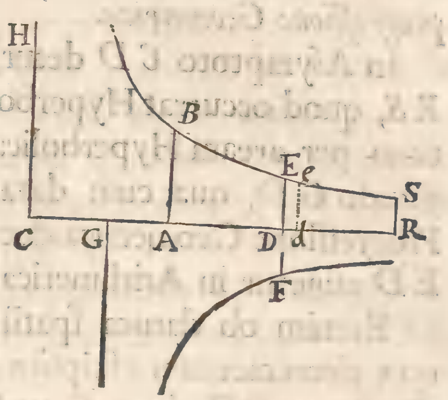
Prop. XI. Theor. VIII.

Si corpus reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicata, & ſola vi inſita in Medio ſimilari movetur, ſumantur autem tempora in progreſſione Arithmetica: quantitates velocitatibus reciproce proportionales, quadam quantitate auctæ, erunt in progreſſione Geometrica.

Centro *C*, Aſymptotis rectangulis *C A D d* & *C H* deſcribatur Hyperbola *B E e S*, & Aſymptoto *C H* parallelæ ſint *AB*, *DE*, *de*. In Aſymptoto *C D* dentur puncta *A*, G: Et ſi tempus exponatur per aream Hyperbolicam *A B E D* uniformiter creſcentem; dico quod velocitas exponi poteſt per longitudinem *D F*, cujus reciproca G *D* una cum data *C* G componat longitudinem *C D* in progreſſione Geometrica creſcentem.

Sit

Sit enim areola $DEed$ datum temporis incrementum quam minimum, & erit Dd reciproce ut DE, adeoque directe ut CD. Ipſius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (per hujus Lem. II.) eſt $\frac{Dd}{GDq.}$, erit ut $\frac{CD}{GDq.}$ ſeu $\frac{CG+GD}{GDq.}$, id eſt, ut $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GDq.}$ Igitur tempore $ABED$ per additionem datarum particularum $EDde$ uniformiter creſcente, decreſcit $\frac{1}{GD}$ in eadem ratione cum velocitate. Nam decrementum velocitatis eſt ut reſiſtentia, hoc eſt (per Hypotheſin) ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; & ipſius $\frac{1}{GD}$ decrementum eſt ut ſumma quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GDq.}$, quarum prior eſt ipſa $\frac{1}{GD}$, & poſterior $\frac{CG}{GDq.}$ eſt ut $\frac{1}{GDq}$. Proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, eſt ut velocitas. Et ſi quantitas GD ipſi $\frac{1}{GD}$ reciproce proportionalis quantitate data CG augeatur, ſumma CD, tempore $ABED$ uniformiter creſcente, creſcet in progreſſione Geometrica. *Q. E. D.*



Corol. 1. Igitur ſi datis punctis A, G, exponatur tempus per aream Hyperbolicam $ABED$, exponi poteſt velocitas per ipſius GD reciprocam $\frac{1}{GD}$.

Corol. 2. Sumendo autem GA ad GD ut velocitatis reciproca ſub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujuſ-

vis *ABED*, invenietur punctum *G*. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri poteſt.

Prop. XII. Theor. IX.

Iiſdem poſitis, dico quod ſi ſpatia deſcripta ſumantur in progreſſione Arithmetica, velocitates data quadam quantitate auctæ erunt in progreſſione Geometrica.

In Aſymptoto *CD* detur punctum *R*, & erecto perpendiculo *RS*, quod occurrat Hyperbolæ in *S*, exponatur deſcriptum ſpatium per aream Hyperbolicam *RSED*; & velocitas erit ut longitudo *GD*, quæ cum data *CG* componit longitudinem *CD*, in Progreſſione Geometrica decreſcentem, interea dum ſpatium *RSED* augetur in Arithmetica.

Etenim ob datum ſpatii incrementum *EDde*, lineola *Dd*, quæ decrementum eſt ipſius *GD*, erit reciproce ut *ED*, adeoq; directe ut *CD*, hoc eſt ut ſumma ejuſdem *GD* & longitudinis datæ *CG*. Sed velocitatis decrementum, tempore ſibi reciproce proportionali, quo data ſpatii particula *DdeE* deſcribitur, eſt ut reſiſtentia & tempus conjunctim, id eſt directe ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverſe ut velocitas; adeoque directe ut ſumma duarum quantitatum, quarum una datur, altera eſt ut velocitas. Igitur decrementum tam velocitatis quam lineæ *GD*, eſt ut quantitas data & quantitas decreſcens conjunctim; & propter analoga decrementa, analogæ ſemper erunt quantitates decreſcentes: nimirum velocitas & linea *GD*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur ſi velocitas exponatur per longitudinem *GD*, ſpatium deſcriptum erit ut area Hyperbolica *DESR*.

Corol. 2. Et ſi utcunque aſſumatur punctum *R*, invenietur punctum G, capiendo G*D* ad G*R* ut eſt velocitas ſub initio ad velocitatem poſt ſpatium quodvis *ABED* deſcriptum. Invento autem puncto G, datur ſpatium ex data velocitate, & contra.

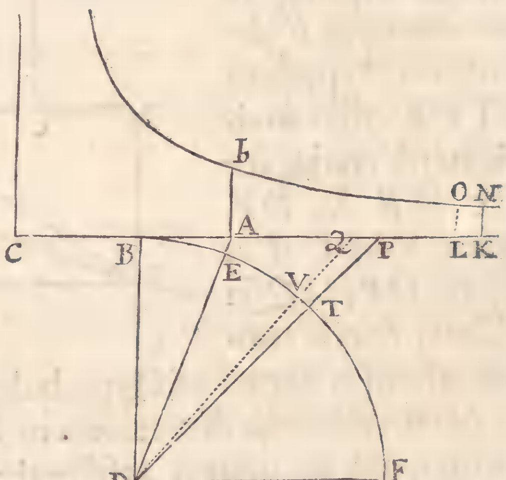
Corol. 3.

Corol. 3. Unde cum, per Prop. XI. detur velocitas ex dato tempore, & per hanc Propoſitionem detur ſpatium ex data velocitate; dabitur ſpatium ex dato tempore: & contra.

Prop. XIII. Theor. X.

Poſito quod corpus ab uniformi gravitate deorſum attractum recta aſcendit vel deſcendit, & reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata: dico quod ſi Circuli & Hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates ſint ut ſegmenta quædam parallelarum a dato puncto ducta, Tempora erunt ut arearum Sectores, rectis a centro ad ſegmentorum terminos ductis abſciſſi: & contra.

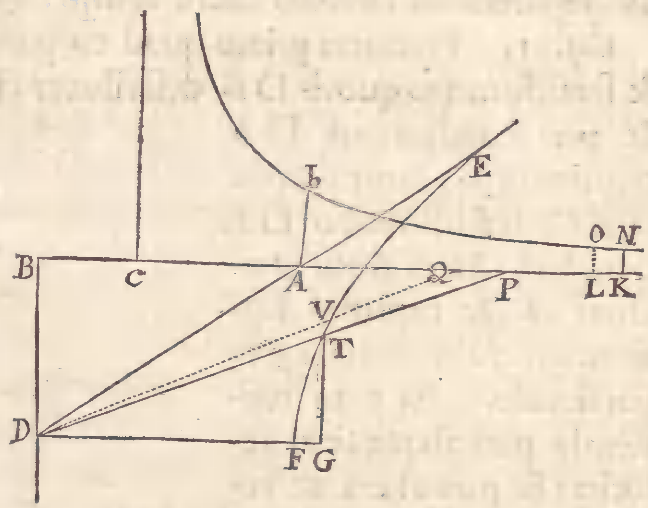
Caſ. 1. Ponamus primo quod corpus aſcendit, centroque D & ſemidiametro quovis DB deſcribatur circuli quadrans $BETF$, & per ſemidiametri DB terminum B agatur infinita BAP, ſemidiametro DF parallela. In ea detur punctum A, & capiatur ſegmentum AP velocitati proportionale. Et cum reſiſtentiæ pars aliqua ſit ut velocitas & pars altera ut velocitatis quadratum, ſit reſiſtentia tota in P ut AP *quad* $+ 2\,PAB$. Junguntur DA, DP circulum ſecantes in E ac T, & exponatur gravitas per DA quadratum, ita ut ſit gravitas ad reſiſtentiam in P ut $DAq.$ ad $APq. + 2\,PAB$: & tempus aſcenſus omnis futuri erit ut circuli ſector $EDTE$.



Agatur enim DVQ, abſcindens & velocitatis AP momentum PQ, & Sectoris DET momentum DTV dato temporis momento

to reſpondens: & velocitatis decrementum illud *PQ* erit ut ſumma virium gravitatis *DBq.* & reſiſtentiæ *APq.* + 2 *BAP*, id eſt (per *Prop.* 12. *Lib.* II. Elem.) ut *DP quad.* Proinde area *DPQ*, ipſi *PQ* proportionalis, eſt ut *DP quad*; & area *DTV*, (quæ eſt ad aream *DPQ* ut *DTq.* ad *DPq.*) eſt ut datum *DTq.* Decreſcit igitur area *EDT* uniformiter ad modum temporis futuri, per ſubductionem datarum particularum *DTV*, & propterea tempori aſcenſus futuri proportionalis eſt. *Q. E. D.*

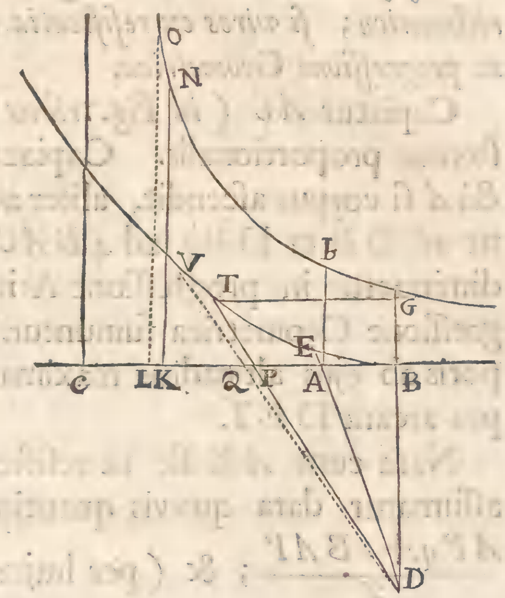
Caſ. 2. Si velocitas in aſcenſu corporis exponatur per longitudinem *AP* ut prius, & reſiſtentia ponatur eſſe ut *APq.* + 2 *BAP*, & ſi vis gravitatis minor ſit quam quæ per *DAq.* exponi poſſit; capiatur *BD* ejus longitudinis, ut ſit *ABq.* − *BDq.* gravitati proportionale, ſitque *DF* ipſi *DB* perpendicularis & æqualis, & per verticem *F* deſcribatur Hyperbola *FTVE* cujus ſemidiametri conjugatæ ſint *DB* & *DF*, quæq; ſecet *DA* in *E*, & *DP*, *DQ* in *T* & *V*; & erit tempus aſcenſus futuri ut Hyperbolæ ſector *TDE*.



Nam velocitatis decrementum *PQ*, in data temporis particula factum, eſt ut ſumma reſiſtentiæ *APq.* + 2 *ABP* & gravitatis *ABq.* − *BDq.* id eſt ut *BPq.* − *BDq.* Eſt autem area *DTV* ad aream *DPQ* ut *DTq.* ad *DPq.* adeoque, ſi ad *DF* demittatur perpendiculum *GT*, ut *GTq.* ſeu *GDq* − *DFq.* ad *BDq.* utque *GDq.* ad *PBq.* & diviſim ut *DFq.* ad *BPq.* − *DBq.* Quare cum area *DPQ* ſit ut *PQ*, id eſt ut *BPq.* − *BDq.* erit area *DTV* ut datum *DFq.* Decreſcit igitur area *EDT* uniformiter

miter ſingulis temporis particulis æqualibus, per ſubductionem particularum totidem datarum DTV, & propterea tempori proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Sit AP velocitas in deſcenſu corporis, & $APq. + 2\,ABP$ reſiſtentia, & $DBq. - ABq.$ vis gravitatis, exiſtente angulo DAB recto. Et ſi centro D, vertice principali B, deſcribatur Hyperbola rectangula $BETV$ ſecans productas DA, DP & DQ in E, T & V; erit Hyperbolæ hujus ſector DET ut tempus deſcenſus.



Nam velocitatis incrementum PQ, eiq; proportionalis area DTQ, eſt ut exceſſus gravitatis ſupra reſiſtentiam, id eſt ut $DBq. - ABq. - 2\,ABP - APq.$ ſeu $DBq. - BPq.$ Et area DTV eſt ad aream DPQ ut $DTq.$ ad $DPq.$ adeoq; ut $GTq.$ ſeu $GDq. - BDq.$ ad $BPq.$ utque $GDq.$ ad $BDq.$ & diviſim ut $BDq.$ ad $BDq. - BPq.$ Quare cum area DPQ ſit ut $BDq. - BPq.$ erit area DTV ut datum $BDq.$ Creſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum DTV, & propterea tempori deſcenſus proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Corol. Igitur velocitas AP eſt ad velocitatem quam corpus tempore EDT, in ſpatio non reſiſtente, aſcendendo amittere vel deſcendendo acquirere poſſet, ut area trianguli DAP ad aream ſectoris centro D, radio DA, angulo ADT deſcripti; ideoque ex dato tempore datur. Nam velocitas in Medio non reſiſtente, tempori atque adeo Sectori huic proportionalis eſt; in Medio reſiſtente eſt ut triangulum; & in Medio utroq; ubi quam minima eſt, accedit ad rationem æqualitatis, pro more Sectoris & Trianguli.

Prop. XIV.

Prop. XIV. Prob. IV.

Iiſdem poſitis, dico quod ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum, eſt ut ſumma vel differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujuſdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progreſſione Arithmetica; ſi vires ex reſiſtentia & gravitate compoſitæ ſumantur in progreſſione Geometrica.

Capiatur AC (*in Fig. tribus ultimis*,) gravitati, & AK reſiſtentiæ proportionalis. Capiantur autem ad eaſdem partes puncti A ſi corpus aſcendit, aliter ad contrarias. Erigatur Ab quæ ſit ad DB ut DBq. ad $4BAC$: & area $AbNK$ augebitur vel diminuetur in progreſſione Arithmetica, dum vires CK in progreſſione Geometrica ſumuntur. Dico igitur quod diſtantia corporis ab ejus altitudine maxima ſit ut exceſſus areæ $AbNK$ ſupra aream DET.

Nam cum AK ſit ut reſiſtentia, id eſt ut $APq. + 2BAP$; aſſumatur data quævis quantitas Z, & ponatur AK æqualis $\frac{APq. + 2BAP}{Z}$; & (per hujus Lem. II.) erit ipſius AK momentum KL æquale $\frac{2APQ + 2BA \times PB}{Z}$ ſeu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ æquale $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ ſeu $\frac{BPQ \times BD\,cub.}{2Z \times CK \times AB}$.

Caſ. 1. Jam ſi corpus aſcendit, ſitque gravitas ut $ABq. + BDq.$ exiſtente BET circulo, (*in Fig. Caſ.* 1. *Prop.* XIII.) linea AC, quæ gravitati proportionalis eſt, erit $\frac{ABq. + BDq}{Z}$. & DPq. ſeu $APq. + 2BAP + ABq. + BDq$. erit $AK \times Z + AC \times Z$ ſeu $CK \times Z$: ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DTq. vel DBq. ad $CK \times Z$.

Caſ. 2.

Caſ. 2. Sin corpus aſcendit, & gravitas ſit ut $ABq - BDq.$ linea AC (*Fig. Caſ.* 2. *Prop.* XIII.) erit $\frac{ABq. - BDq.}{Z}$ & $DTq.$ erit ad $DPq.$ ut $DFq.$ ſeu $DBq.$ ad $BPq - BDq.$ ſeu $APq. + 2BAP + ABq - BDq.$ id eſt ad $AK \times Z + AC \times Z$ ſeu $CK \times Z.$ Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut $DBq.$ ad $CK \times Z.$

Caſ. 3. Et eodem argumento, ſi corpus deſcendit, & propterea gravitas ſit ut $BDq. - ABq.$ & linea AC (*Fig. Caſ.* 3. *Prop. præced.*) æquetur $\frac{BDq. - ABq.}{Z}$ erit area DTV ad aream DPQ ut $DBq.$ ad $CK \times Z$: ut ſupra.

Cum igitur areæ illæ ſemper ſint in hac ratione; ſi pro area DTV, qua momentum temporis ſibimet ipſi ſemper æquale exponitur, ſcribatur determinatum quodvis rectangulum, puta $BD \times m$, erit area DPQ, id eſt $\frac{1}{2} BD \times PQ$; ad $BD \times m$ ut CK in Z ad $BDq.$ Atq; inde fit PQ in BD *cub.* æquale $2BD \times m \times CK \times Z$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ ſuperius inventum, fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Auferatur areæ DET momentum DTV ſeu $BD \times m$, & reſtabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Eſt igitur differentia momentorum, id eſt momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea (ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$) ut velocitas AP, id eſt ut momentum ſpatii quod corpus aſcendendo vel deſcendendo deſcribit. Ideoque differentia arearum & ſpatium illud proportionalibus momentis creſcentia vel decreſcentia, & ſimul incipientia vel ſimul evaneſcentia ſunt proportionalia. *Q. E. D.*

Corol. Igitur ſi longitudo aliqua V ſumatur in ea ratione ad arcum ET, quam habet linea DA ad lineam DE; ſpatium quod corpus aſcenſu vel deſcenſu toto in Medio reſiſtente deſcribit, erit ad ſpatium quod in Medio non reſiſtente eodem tem-

pore deſcribere poſſet, ut arearum illarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{4AB}$, ideoque ex dato tempore datur. Nam ſpatium in Medio non reſiſtente eſt in duplicata ratione temporis, ſive ut V^2, & ob datas BD & AB, ut $\frac{BD \times V^2}{4AB}$. Tempus autem eſt ut DET ſeu $\frac{1}{2} BD \times ET$, & harum arearum momenta ſunt ut $\frac{BD \times V}{2AB}$ ductum in momentum ipſius V & $\frac{1}{2} BD$ ductum in momentum ipſius ET, id eſt, ut $\frac{BD \times V}{2AB}$ in $\frac{DAq. \times 2m}{DEq.}$ & $\frac{1}{2} BD \times 2m$, ſive ut $\frac{BD \times V \times DAq. \times m}{AB \times DEq.}$ & $BD \times m$. Et propterea momentum areæ V^2 eſt ad momentum differentiæ arearum DET & $AKNb$, ut $\frac{BD \times V \times DA \times m}{AB \times DE}$ ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$ ſive ut $\frac{V \times DA}{DE}$ ad AP; adeoque, ubi V & AP quam minimæ ſunt, in ratione æqualitatis. Æqualis igitur eſt area quam minima $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ differentiæ quam minimæ arearum DET & $AKNb$. Unde cum ſpatia in Medio utroque, in principio deſcenſus vel fine aſcenſus ſimul deſcripta accedunt ad æqualitatem, adeoque tunc ſunt ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arearum DET & $AKNb$ differentia; ob eorum analoga incrementa neceſſe eſt ut in æqualibus quibuſcunque temporibus ſint ad invicem ut area illa $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arearum DET & $AKNb$ differentia. Q. E. D.

SECT. IV.

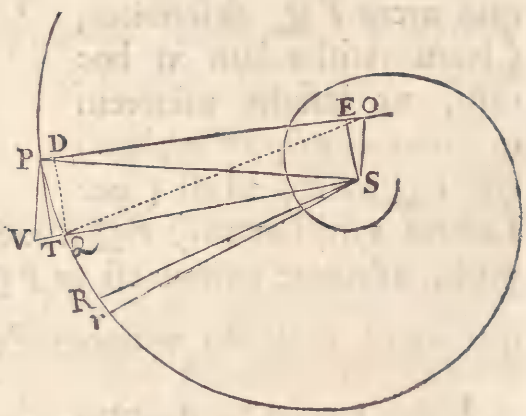
SECT. IV.

De Corporum circulari Motu in Mediis reſiſtentibus.

LEM. III.

Sit P Q R r *Spiralis quæ ſecet radios omnes* S P, S Q, S R, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* P T *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *ſecetque radium* S Q *in* T; *& ad Spiralem erectis perpendiculis* P O, Q O *concurrentibus in* O, *jungatur* S O. *Dico quod ſi puncta P & Q accedant ad invicem & coeant, angulus* P S O *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* T Q x P S *ad* P Q *quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis *O P Q*, *O Q R* ſubducantur anguli æquales *S P Q*, *S Q R*, & manebunt anguli æquales *O P S*, *O Q S*. Ergo circulus qui tranſit per puncta *O*, *S*, *P* tranſibit etiam per punctum *Q*. Coeant puncta *P* & *Q*, & hic circulus in loco coitus *P Q* tanget Spiralem, adeoque perpendiculariter ſecabit rectam *O P*. Fiet igitur *O P* diameter circuli hujus, & angulus *O S P* in ſemicirculo rectus. Q. E. *D.*



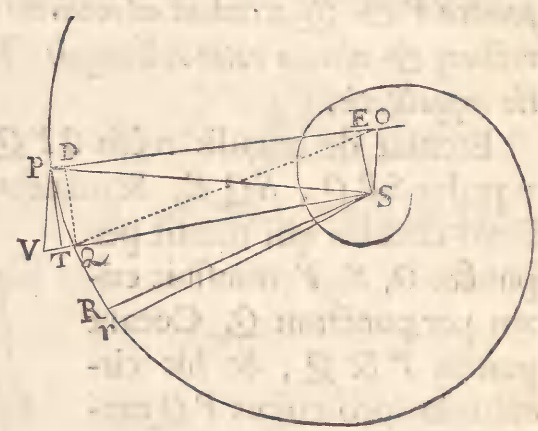
Ad *O P* demittantur perpendicula *Q D*, *S E*, & linearum rationes ultimæ erunt hujuſmodi: *T Q* ad *P D* ut *T S* vel *P S* ad *P E*, ſeu *P O* ad *P S*. Item *P D* ad *P Q* ut *P Q* ad *P O*. Et ex æquo perturbate *T Q* ad *P Q* ut *P Q* ad *P S*. Unde fit *P Q q*. æqualis *P Q* x *P S*. Q. E. *D.*

 Prop. XV.

Prop. XV. Theor. XI.

Si Medii denſitas in locis ſingulis ſit reciproce ut diſtantia locorum a centro immobili, ſitque vis centripeta in duplicata ratione denſitatis: dico quod corpus gyrari poteſt in Spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato.

Ponantur quæ in ſuperiore Lemmate, & producatur *SQ* ad *V*, ut ſit *SV* æqualis *SP*. Temporibus æqualibus deſcribat corpus arcus quam minimos *PQ* & *QR*, ſintque areæ *PSQ*, *QSr* æquales. Et quoniam vis centripeta, qua corpus urgetur in *P* eſt reciproce ut *SPq*. & (per Lem. X. Lib. I.) lineola *TQ*, quæ vi illa generatur, eſt in ratione compoſita ex ratione hujus vis & ratione duplicata temporis quo arcus *PQ* deſcribitur, (Nam reſiſtentiam in hoc caſu, ut infinite minorem quam vis centripeta negligo) erit *TQ* x *SPq*. id eſt (per Lemma noviſſimum) *PQq*. x *SP*, in ratione duplicata temporis, adeoque tempus eſt ut $PQ \times \sqrt{SP}$, & corporis velocitas qua arcus *PQ* illo tempore deſcribitur ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ ſeu $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, hoc eſt in dimidiata ratione ipſius *SP* reciproce. Et ſimili argumento velocitas, qua arcus *QR* deſcribitur, eſt in dimidiata ratione ipſius *SQ* reciproce. Sunt autem arcus illi *PQ* & *QR* ut velocitates deſcriptrices ad invicem, id eſt in dimidiata ratione *SQ* ad *SP*, ſive ut *SQ* ad $\sqrt{SP} \times \sqrt{SQ}$; & ob æquales angulos *SPQ*, *SQr* & æquales areas *PSQ*, *QSr*, eſt arcus



PQ ad arcum Qr ut SQ ad SP. Sumantur proportionalium conſequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad $SP - SP^{\frac{1}{2}} \times SQ^{\frac{1}{2}}$, ſeu $\frac{1}{2}VQ$; nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima $SP - SP^{\frac{1}{2}} \times SQ^{\frac{1}{2}}$ ad $\frac{1}{2}VQ$ fit æqualitatis. In Medio non reſiſtente areæ æquales PSQ, QSr (per Theor. I. Lib. I.) temporibus æqualibus deſcribi deberent. Ex reſiſtentia oritur arearum differentia RSr, & propterea reſiſtentia eſt ut lineolæ Qr decrementum Rr collatum cum quadrato temporis quo generatur. Nam lineola Rr (per Lem. X. Lib. I.) eſt in duplicata ratione temporis. Eſt igitur reſiſtentia ut $\frac{Rr}{PQq. \times SP}$. Erat autem PQ ad Rr ut SQ ad $\frac{1}{2}VQ$, & inde $\frac{Rr}{PQq. \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ ſive ut $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SPq.}$ Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt; & ob ſimilia triangula PVQ, PSO, fit PQ ad $\frac{1}{2}VQ$ ut OP ad $\frac{1}{2}OS$. Eſt igitur $\frac{OS}{OP \times SPq.}$ ut reſiſtentia, id eſt in ratione denſitatis Medii in P & ratione duplicata velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit Medii denſitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur Spiralis, & ob datam rationem OS ad OP, denſitas Medii in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In Medio igitur cujus denſitas eſt reciproce ut diſtantia a centro SP, corpus gyrari poteſt in hac Spirali. Q. E. *D*.

Corol. 1. Velocitas in loco quovis P ea ſemper eſt quacum corpus in Medio non reſiſtente gyrari poteſt in circulo, ad eandem a centro diſtantiam SP.

Corol 2. Medii denſitas, ſi datur diſtantia SP, eſt ut $\frac{OS}{OP}$, ſin

ſin diſtantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et inde Spiralis ad quamlibet Medii denſitatem aptari poteſt.

Corol. 3. Vis reſiſtentiæ in loco quovis *P*, eſt ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}OS$ ad *OP*. Nam vires illæ ſunt ut lineæ *Rr* & *TQ* ſeu ut $\frac{\frac{1}{2}VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{PQq.}{SP}$ quas ſimul generant, hoc eſt ut $\frac{1}{2}VQ$ & *PQ*, ſeu $\frac{1}{2}OS$ & *OP*. Data igitur Spirali datur proportio reſiſtentiæ ad vim centripetam, & viceverſa ex data illa proportione datur Spiralis.

Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hac ſpirali, niſi ubi vis reſiſtentiæ minor eſt quam dimidium vis centripetæ. Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ & Spiralis conveniet cum linea recta *P S*, inque hac recta corpus deſcendet ad centrum, dimidia ſemper cum velocitate qua probavimus in ſuperioribus in caſu Parabolæ (Theor. X. Lib. I.) deſcenſum in Medio non reſiſtente fieri. Unde tempora deſcenſus hic erunt dupla majora temporibus illis atque adeo dantur.

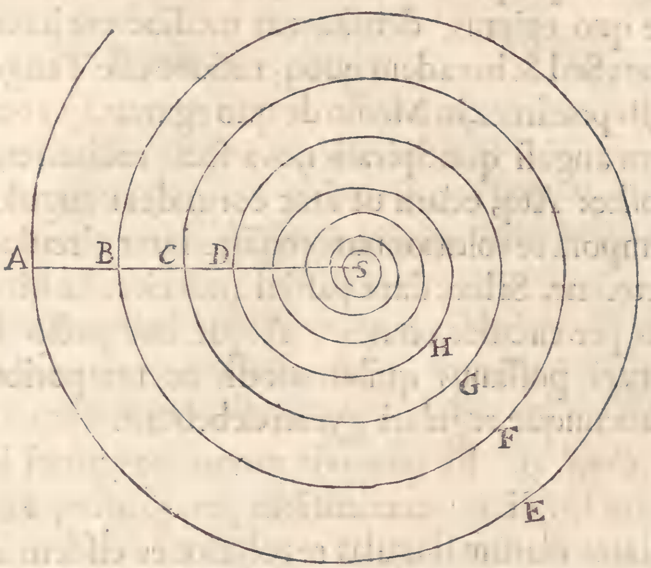
Corol. 5. Et quoniam in æqualibus a centro diſtantiis velocitas eadem eſt in Spirali *PQR* atque in recta *SP*, & longitudo Spiralis ad longitudinem rectæ *P S* eſt in data ratione, nempe in ratione *OP* ad *OS*; tempus deſcenſus in Spirali erit ad tempus deſcenſus in recta S P in eadem illa data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro *S* intervallis duobus datis deſcribantur duo circuli; numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias complere poteſt, eſt ut $\frac{PS}{OS}$, ſive ut Tangens anguli quem Spiralis continet cum radio *PS*; tempus vero revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id eſt reciproce ut Medii denſitas.

Corol. 7. Si corpus, in Medio cujus denſitas eſt reciproce ut diſtantia locorum a centro, revolutionem in Curva quacunque *AEB*

circa

circa centrum illud fecerit, & Radium primum *A S* in eodem angulo ſecuerit in *B* quo prius in *A*, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem ſuam primam in *A* reciproce in dimidiata ratione diſtantiarum a centro (id eſt ut *B S* ad mediam proportionalem inter *A S* & *C S*:) corpus illud perget innumeras conſimiles revolutiones B*F*C, *C G D*, &c. facere, & interſectionibus diſtinguet Radium *A* S in partes *A S*, *B S*, *C S*, *D S* &c. continue proportionales.



Revolutionum vero tempora erunt ut Perimetri orbitarum *A E B*, *B F C*, *C G D* &c. directe, & velocitates in principiis *A*, *B*, *C*, inverſe; id eſt ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Atq; tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ ut ſumma omnium continue proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; id eſt ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, & quam proxime ut $\frac{2}{3}AS$ ad *A B*. Unde tempus illud totum expedite invenitur.

Corol. 8. Ex his etiam præterpropter colligere licet motus corporum in Mediis, quorum denſitas aut uniformis eſt, aut aliam quamcunque legem aſſignatam obſervat. Centro *S* intervallis continue proportionalibus *S A*, *S B*, *S C* &c. deſcribe circulos

culos quotcunque, & ſtatue numerum revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in Medio de quo egimus, eſſe ad numerum revolutionum inter eoſdem in Medio propoſito, ut Medii propoſiti denſitas mediocris inter hos circulos ad Medii, de quo egimus, denſitatem mediocrem inter eoſdem quam proxime; Sed & in eadem quoq; ratione eſſe Tangentem anguli quo Spiralis præfinita, in Medio de quo egimus, ſecat radium *AS*, ad tangentem anguli quo Spiralis nova ſecat radium eundem in Medio propoſito: Atq; etiam ut ſunt eorundem angulorum ſecantes ita eſſe tempora revolutionum omnium inter circulos eoſdem duos quam proxime. Si hæc fiant paſſim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari poſſimus quibus modis ac temporibus corpora in Medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in Spiralibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo Spiralium illarum ſingulas revolutiones eiſdem ab invicem intervallis diſtare, iiſdemque gradibus ad centrum accedere cum Spirali ſuperius deſcripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujuſmodi Spiralibus peragantur.

Prop. XVI. Theor. XII.

Si Medii denſitas in locis ſingulis ſit reciproce ut dignitas aliqua diſtantiæ locorum a centro, ſitque vis centripeta reciproce ut diſtantia in dignitatem illam ducta: dico quod corpus gyrari poteſt in Spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato.

Demonſtratur eadem methodo cum Propoſitione ſuperiore. Nam ſi vis centripeta in *P* ſit reciproce ut diſtantiæ *SP* dignitas quælibet SP^{n+1} cujus index eſt $n+1$; colligetur ut ſupra, quod tempus quo corpus deſcribit arcum quemvis PQ erit ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$

&

& reſiſtentia in P ut $\frac{Rr}{PQq. \times SP^n}$ ſive ut $\frac{\frac{1}{2}nVQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$, adeque ut $\frac{\frac{1}{2}n OS}{OP \times SP^{n+1}}$. Et propterea denſitas in P eſt reciproce ut SP^n.

Scholium.

Cæterum hæc Propoſitio & ſuperiores, quæ ad Media inæqualiter denſa ſpectant, intelligendæ ſunt de motu corporum adeo parvorum, ut Medii ex uno corporis latere major denſitas quam ex altero non conſideranda veniat. Reſiſtentiam quoque cæteris paribus denſitati proportionalem eſſe ſuppono. Unde in Mediis quorum vis reſiſtendi non eſt ut denſitas, debet denſitas eo uſque augeri vel diminui, ut reſiſtentiæ vel tollatur exceſſus vel defectus ſuppleatur.

Prop. XVII. Prob. V.

Invenire & vim centripetam & Medii reſiſtentiam qua corpus in data Spirali data lege revolvi poteſt. Vide *Fig. Prop.* XV.

Sit ſpiralis illa PQR. Ex velocitate qua corpus percurrit arcum quam minimum PQ dabitur tempus, & ex altitudine TQ, quæ eſt ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum PSQ & QSR, differentia RSr, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur reſiſtentia ac denſitas Medii.

Prop. XVIII. Prob. VI.

Data lege vis centripetæ, invenire Medii denſitatem in locis ſingulis, qua corpus datam Spiralem deſcribet.

Ex vi centripeta invenienda eſt velocitas in locis ſingulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda Medii denſitas: ut in Propoſitione ſuperiore.

Methodum vero tractandi hæc Problemata aperui in hujus Propoſitione decima, & Lemmate ſecundo; & Lectorem in hujuſmodi perplexis diſquiſitionibus diutius detenere nolo. Addenda jam ſunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque denſitate & reſiſtentia Mediorum, in quibus motus hactenus expoſiti & his affines peraguntur.

SECT. V.

De Denſitate & compreſſione Fluidorum, deque Hydroſtatica.

Definitio Fluidi.

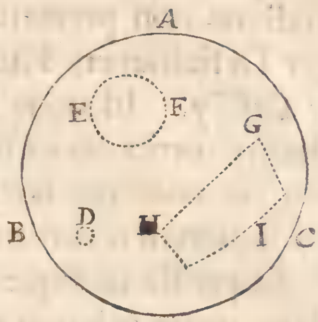
Fluidum eſt corpus omne cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facile movetur inter ſe.

Prop. XIX. Theor. XIII.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vaſe quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (ſepoſita Condenſationis, gravitatis & virium omnium centripetarum conſideratione) æqualiter premuntur undique, & abſque omni motu a preſſione illa orto permanent in locis ſuis.

Caſ. 1. In vaſe ſphærico *ABC* claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejuſdem pars nulla ex illa preſſione movebitur. Nam ſi pars aliqua *D* moveatur, neceſſe eſt ut omnes ejuſmodi partes, ad eandem a centro diſtantiam undique conſiſtentes, ſimili motu ſimul moveantur; atq; hoc adeo quia ſimilis & æqualis eſt omnium preſſio, & motus omnis excluſus ſupponitur, niſi qui a preſſione illa oriatur. Atqui non poſſunt omnes ad centrum propius accedere, niſi fluidum ad centrum condenſetur; contra Hypotheſin. Non poſſunt longius ab eo recedere niſi

niſi fluidum ad circumferentiam condenſetur; etiam contra Hypotheſin. Non poſſunt ſervata ſua a centro diſtantia moveri in plagam quamcunq; quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non poteſt pars eadem eodem tempore moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco ſuo movebitur. *Q.E.D.*



Caſ. 2. Dico jam quod fluidi hujus partes omnes ſphæricæ æqualiter premuntur undique: ſit enim *EF* pars ſphærica fluidi, & ſi hæc undiq; non premitur æqualiter, augeatur preſſio minor, uſq; dum ipſa undiq; prematur æqualiter; & partes ejus, per caſum primum, permanebunt in locis ſuis. Sed ante auctam preſſionem permanebunt in locis ſuis, per caſum eundum primum, & additione preſſionis novæ movebuntur de locis ſuis, per definitionem Fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falſo dicebatur quod Sphæra *E F* non undique premebatur æqualiter. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Dico præterea quod diverſarum partium ſphæricarum æqualis ſit preſſio. Nam partes ſphæricæ contiguæ ſe mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motus Legem III. Sed & per Caſum ſecundum, undiq; premuntur eadem vi. Partes igitur duæ quævis ſphæricæ non contiguæ, quia pars ſphærica intermedia tangere poteſt utramque, prementur eadem vi. *Q. E. D.*

Caſ. 4. Dico jam quod fluidi partes omnes ubiq; premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi poſſunt a partibus Sphæricis in punctis quibuſcunque, & ibi partes illas Sphæricas æqualiter premunt, per Caſum 3. & viciſſim ab illis æqualiter premuntur, per Motus Legem Tertiam. *Q. E. D.*

Caſ. 5. Cum igitur fluidi pars quælibet *G H I* in fluido reliquo tanquam in vaſe claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus ſe mutuo æqualiter premant & quieſcant inter ſe; manifeſtum eſt quod Fluidi cujuſcunque *G H I*, quod undi-

que premitur æqualiter, partes omnes ſe mutuo premunt æqualiter, & quieſcunt inter ſe. *Q. E. D.*

Caſ. 6. Igitur ſi Fluidum illud in vaſe non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter, cedet idem preſſioni fortiori, per Definitionem Fluiditatis.

Caſ. 7. Ideoque in vaſe rigido Fluidum non ſuſtinebit preſſionem fortiorem ex uno latere quam ex alio, ſed eidem cedet, idq; in momento temporis, quia latus vaſis rigidum non perſequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppoſitum, & ſic preſſio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam Fluidum, quam primum a parte magis preſſa recedere conatur, inhibetur per reſiſtentiam vaſis ad latus oppoſitum; reducetur preſſio undique ad æqualitatem in momento temporis abſque motu locali; & ſubinde, partes fluidi per Caſum quintum, ſe mutuo prement æqualiter, & quieſcent inter ſe. *Q. E. D.*

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter ſe, per preſſionem fluido ubivis in externa ſuperficie illatam, mutari poſſunt, niſi quatenus aut figura ſuperficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intenſius vel remiſſius ſeſe premendo difficilius vel facilius labuntur inter ſe.

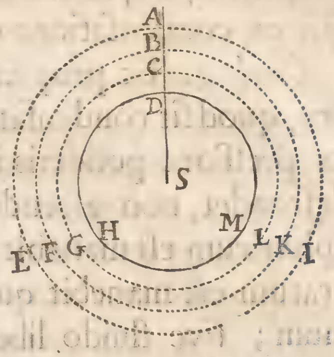
Prop. XX. Theor. XIV.

Si Fluidi Sphærici, & in æqualibus a centro diſtantiis homogenei, fundo ſphærico concentrico incumbentis partes ſingulæ verſus centrum totius gravitent; ſuſtinet fundum pondus Cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ Fluidi incumbentis.

Sit *D H M* ſuperficies fundi, & *A E I* ſuperficies ſuperior fluidi. Superficiebus ſphæricis innumeris *B F K*, *C G L* diſtinguatur fluidum in Orbes concentricos æqualiter craſſos; & concipe vim gravitatis agere ſolummodo in ſuperficiem ſuperiorem Orbis cujuſque, & æquales eſſe actiones in æquales partes ſuperficierum omnium. Premitur ergo ſuperficies ſuprema *A E* vi ſimplici gravitatis propriæ, qua & omnes Orbis ſupremi partes & ſuperficies

ſecunda

ſecunda *BFK* (per Prop. XIX.) premuntur. Premitur præterea ſuperficies ſecunda *BFK* vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit preſſionem duplam.



Hac preſſione & inſuper vi propriæ gravitatis, id eſt preſſione tripla, urgetur ſuperficies tertia *CGL*. Et ſimiliter preſſione quadrupla urgetur ſuperficies quarta, quintupla quinta & ſic deinceps. Preſſio igitur qua ſuperficies unaquæque urgetur, non eſt ut quantitas ſolida fluidi incumbentis, ſed ut numerus Orbium ad uſque ſummitatem fluidi; & æquatur gravitati Orbis infimi multiplicatæ per numerum Orbium: hoc eſt gravitati ſolidi cujus ultima ratio ad Cylindrum præfinitum, (ſi modo Orbium augeatur numerus & minuatur craſſitudo in infinitum, ſic ut actio gravitatis a ſuperficie infima ad ſupremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Suſtinet ergo ſuperficies infima pondus cylindri præfiniti. *Q. E. D.* Et ſimili argumentatione patet Propoſitio, ubi gravitas decreſcit in ratione quavis aſſignata diſtantiæ a centro, ut & ubi Fluidum ſurſum rarius eſt, deorſum denſius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, ſed eam ſolummodo ponderis partem ſuſtinet quæ in Propoſitione deſcribitur; pondere reliquo a fluidi figura fornicata ſuſtentato.

Corol. 2. In æqualibus autem a centro diſtantiis eadem ſemper eſt preſſionis quantitas, ſive ſuperficies preſſa ſit Horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; ſive fluidum a ſuperficie preſſa ſurſum continuatum ſurgat perpendiculariter ſecundum lineam rectam, vel ſerpit oblique per tortas cavitates & canales, eaſque regulares vel maxime irregulares, amplas vel anguſtiſſimas. Hiſce circumſtantiis preſſionem nil mutari colligitur, applicando demonſtrationem Theorematis hujus ad Caſus ſingulos Fluidorum.

Corol. 3.

Corol. 3. Eadem Demonſtratione colligitur etiam (per Prop. XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex preſſione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter ſe, ſi modo excludatur motus qui ex condenſatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea ſi aliud ejuſdem gravitatis ſpecificæ corpus, quod ſit condenſationis expers, ſubmergatur in hoc fluido, id ex preſſione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non deſcendet, non aſcendet, non cogetur figuram ſuam mutare. Si Sphæricum eſt manebit ſphæricum, non obſtante preſſione; ſi quadratum eſt manebit quadratum: idq; ſive molle ſit, ſive fluidiſſimum; ſive fluido libere innatet, ſive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis ſubmerſi, & par eſt ratio omnium ejuſdem magitudinis, figuræ & gravitatis ſpecificæ ſubmerſorum corporum. Si corpus ſubmerſum ſervato pondere liqueſceret & indueret formam fluidi; hoc, ſi prius aſcenderet vel deſcenderet vel ex preſſione figuram novam indueret, etiam nunc aſcenderet vel deſcenderet vel figuram novam induere cogeretur; id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum cauſæ permanent. Atqui, per Caſ. 5. Prop. XIX. jam quieſceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod ſpecifice gravius eſt quam Fluidum ſibi contiguum ſubſidebit, & quod ſpecifice levius eſt aſcendet, motumque & figuræ mutationem conſequetur, quantum exceſſus ille vel defectus gravitatis efficere poſſit. Namque exceſſus ille vel defectus rationem habet impulſus, quo corpus, alias in æquilibrio cum fluidi partibus conſtitutum, urgetur; & comparari poteſt cum exceſſu vel defectu ponderis in lance alterutra libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis conſtitutorum duplex eſt Gravitas: altera vera & abſoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas abſoluta eſt vis tota qua corpus deorſum tendit: relativa & vulgaris eſt exceſſus gravitatis quo corpus magis tendit deorſum quam fluidum ambiens. Prioris generis Gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis

ſuis;

ſuis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave eſt, ut in vaſis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale eſt ponderibus omnium partium, ideoque ex iiſdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis ſuis, id eſt inter ſe collata non prægravant, ſed mutuos ad deſcendendum conatus impedientia permanent in locis ſuis, perinde ac ſi gravia non eſſent. Quæ in Aere ſunt & non prægravant, Vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quatenus ab Aeris pondere non ſuſtinentur. Pondera vulgi nihil aliud ſunt quam exceſſus verorum ponderum ſupra pondus Aeris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ ſunt minus gravia, Aerique prægravanti cedendo ſuperiora petunt. Comparative levia ſunt non vere, quia deſcendunt in vacuo. Sic & in Aqua, corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem deſcendunt vel aſcendunt, ſunt comparative & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens eſt exceſſus vel defectus quo vera eorum gravitas vel ſuperat gravitatem aquæ vel ab ea ſuperatur. Quæ vero nec prægravando deſcendunt, nec prægravanti cedendo aſcendunt, etiamſi veris ſuis ponderibus adaugeant pondus totius, comparative tamen & in ſenſu vulgi non gravitant in aqua. Nam ſimilis eſt horum Caſuum Demonſtratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonſtrantur, obtinent in aliis quibuſcunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde ſi Medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel a gravitate propria, vel ab alia quacunq; vi centripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius: differentia virium eſt vis illa motrix, quam in præcedentibus Propoſitionibus ut vim centripetam conſideravimus. Sin corpus a vi illa urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifuga haberi debet.

Corol. 9. Cum autem fluida premendo corpora incluſa non mutent eorum Figuras externas, patet inſuper, per Corollaria Prop. XIX. quod non mutabunt ſitum partium internarum inter ſe: proindeque, ſi Animalia immergantur, & ſenſatio omnis a motu

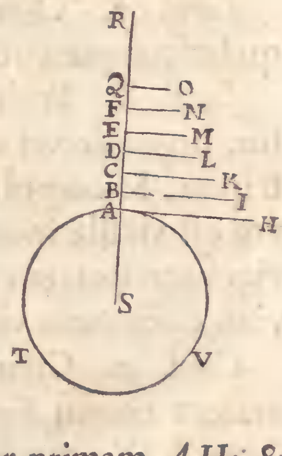
tu

tu partium oriatur; nec lædent corporibus immerſis, nec ſenſationem ullam excitabunt, niſi quatenus hæc corpora a compreſſione condenſari poſſunt. Et par eſt ratio cujuſcunque corporum Syſtematis fluido comprimente circundati. Syſtematis partes omnes iiſdem agitabuntur motibus, ac ſi in vacuo conſtituerentur, ac ſolam retinerent gravitatem ſuam comparativam, niſi quatenus fluidum vel motibus earum nonnihil reſiſtat, vel ad eaſdem compreſſione conglutinandas requiratur.

Prop. XXI. Theor. XV.

Sit Fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus a vi centripeta diſtantiis ſuis a centro reciproce proportionali deorſum trahantur: dico quod ſi diſtantiæ illæ ſumantur continue proportionales, denſitates fluidi in iiſdem diſtantiis erunt etiam continue proportionales.

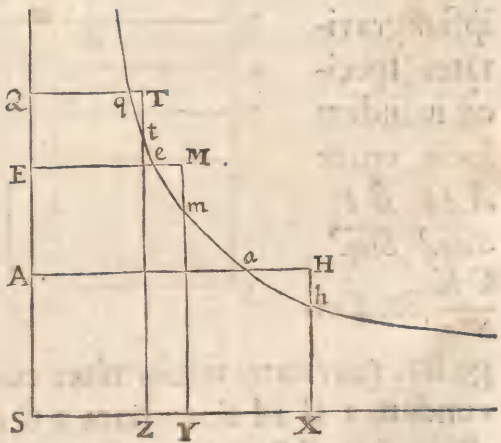
Deſignet ATV fundum Sphæricum cui fluidum incumbit, S centrum, SA, SB, SC, SD, SE, &c. diſtantias continue proportionales. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, DL, EM, &c. quæ ſint ut denſitates Medii in locis A, B, C, D, E; & ſpecificæ gravitates in iiſdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, &c. vel, quod perinde eſt, ut $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$ &c. Finge primum has gravitates uniformiter continuari ab A ad B, a B ad C, a C ad D &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D &c. Et hæ gravitates ductæ in altitudines AB, BC, CD &c. conficient preſſiones AH, BI, CK, quibus fundum ATV (juxta Theorema XIV.) urgetur. Suſtinet ergo particula A preſſiones omnes AH, BI, CK, DL, pergendo in infinitum; & particula B preſſiones omnes præter primam AH; & particula C omnes præter duas primas AH, BI; & ſic deinceps:



adeoque

adeoque particulæ primæ *A* denſitas *AH* eſt ad particulæ ſecundæ *B* denſitatem *BI* ut ſumma omnium *AH*+*BI*+*CK*+*DL*, in infinitum, ad ſummam omnium *BI*+*CK*+*DL*, &c. Et *BI* denſitas ſecundæ *B*, eſt ad *CK* denſitatem tertiæ *C*, ut ſumma omnium *BI*+*CK*+*DL*, &c. ad ſummam omnium *CK*+*DL*, &c. Sunt igitur ſummæ illæ differentiis ſuis *AH*, *BI*, *CK*, &c. proportionales, atque adeo continue proportionales per hujus Lem. I. proindeq; differentiæ *AH*, *BI*, *CK*, &c. ſummis proportionales, ſunt etiam continue proportionales. Quare cum denſitates in locis *A*, *B*, *C* ſint ut *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt etiam hæ continue proportionales. Pergatur per ſaltum, & (ex æquo) in diſtantiis *SA*, *SC*, *SE* continue proportionalibus, erunt denſitates *AH*, *CK*, *EM* continue proportionales. Et eodem argumento in diſtantiis quibuſvis continue proportionalibus *SA*, *SD*, *SQ* denſitates *AH*, *DL*, *QO* erunt continue proportionales. Coeant jam puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. eo ut progreſſio gravitatum ſpecificarum a fundo *A* ad ſummitatem Fluidi continua reddatur, & in diſtantiis quibuſvis continue proportionalibus *SA*, *SD*, *SQ*, denſitates *AH*, *DL*, *QT*, ſemper exiſtentes continue proportionales, manebunt etiamnum continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi detur denſitas Fluidi in duobus locis, puta *A* & *E*, colligi poteſt ejus denſitas in alio quovis loco *Q*. Centro *S*, Aſymptotis rectangulis *SQ*, *SX* deſcribatur Hyperbola ſecans perpendicula *AH*, *EM*, *QT* in *a*, *e*, *q*, ut & perpendicula *HX*, *MY*, *TZ* ad aſymptoton *SX* demiſſa in *h*, *m*, & *t*. Fiat area *ZYmtZ* ad aream datam *YmhX* ut area data *EeqQ* ad aream datam *EeaA*; & linea *Zt* producta abſcindet lineam *QT* denſitati proportionalem. Namque ſi lineæ *SA*, *SE*, *SQ* ſunt continue proportionales, erunt



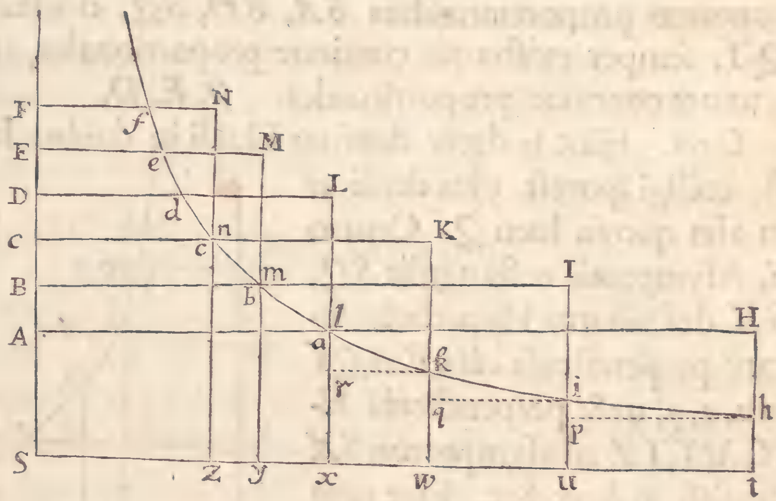
 areæ

areæ $EeqQ$, $EeaA$ æquales, & inde areæ his proportionales ΥmtZ, $Xhm\Upsilon$ etiam æquales & lineæ SX, $S\Upsilon$, SZ id eſt AH, EM, QT continue proportionales, ut oportet. Et ſi lineæ SA, SE, SQ obtinent alium quemvis ordinem in ſerie continue proportionalium, lineæ AH, EM, QT, ob proportionales areas Hyperbolicas, obtinebunt eundem ordinem in alia ſerie quantitatum continue proportionalium.

Prop. XXII. Theor. XVI.

Sit Fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus a gravitate quadratis diſtantiarum ſuarum a centro reciproce proportionali deorſum trahantur: dico quod ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione Muſica, denſitates Fluidi in his diſtantiis erunt in progreſſione Geometrica.

Deſignet S centrum, & SA, SB, SC, SD, SE diſtantias in Progreſſione Geometrica. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, &c. quæ ſint ut Fluidi denſitates in locis A, B, C, D, E, &c. & ipſius gravitates ſpecificæ in iiſdem locis erunt $\frac{AH}{SAq.}$, $\frac{BI}{SBq.}$, $\frac{CK}{SCq.}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B, ſecundam a B ad C, tertiam a C ad D, &c. Et hæ ductæ in altitudines AB, BC, CD, DE, &c. vel, quod perinde eſt, in diſtantias SA, SB, SC, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes



ponentes preſſionum $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}$, &c. Quare cum denſitates ſint ut harum preſſionum ſummæ, differentiæ denſitatum $AH - BI$, $BI - CK$, &c. erunt ut ſummarum differentiæ $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}$, &c. Centro S Aſymptotis SA, SX deſcribatur Hyperbola quævis, quæ ſecet perpendicula AH, BI, CK, &c. in a, b, c; ut & perpendicula ad Aſymptoton SX demiſſa Ht, Iu, Kw in h, i, k; & denſitatum differentiæ tu, uw, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. ſeu tp, uq. &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id eſt ut Aa, Bb &c. Eſt enim ex natura Hyperbolæ SA ad AH vel St, ut th ad Aa, adeoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale Aa. Et ſimili argumento eſt $\frac{BI \times ui}{SB}$ æqualis Bb, &c. Sunt autem Aa Bb, Cc, &c. continue proportionales, & propterea differentiis ſuis $Aa - Bb$, $Bb - Cc$, &c. proportionales; ideoque differentiis hiſce proportionalia ſunt rectangula tp, uq, &c. ut & ſummis differentiarum $Aa - Cc$ vel $Aa - Dd$ ſummæ rectangulorum $tp + uq$, vel $tp + uq + wr$. Sunto ejuſmodi termini quam plurimi, & ſumma omnium differentiarum, puta $Aa - Ff$, erit ſummæ omnium rectangulorum, puta $zthn$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur diſtantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ Hyperbolicæ $zthn$, adeoque huic areæ proportionalis eſt differentia $Aa - Ff$. Sumantur jam diſtantiæ quælibet, puta SA, SD, SF in Progreſſione Muſica, & differentiæ $Aa - Dd$, $Dd - Ff$ erunt æquales; & propterea differentiis hiſce proportionales areæ $thlx$, $xlnz$ æquales erunt inter ſe, & denſitates St, Sx, Sz, id eſt AH, DL, FN, continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi dentur Fluidi denſitates duæ quævis, puta AH & CK, dabitur area $thkw$ harum differentiæ tw reſpondens; & inde invenietur denſitas FN in altitudine quacunque SF, ſumendo aream $thnz$ ad aream illam datam $thkw$ ut eſt differentia $Aa - Ff$ ad differentiam $Aa - Cc$.

Scholium

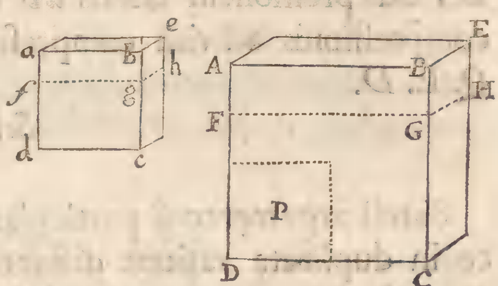
Simili argumentatione probari poteſt, quod ſi gravitas particularum Fluidi diminuatur in triplicata ratione diſtantiarum a centro; & quadratorum diſtantiarum SA, SB, SC, &c. reciproca (nempe $\frac{SA\,cub.}{SAq.}$, $\frac{SA\,cub.}{SBq.}$, $\frac{SA\,cub.}{SCq.}$) ſumantur in progreſſione Arithmetica; denſitates AH, BI, CK, &c. erunt in progreſſione Geometrica. Et ſi gravitas diminuatur in quadruplicata ratione diſtantiarum, & cuborum diſtantiarum reciproca (puta $\frac{SAqq.}{SA\,cub.}$, $\frac{SAqq.}{SB\,cub.}$, $\frac{SAqq.}{SC\,cub.}$, &c.) ſumantur in progreſſione Arithmetica; denſitates AH, BI, CK, &c. erunt in progreſſione Geometrica. Et ſic in infinitum. Rurſus ſi gravitas particularum Fluidi in omnibus diſtantiis eadem ſit, & diſtantiæ ſint in progreſſione Arithmetica, denſitates erunt in progreſſione Geometrica, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas ſit ut diſtantia, & quadrata diſtantiarum ſint in progreſſione Arithmetica, denſitates erunt in progreſſione Geometrica. Et ſic in infinitum. Hæc ita ſe habent ubi Fluidi compreſſione condenſati denſitas eſt ut vis compreſſionis, vel, quod perinde eſt, ſpatium a Fluido occupatum reciproce ut hæc vis. Fingi poſſunt aliæ condenſationis leges, ut quod cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-quadratum denſitatis, ſeu triplicata ratio Vis æqualis quadruplicatæ rationi denſitatis. Quo in caſu, ſi gravitas eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ a centro, denſitas erit reciproce ut cubus diſtantiæ. Fingatur quod cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-cubus denſitatis, & ſi gravitas eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ, denſitas erit reciproce in ſeſqui-

ſeſquiplicata ratione diſtantiæ. Fingatur quod vis comprimens ſit in duplicata ratione denſitatis, & gravitas reciproce in ratione duplicata diſtantiæ, & denſitas erit reciproce ut diſtantia. Caſus omnes percurrere longum eſſet.

Prop. XXIII. Theor. XVII.

Particulæ viribus quæ ſunt reciproce proportionales diſtantiis centrorum ſuorum ſe mutuo fugientes componunt Fluidum Elaſticum, cujus denſitas eſt compreſſioni proportionalis. Et vice verſa, ſi Fluidi ex particulis ſe mutuo fugientibus compoſiti denſitas ſit ut compreſſio, vires centrifugæ particularum ſunt reciproce proportionales diſtantiis centrorum.

Includi intelligatur Fluidum in ſpatio cubico *ACE*, dein compreſſione redigi in ſpatium cubicum minus *ace*; & particularum ſimilem ſitum inter ſe in utroque ſpatio obtinentium diſtantiæ erunt ut cuborum latera *AB*, *ab*; & Medii denſitates reciproce ut ſpatia continentia *AB cub.* & *ab cub.* In latere cubi majoris *ABCD* capiatur quadratum *DP* æquale lateri cubi minoris *db*; & ex Hypotheſi, preſſio qua quadratum *DP* urget Fluidum incluſum, erit ad preſſionem qua latus illud quadratum *db* urget Fluidum incluſum, ut Medii denſitates ad invicem, hoc eſt *ab cub.* ad *AB cub.* Sed preſſio qua quadratum *DB* urget Fluidum incluſum, eſt ad preſſionem qua quadratum *DP* urget idem Fluidum, ut quadratum *DB* ad quadratum *DP*, hoc eſt ut *AB quad.* ad *ab quad.* Ergo ex æquo preſſio qua latus *DB* urget Fluidum, eſt ad preſſionem qua latus *db* urget Fluidum, ut *ab* ad *AB*. Planis *FGH*, *fgh* per media cuborum ductis diſtinguatur Fluidum in duas partes, & hæ ſe mutuo prement iiſdem



viribus

viribus, quibus premuntur a planis AC, ac, hoc eſt in proportione ab ad AB: adeoque vires centrifugæ, quibus hæ preſſiones ſuſtinentur, ſunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum ſimilemq; ſitum in utroque cubo, vires quas particulæ omnes ſecundum plana FGH, fgh exercent in omnes, ſunt ut vires quas ſingulæ exercent in ſingulas. Ergo vires, quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum FGH in cubo majore, ſunt ad vires quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum fgh in cubo minore ut ab ad AB, hoc eſt reciproce ut diſtantiæ particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice verſa, ſi vires particularum ſingularum ſunt reciproce ut diſtantiæ, id eſt reciproce ut cuborum latera AB, ab; ſummæ virium erunt in eadem ratione, & preſſiones laterum DB, db ut ſummæ virium; & preſſio quadrati DP ad preſſionem lateris DB ut ab *quad.* ad AB *quad.* Et ex æquo preſſio quadrati DP ad preſſionem lateris db ut ab *cub.* ad AB *cub.* id eſt vis compreſſionis ad vim compreſſionis ut denſitas ad denſitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

Simili argumento ſi particularum vires centrifugæ ſint reciproce in duplicata ratione diſtantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata denſitatum. Si vires centrifugæ ſint reciproce in triplicata vel quadruplicata ratione diſtantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi denſitatum. Et univerſaliter, ſi D ponatur pro diſtantia, & E pro denſitate Fluidi compreſſi, & vires centrifugæ ſint reciproce ut diſtantiæ dignitas quælibet Dn, cujus index eſt numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica Dignitatis $En+2$, cujus index eſt numerus $n+2$: & contra. Intelligenda vero ſunt hæc omnia de particularum Viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longe ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus Magneticis. Horum

rum Virtus attractiva terminatur fere in ſui generis corporibus ſibi proximis. Magnetis virtus per interpoſitam laminam ferri contrahitur, & in lamina fere terminatur. Nam corpora ulteriora non tam a Magnete quam a lamina trahuntur. Ad eundem modum ſi particulæ fugant alias ſui generis particulas ſibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam niſi forte per particulas intermedias virtute illa auctas exerceant, ex hujuſmodi particulis componentur Fluida de quibus actum eſt in hac propoſitione. Quod ſi particulæ cujuſq; virtus in infinitum propagetur, opus erit vi majori ad æqualem condenſationem majoris quantitatis Fluidi. Ut ſi particula unaquæq; vi ſua, quæ ſit reciproce ut diſtantia locorum a centro ſuo, fugat alias omnes particulas in infinitum; Vires quibus Fluidum in vaſis ſimilibus æqualiter comprimi & condenſari poſſit, erunt ut quadrata diametrorum vaſorum: ideoque vis, qua Fluidum in eodem vaſe comprimitur, erit reciproce ut latus cubicum quadrato-cubi denſitatis. An vero Fluida Elaſtica ex particulis ſe mutuo fugantibus conſtent, Quæſtio Phyſica eſt. Nos proprietatem Fluidorum ex ejuſmodi particulis conſtantium Mathematice demonſtravimus, ut Philoſophis anſam præbeamus Quæſtionem illam tractandi.

SECT. VI.

De Motu & reſiſtentia Corporum Funependulorum.

Prop. XXIV. Theor. XVIII.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oſcillationum a centro ſuſpenſionis æqualiter diſtant, ſunt in ratione compoſita ex ratione ponderum & ratione duplicata temporum oſcillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in data materia dato tempore generare poteſt, eſt ut vis & tempus directe, & materia inverſe.

Quo

Quo major eſt vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus Legem ſecundam manifeſtum eſt. Jam vero ſi pendula ejuſdem ſint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter diſtantibus ſunt ut pondera: ideoque ſi corpora duo oſcillando deſcribant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cum tempora quibus corpora deſcribant ſingulas arcuum partes correſpondentes ſint ut tempora oſcillationum totarum, erunt velocitates ad invicem in correſpondentibus oſcillationum partibus, ut vires motrices & tota oſcillationum tempora directe & quantitates materiæ reciproce: adeoque quantitates materiæ ut vires & oſcillationum tempora directe & velocitates reciproce. Sed velocitates reciproce ſunt ut tempora, atque adeo tempora directe & velocitates reciproce ſunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ ſunt ut vires motrices & quadrata temporum, id eſt ut pondera & quadrata temporum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ideoque ſi tempora ſunt æqualia, quantitates materiæ in ſingulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera ſunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciproce ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde cum quadrata temporum cæteris paribus ſint ut longitudines pendulorum; ſi & tempora & quantitates materiæ æqualia ſunt, pondera erunt ut longitudines pendulorum.

Corol. 5. Et univerſaliter, quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus & quadratum temporis directe, & longitudo penduli inverſe.

Corol. 6. Sed & in Medio non reſiſtente quantitas Materiæ pendulæ eſt ut pondus comparativum & quadratum temporis directe & longitudo penduli inverſe. Nam pondus comparativum eſt vis motrix corporis in Medio quovis gravi, ut ſupra explicui; adeoque idem præſtat in tali Medio non reſiſtente atque pondus abſolutum in vacuo.

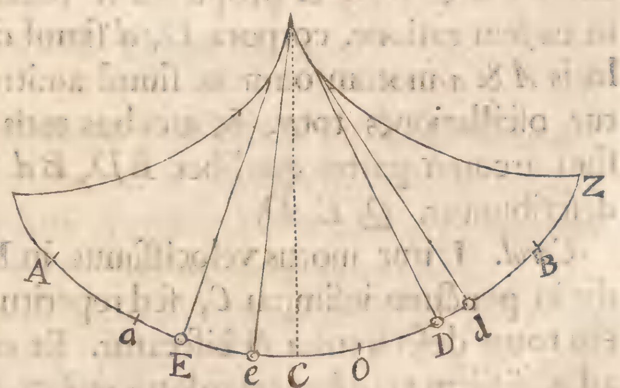
Corol. 7.

Corol. 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter ſe, quoad quantitatem materiæ in ſingulis, tum comparandi pondera ejuſdem corporis in diverſis locis, ad cognoſcendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratiſſimis inveni ſemper quantitatem materiæ in corporibus ſingulis eorum ponderi proportionalem eſſe.

Prop. XXV. Theor. XIX.

Corpora Funependula quæ in Medio quovis reſiſtuntur in ratione momentorum temporis, quæque in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente moventur, oſcillationes in Cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales ſimul deſcribunt.

Sit *A B* Cycloidis arcus, quem corpus *D* tempore quovis in Medio non reſiſtente oſcillando deſcribit. Biſecetur idem in *C*, ita ut *C* ſit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix qua corpus urgetur in loco quovis *D* vel *d* vel *E* ut longitudo arcus *C D* vel *C d* vel *C E*. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum reſiſtentia ſit ut momentum temporis, adeoque detur, exponatur eadem per datam arcus Cycloidis partem *C O*, & ſumatur arcus *O d* in ratione ad arcum *C D* quam habet arcus *O B* ad arcum *C B*: & vis qua corpus in *d* urgetur in Medio reſiſtente, cum ſit exceſſus vis *C d* ſupra reſiſtentiam *C O*, exponetur per arcum *O d*, adeoque erit ad



vim qua corpus *D* urgetur in Medio non reſiſtente, in loco *D*, ut arcus *O d* ad arcum *C D*; & propterea etiam in loco *B* ut arcus *O B* ad arcum *C B*. Proinde ſi corpora duo, *D*, *d* exeant de loco

B, & his viribus urgeantur: cum vires ſub initio ſint ut arcus *CB* & *O B*, erunt velocitates primæ & arcus primo deſcripti in eadem ratione. Sunto arcus illi *BD* & *Bd*, & arcus reliqui *C D*, *O d* erunt in eadem ratione. Proinde vires ipſis *C D*, *O d* proportionales manebunt in eadem ratione ac ſub initio, & propterea corpora pergent arcus in eadem ratione ſimul deſcribere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui *CD*, *O d* ſemper erunt ut arcus toti *CD*, *O B*, & propterea arcus illi reliqui ſimul deſcribentur. Quare corpora duo *D*, *d* ſimul pervenient ad loca *C* & *O*, alterum quidem in Medio non reſiſtente ad locum *C*, & alterum in Medio reſiſtente ad locum *O*. Cum autem velocitates in *C* & *O* ſint ut arcus *C B* & *O B*; erunt arcus quos corpora ulterius pergendo ſimul deſcribunt, in eadem ratione. Sunto illi *CE* & *O e*. Vis qua corpus *D* in Medio non reſiſtente retardatur in *E* eſt ut *CE*, & vis qua corpus *d* in Medio reſiſtente retardatur in *e* eſt ut ſumma vis *C e* & reſiſtentiæ *CO*, id eſt ut *O e*; ideoque vires, quibus corpora retardantur, ſunt ut arcubus *CE*, *O e* proportionales arcus *C B*, *O B*; proindeque velocitates in data illa ratione retardatæ manent in eadem illa data ratione. Velocitates igitur & arcus iiſdem deſcripti ſemper ſunt ad invicem in data illa ratione arcuum *CB* & *O B*; & propterea ſi ſumantur arcus toti *AB*, *a B* in eadem ratione, corpora *D*, *d* ſimul deſcribent hos arcus, & in locis *A* & *a* motum omnem ſimul amittent. Iſochronæ ſunt igitur oſcillationes totæ, & arcubus totis *BA*, *BE* proportionales ſunt arcuum partes quælibet *BD*, *Bd* vel *BE*, *Be* quæ ſimul deſcribuntur. *Q. E. D.*

Corol. Igitur motus velociſſimus in Medio reſiſtente non incidit in punctum infimum *C*, ſed reperitur in puncto illo *O*, quo arcus totus deſcriptus *a B* biſecatur. Et corpus ſubinde pergendo ad *a*, iiſdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in deſenſu ſuo a *B* ad *O*.

Prop. XXVI. Theor. XX.

Corporum Funependulorum, quæ reſiſtuntur in ratione velocitatum, oſcillationes in Cycloide ſunt Iſochronæ.

Nam ſi corpora duo a centris ſuſpenſionum æqualiter diſtantia, oſcillando deſcribant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correſpondentibus ſint ad invicem ut arcus toti: reſiſtentiæ velocitatibus proportionales erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde ſi viribus motricibus a gravitate oriundis, quæ ſint ut iidem arcus, conferantur vel addantur hæ reſiſtentiæ, erunt differentiæ vel ſummæ ad invicem in eadem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa ſint ut hæ differentiæ vel ſummæ, velocitates ſemper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, ſi ſint in aliquo caſu ut arcus toti, manebunt ſemper in eadem ratione. Sed in principio motus, ubi corpora incipiunt deſcendere & arcus illos deſcribere, vires, cum ſint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates ſemper erunt ut arcus toti deſcribendi, & propterea arcus illi ſimul deſcribentur. *Q. E. D.*

Prop. XXVII. Theor. XXI.

Si corpora Funependula reſiſtuntur in duplicata ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oſcillationum in Medio reſiſtente ac tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente, erunt arcubus oſcillando deſcriptis proportionales, quam proxime.

Nam pendulis æqualibus in Medio reſiſtente deſcribantur arcus inæquales *A*, *B*; & reſiſtentia corporis in arcu *A*, erit ad reſiſtentiam corporis in parte correſpondente arcus *B*, in duplicata ratione velocitatum, id eſt ut *A quad.* ad *B quad.* quamproxime. Si reſiſtentia in arcu *B* eſſet ad reſiſtentiam in arcu *A* ut rectangulum *AB* ad *A quad.* tempora in arcubus *A* & *B* forent æqualia

 per

per Propoſitionem ſuperiorem. Ideoque reſiſtentia *A quad.* in arcu *A*, vel *A B* in arcu *B*, efficit exceſſum temporis in arcu *A* ſupra tempus in Medio non reſiſtente; & reſiſtentia *BB* efficit exceſſum temporis in arcu *B* ſupra tempus in Medio non reſiſtente. Sunt autem exceſſus illi ut vires efficientes *A B* & *B B* quam proxime, id eſt ut arcus *A* & *B*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ex oſcillationum temporibus, in Medio reſiſtente in arcubus inæqualibus factarum, cognoſci poſſunt tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente. Nam ſi verbi gratia arcus alter ſit altero duplo major, differentia temporum erit ad exceſſum temporis in arcu minore ſupra tempus in Medio non reſiſtente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. Oſcillationes breviores ſunt magis Iſochronæ, & breviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in Medio non reſiſtente, quam proxime. Earum vero quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora ſunt paulo majora, propterea quod reſiſtentia in deſcenſu corporis qua tempus producitur, major ſit pro ratione longitudinis in deſcenſu deſcriptæ, quam reſiſtentia in aſcenſu ſubſequente qua tempus contrahitur. Sed & tempus oſcillationum tam brevium quam longarum nonnihil produci videtur per motum Medii. Nam corpora tardeſcentia paulo minus reſiſtuntur pro ratione velocitatis, & corpora accelerata paulo magis quam quæ uniformiter progrediuntur: id adeo quia Medium, eo quem a corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore caſu magis agitatur, in poſteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conſpirat. Pendulis igitur in deſcenſu magis reſiſtit, in aſcenſu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utraque cauſa tempus producitur.

Prop. XXVIII. Theor. XXII.

Si corpus Funependulum in Cycloide oſcillans reſiſtitur in ratione momentorum temporis, erit ejus reſiſtentia ad vim gravitatis ut exceſſus

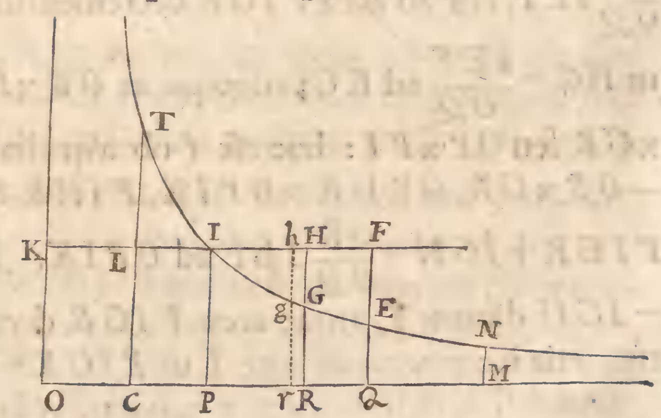
ceſſus arcus deſcenſu toto deſcripti ſupra arcum aſcenſu ſubſequente deſcriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

Deſignet *BC* arcum deſcenſu deſcriptum, *C a* arcum aſcenſu deſcriptum, & *A a* differentiam arcuum: & ſtantibus quæ in Propoſitione XXV. conſtructa & demonſtrata ſunt, erit vis qua corpus oſcillans urgetur in loco quovis *D*, ad uim reſiſtentiæ ut arcus *CD* ad arcum *CO*, qui ſemiſſis eſt differentiæ illius *A a*. Ideoque vis qua corpus oſcillans urgetur in Cycloidis principio ſeu puncto altiſſimo, id eſt vis gravitatis, erit ad reſiſtentiam ut arcus Cycloidis inter punctum illud ſupremum & punctum infimum *C* ad arcum *CO*; id eſt (ſi arcus duplicentur) ut Cycloidis totius arcus, ſeu dupla penduli longitudo, ad arcum *A a*. *Q. E. D.*

Prop. XXIX. Prob. VII.

Poſito quod corpus in Cycloide oſcillans reſiſtitur in duplicata ratione velocitatis: invenire reſiſtentiam in locis ſingulis.

Sit *B a* (*Fig. Prop.* XXV.) arcus oſcillatione integra deſcriptus, ſitque *C* infimum Cycloidis punctum, & *CZ* ſemiſſis arcus Cycloidis totius, longitudini Penduli æqualis; & quæratur reſiſtentia corporis in loco quovis *D*. Secetur recta infinita *OQ* in punctis *O*, *C*, *P*, *Q* ea lege ut (ſi erigantur perpendicula *OK*, *CT*, *PI*, *QE*, centroque *O* & Aſymptotis *OK*, *OQ* deſcribatur Hyperbola *TIGE* ſecans



perpendicula *CT*, *PI*, *QE* in *T*, *I* & *E*, & per punctum *I* agatur *KF* occurrens Aſymptoto *OK* in *K*, & perpendiculis *CT* & *QE* in *L* & *F*) fuerit area Hyperbolica *PIEQ* ad aream Hyperbolicam *PITC*

PITC ut arcus *BC* deſcenſu corporis deſcriptus ad arcum *Ca* aſcenſu deſcriptum, & area *IEF* ad aream *ILT* ut *OQ* ad *OC*. Dein perpendiculo *MN* abſcindatur area Hyperbolica *PINM* quæ ſit ad aream Hyperbolicam *PIEQ* ut arcus *CZ* ad arcum *BC* deſcenſu deſcriptum. Et ſi perpendiculo *RG* abſcindatur area Hyperbolica *PIGR*, quæ ſit ad aream *PIEQ* ut arcus quilibet *CD* ad arcum *BC* deſcenſu toto deſcriptum: erit reſiſtentia in loco *D* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ ad aream *PIENM*.

Nam cum vires a gravitate oriundæ quibus corpus in locis *Z*, *B*, *D*, *a* urgetur, ſint ut arcus *CZ*, *CB*, *CD*, *Ca*, & arcus illi ſint ut areæ *PINM*, *PIEQ*, *PIGR*, *PITC*; exponatur tum arcus tum vires per has areas reſpective. Sit inſuper *Dd* ſpatium quam minimum a corpore deſcendente deſcriptum, & exponatur idem per aream quam minimam *RGgr* parallelis *RG*, *rg* comprehenſam; & producatur *rg* ad *h*, ut ſint *GHhg*, & *RGgr* contemporanea arearum *IGH*, *PIGR* decrementa. Et areæ $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ incrementum $GHhg - \frac{Rr}{OQ}IEF$, ſeu $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ}IEF$, erit ad areæ *PIGR* decrementum *RGgr* ſeu $Rr \times RG$, ut $HG - \frac{IEF}{OQ}$ ad *RG*; adeoque ut $OR \times HG - \frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OR \times GR$ ſeu $OP \times PI$: hoc eſt (ob æqualia $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, $ORHK - OPIK$, $PIHR$ & $PIGR + IGH$) ut $PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ}IEF$ ad *OPIK*. Igitur ſi area $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ dicatur *Y*, atque areæ *PIGR* decrementum *RGgr* detur, erit incrementum areæ *Y* ut $PIGR - Y$.

Quod ſi *V* deſignet vim a gravitate oriundam arcui deſcribendo *CD* proportionalem, qua corpus urgetur in *D*; & *R* pro reſiſtentia ponatur: erit $V - R$ vis tota qua corpus urgetur in *D*, adeoque

adeoque ut incrementum velocitatis in data temporis particula factum. Eſt autem reſiſtentia *R* (per Hypotheſin) ut quadratum velocitatis, & inde (per Lem. II.) incrementum reſiſtentiæ ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id eſt ut ſpatium data temporis particula deſcriptum & *V*−*R* conjunctim; atque adeo, ſi momentum ſpatii detur, ut *V*−*R*; id eſt, ſi pro vi *V* ſcribatur ejus exponens *PIGR*, & reſiſtentia *R* exponatur per aliam aliquam aream *Z*, ut *PIGR*−*Z*.

Igitur area *PIGR* per datorum momentorum ſubductionem uniformiter decreſcente, creſcunt area *Y* in ratione *PIGR*−*Y*, & area *Z* in ratione *PIGR*−*Z*. Et propterea ſi areæ *Y* & *Z* ſimul incipiant & ſub initio æquales ſint, hæ per additionem æqualium momentorum pergent eſſe æquales, & æqualibus itidem momentis ſubinde decreſcentes ſimul evaneſcent. Et viciſſim, ſi ſimul incipiunt & ſimul evaneſcunt, æqualia habebunt momenta & ſemper erunt æquales: id adeo quia ſi reſiſtentia *Z* augeatur, velocitas una cum arcu illo *Ca*, qui in aſcenſu corporis deſcribitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis una cum reſiſtentia ceſſat propius accedente ad punctum *C*, reſiſtentia citius evaneſcet quam area *Y*. Et contrarium eveniet ubi reſiſtentia diminuitur.

Jam vero area *Z* incipit deſinitque ubi reſiſtentia nulla eſt, hoc eſt, in principio & fine motus, ubi arcus *CD*, *CD* arcubus *CB* & *Ca* æquantur, adeoque ubi recta *RG* incidit in rectas *QE* & *CT*. Et area *Y* ſeu $\frac{OR}{OQ}$ *IEF*−*IGH* incipit deſinitque ubi nulla eſt, adeoque ubi $\frac{OR}{OQ}$ *IEF* & *IGH* æqualia ſunt: hoc eſt (per conſtructionem) ubi recta *RG* incidit in rectam *QE* & *CT*. Proindeque areæ illæ ſimul incipiunt & ſimul evaneſcunt, & propterea ſemper ſunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ}$ *IEF*−*IGH* æqualis eſt areæ *Z*, per quam reſiſtentia exponitur, & propterea eſt ad aream *PINM* per quam gravitas exponitur, ut reſiſtentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. 1.

Corol. 1. Eſt igitur reſiſtentia in loco infimo *C* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ}$ *IEF* ad aream *PINM*.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area *PIHR* eſt ad aream *IEF* ut *OR* ad *OQ*. Eo enim in caſu momentum ejus (nimirum *PIGR*−*T*) evadit nullum.

Corol. 3. Hinc etiam innoteſcit velocitas in locis ſingulis: quippe quæ eſt in dimidiata ratione reſiſtentiæ, & ipſo motus initio æquatur velocitati corporis in eadem Cycloide abſque omni reſiſtentia oſcillantis.

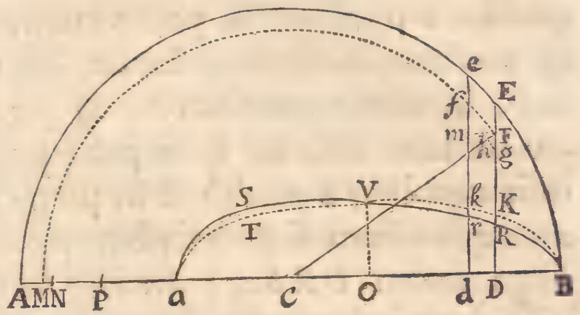
Cæterum ob difficilem calculum quo reſiſtentia & velocitas per hanc Propoſitionem inveniendæ ſunt, viſum eſt Propoſitionem ſequentem ſubjungere, quæ & generalior ſit & ad uſus Philoſophicos abunde ſatis accurata.

Prop. XXX. Theor. XXIII.

Si recta a B *æqualis ſit Cycloidis arcui quem corpus oſcillando deſcribit, & ad ſingula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* D K, *quæ ſint ad longitudinem Penduli ut reſiſtentia corporis in arcus punctis correſpondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum deſcenſu toto deſcriptum, & arcum aſcenſu toto ſubſequente deſcriptum, ducta in arcuum eorundam ſemiſummam, æqualis erit areæ* B K a B *a perpendiculis omnibus* D K *occupatæ, quamproxime.*

Exponatur enim tum Cycloidis arcus oſcillatione integra deſcriptus, per rectam illam ſibi æqualem *aB*, tum arcus qui deſcriberetur in vacuo per longitudinem *AB*. Biſecetur *AB* in *C*, & punctum *C* repræſentabit infimum Cycloidis punctum, & erit *CD* ut vis a gravitate oriunda, qua corpus in *C* ſecundum Tangentem Cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem Penduli quam habet vis in *D* ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem *CD*, & vis gravitatis per longitudinem penduli; & ſi in *DE* capiatur *DK* in ea ratione ad longi-

longitudinem penduli quam habet reſiſtentia ad gravitatem, erit *DK* exponens reſiſtentiæ. Centro *C* & intervallo *CA* vel *CB* conſtruatur ſemicirculus, *BEeA*. Deſcribet autem corpus tempore quam minimo ſpatium *Dd*, & erectis perpendiculis *DE*, *de* circumferentiæ occurrentibus in *E* & *e*, erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, deſcendendo a puncto *B*, acquireret in locis *D* & *d*. Patet hoc per Prop. LII. Lib. I. Exponantur itaq; hæ velocitates per perpendicula illa *DE*, *de*; ſitque *DF* velocitas quam acquirit in *D* cadendo de *B* in Medio reſiſtente. Et ſi centro *C* & intervallo *CF* deſcribatur circulus *FfM* occurrens rectis *de* & *AB* in *f* & *M*, erit *M* locus ad quem deinceps abſque ulteriore reſiſtentia aſcenderet, & *df* velocitas quam acquireret in *d*. Unde etiam ſi *Fg* deſignet velocitatis momentum quod corpus *D*, deſcribendo ſpatium quam minimum *Dd*, ex reſiſtentia Medii amittit, & ſumatur *CN* æqualis *Cg*: erit *N* locus ad quem corpus deinceps abſque ulteriore reſiſtentia aſcenderet, & *MN* erit decrementum aſcenſus ex velocitatis illius amiſſione oriundum. Ad *df* demittatur perpendiculum *Fm*, & velocitatis *DF* decrementum *fg* a reſiſtentia *DK* genitum, erit ad velocitatis ejuſdem incrementum *fm* a vi *CD* genitum, ut vis generans *DK* ad vim generantem *CD*. Sed & ob ſimilia triangula *Fmf*, *Fhg*, *FDC*, eſt *fm* ad *Fm* ſeu *Dd*, ut *CD* ad *DF*, & ex æquo *Fg* ad *Dd* ut *DK* ad *DF*. Item *Fg* ad *Fh* ut *CF* ad *DF*; & ex æquo perturbate *Fh* ſeu *MN* ad *Dd* ut *DK* ad *CF*. Sumatur *DR* ad $\frac{1}{2}$ *aB* ut *DK* ad *CF*, & erit *MN* ad *Dd* ut *DR* ad $\frac{1}{2}$ *aB*; ideoque ſumma omnium *MN* x $\frac{1}{2}$ *aB*, id eſt *Aa* x $\frac{1}{2}$ *aB*, æqualis erit ſummæ omnium *Dd* x *DR*, id eſt areæ *BRrSa*, quam rectangula omnia *Dd* x *DR*



R r ſeu

ſeu $DRrd$ componunt. Biſecentur Aa & aB in P & O, & erit $\frac{1}{2}aB$ ſeu OB æqualis CP, ideoque DR eſt ad DK ut CP ad CF vel CM, & diviſim KR ad DR ut PM ad CP. Ideoque cum punctum M, ubi corpus verſatur in medio oſcillationis loco O, incidat circiter in punctum P, & priore oſcillationis parte verſetur inter A & P, poſteriore autem inter P & a, utroque in caſu æqualiter a puncto P in partes contrarias errans: punctum K circa medium oſcillationis locum, id eſt e regione puncti O, puta in V, incidet in punctum R; in priore autem oſcillationis parte jacebit inter R & E, & in poſteriore inter R & D, utroque in caſu æqualiter a puncto R in partes contrarias errans. Proinde area quam linea KR deſcribit, priore oſcillationis parte jacebit extra aream $BRSa$, poſteriore intra eandem, idque dimenſionibus hinc inde propemodum æquatis inter ſe; & propterea in caſu priore addita areæ $BRSa$, in poſteriore eidem ſubducta, relinquet aream $BKTa$ areæ $BRSa$ æqualem quam proxime. Ergo rectangulum $Aa \times \frac{1}{2}aB$ ſeu AaO, cum ſit æquale areæ $BRSa$, erit etiam æquale areæ $BKTa$ quamproxime. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ex lege reſiſtentiæ & arcuum Ca, CB differentia Aa, colligi poteſt proportio reſiſtentiæ ad gravitatem quam proxime.

Nam ſi uniformis ſit reſiſtentia DK, figura $aBKkS$ rectangulum erit ſub Ba & DK, & inde rectangulum ſub $\frac{1}{2}Ba$ & Aa æqualis erit rectangulo ſub Ba & DK, & DK æqualis erit $\frac{1}{2}Aa$. Quare cum DK ſit exponens reſiſtentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit reſiſtentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2}Aa$ ad longitudinem Penduli; omnino ut in Propoſitione XXVIII. demonſtratum eſt.

Si reſiſtentia ſit ut velocitas, Figura $aBKkS$ Ellipſis erit quam proxime. Nam ſi corpus, in Medio non reſiſtente, oſcillatione integra deſcriberet longitudinem BA, velocitas in loco quovis D foret ut circuli diametro AB deſcripti ordinatim applicata DE. Proinde cum Ba in Medio reſiſtente & BA in Medio non reſiſtente, æqualibus circiter temporibus deſcribantur; adeoque velocitates

locitates in ſingulis ipſius *Ba* punctis, ſint quam proxime ad velocitates in punctis correſpondentibus longitudinis *BA*, ut eſt *Ba* ad *BA*; erit velocitas *DK* in Medio reſiſtente ut circuli vel Ellipſeos ſuper diametro *Ba* deſcripti ordinatim applicata; adeoque figura *BKVTa* Ellipſis, quam proxime. Cum reſiſtentia velocitati proportionalis ſupponatur, ſit *OV* exponens reſiſtentiæ in puncto Medio *O*; & Ellipſis, centro *O*, ſemiaxibus *OB*, *OV* deſcripta, figuram *aBKVT*, eique æquale rectangulum *Aa* x *BO*, æquabit quam proxime. Eſt igitur *Aa* x *BO* ad *OV* x *BO* ut area Ellipſeos hujus ad *OV* x *BO*: id eſt *Aa* ad *OV* ut area ſemicirculi, ad quadratum radii ſive ut 11 and 7 circiter: Et propterea: $\frac{7}{11}$ *Aa* ad longitudinem penduli ut corporis oſcillantis reſiſtentia in *O* ad ejuſdem gravitatem.

Quod ſi reſiſtentia *DK* ſit in duplicata ratione velocitatis, figura *BKTVa* Parabola erit verticem habens *V* & axem *OV*, ideoque æqualis erit duabus tertiis partibus rectanguli ſub *Ba* & *OV* quam proxime. Eſt igitur rectangulum ſub $\frac{1}{2}$ *Ba* & *Aa* æquale rectangulo ſub $\frac{2}{3}$ *Ba* & *OV*, adeoque *OV* æqualis $\frac{3}{4}$ *Aa*, & propterea corporis oſcillantis reſiſtentia in *O* ad ipſius gravitatem ut $\frac{3}{4}$ *Aa* ad longitudinem Penduli.

Atque has concluſiones in rebus practicis abunde ſatis accuratas eſſe cenſeo. Nam cum Ellipſis vel Parabola congruat cum figura *BKVTa* in puncto medio *V*, hæc ſi ad partem alterutram *BKV* vel *VTa* excedit figuram illam, deficiet ab eadem ad partem alteram, & ſic eidem æquabitur quam proxime.

Prop. XXXI. Theor. XXIV.

Si corporis oſcillantis reſiſtentia in ſingulis arcuum deſcriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in data ratione; differentia inter arcum deſcenſu deſcriptum & arcum ſubſequente aſcenſu deſcriptum, augebitur vel diminuetur in eadem ratione quamproxime.

Oritur enim differentia illa ex retardatione Penduli per reſiſtentiam

ſtentiam Medii, adeoque eſt ut retardatio tota eique proportionalis reſiſtentia retardans. In ſuperiore Propoſitione rectangulum ſub recta $\frac{1}{2}$ *a B* & arcuum illorum *C B*, *C a* differentia *A a*, æqualis erat areæ *B K T*. Et area illa, ſi maneat longitudo *a B*, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum *D K*; hoc eſt in ratione reſiſtentiæ, adeoque eſt ut longitudo *a B* & reſiſtentia conjunctim. Proindeque rectangulum ſub *A a* & $\frac{1}{2}$ *a B* eſt ut *a B* & reſiſtentia conjunctim, & propterea *A a* ut reſiſtentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde ſi reſiſtentia ſit ut velocitas, differentia arcuum in eodem Medio erit ut arcus totus deſcriptus: & contra.

Corol. 2. Si reſiſtentia ſit in duplicata ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicata ratione arcus totius; & contra.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi reſiſtentia ſit in triplicata vel alia quavis ratione velocitatis, differentia erit in eadem ratione arcus totius; & contra.

Corol. 4. Et ſi reſiſtentia ſit partim in ratione ſimplici velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata, differentia erit partim in ratione arcus totius & partim in ejus ratione duplicata; & contra. Eadem erit lex & ratio reſiſtentiæ pro velocitate, quæ eſt differentiæ illius pro longitudine arcus.

Corol. 5. Ideoque ſi, pendulo inæquales arcus ſucceſſive deſcribente, inveniri poteſt ratio incrementi ac decrementi reſiſtentiæ hujus pro longitudine arcus deſcripti, habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi reſiſtentiæ pro velocitate majore vel minore.

SECT. VII.

SECT. VII.

De Motu Fluidorum & reſiſtentia Projectilium.

Prop. XXXII. Theor. XXV.

Si corporum Syſtemata duo ex æquali particularum numero conſtent, & particulæ correſpondentes ſimiles ſint, ſingulæ in uno Syſtemate ſingulis in altero, ac datam habeant rationem denſitatis ad invicem, & inter ſe temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant, (eæ inter ſe quæ in uno ſunt Syſtemate & eæ inter ſe quæ ſunt in altero) & ſi non tangant ſe mutuo quæ in eodem ſunt Syſtemate, niſi in momentis reflexionum, neque attrahant vel fugent ſe mutuo, niſi viribus acceleratricibus quæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inverſe & quadrata velocitatum directe: dico quod Syſtematum particulæ ille pergent inter ſe temporibus proportionalibus ſimiliter moveri; & contra.

Corpora ſimilia temporibus proportionalibus inter ſe ſimiliter moveri dico, quorum ſitus ad invicem in fine temporum illorum ſemper ſunt ſimiles: puta ſi particulæ unius Syſtematis cum alterius particulis correſpondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus ſimiles & proportionales figurarum ſimilium partes a particulis correſpondentibus deſcribuntur. Igitur ſi duo ſint ejuſmodi Syſtemata, particulæ correſpondentes, ob ſimilitudinem incæptorum motuum, pergent ſimiliter moveri uſque donec ſibi mutuo occurrant. Nam ſi nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motus Leg. I. Si viribus aliquibus ſe mutuo agitant, & vires illæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inverſe & quadrata velocitatum directe; quoniam particularum ſitus ſunt ſimiles & vires proportionales, vires totæ quibus particulæ correſpondentes agitantur,

gitantur, ex viribus ſingulis agitantibus (per Legum Corollarium ſecundum) compoſitæ, ſimiles habebunt determinationes, perinde ac ſi centra inter particulas ſimiliter ſita reſpicerent ; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires ſingulæ componentes, hoc eſt ut correſpondentium particularum diametri inverſe, & quadrata velocitatum directe : & propterea efficient ut correſpondentes particulæ figuras ſimiles deſcribere pergant. Hæc ita ſe habebunt per Corol. 1. 2, & 7. Prop. IV. ſi modo centra illa quieſcant. Sin moveantur, quoniam ob tranſlationum ſimilitudinem, ſimiles manent eorum ſitus inter Syſtematum particulas; ſimiles inducentur mutationes in figuris quas particulæ deſcribunt. Similes igitur erunt correſpondentium & ſimilium particularum motus uſque ad occurſus ſuos primos, & propterea ſimiles occurſus, & ſimiles reflexiones, & ſubinde (per jam oſtenſa) ſimiles motus inter ſe, donec iterum in ſe mutuo inciderint, & ſic deinceps in infinitum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpora duo quævis, quæ ſimilia ſint & ad Syſtematum particulas correſpondentes ſimiliter ſita, inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant, ſintque eorum denſitates ad invicem ut denſitates correſpondentium particularum : hæc pergent temporibus proportionalibus ſimiliter moveri. Eſt enim eadem ratio partium majorum Syſtematis utriuſque atque particularum.

Corol 2. Et ſi ſimiles & ſimiliter poſitæ Syſtematum partes omnes quieſcant inter ſe : & earum duæ, quæ cæteris majores ſint, & ſibi mutuo in utroque Syſtemate correſpondeant, ſecundum lineas ſimiliter ſitas ſimili cum motu utcunque moveri incipiant : hæ ſimiles in reliquis ſyſtematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri ; atque adeo ſpatia diametris ſuis proportionalia deſcribere.

Prop. XXXIII. Theor. XXVI.

Iiſdem poſitis, dico quod Syſtematum partes majores reſiſtuntur in ratione compoſita ex duplicata ratione velocitatum ſuarum & duplicata ratione diametrorum & ratione denſitatis partium Syſtematum.

Nam reſiſtentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulæ ſyſtematum ſe mutuo agitant, partim ex occurſibus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis reſiſtentiæ ſunt ad invicem ut vires totæ motrices a quibus oriuntur, id eſt ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correſpondentibus; hoc eſt (per Hypotheſin) ut quadrata velocitatum directe & diſtantiæ particularum correſpondentium inverſe & quantitates materiæ in partibus correſpondentibus directe: ideoque (cum diſtantiæ particularum ſyſtematis unius ſint ad diſtantias correſpondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in ſyſtemate priore ad diametrum particulæ vel partis correſpondentis in altero, & quantitates materiæ ſint ut denſitates partium & cubi diametrorum) reſiſtentiæ ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium Syſtematum. *Q. E. D.* Poſterioris generis reſiſtentiæ ſunt ut reflexionum correſpondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directe, & ſpatia inter eorum reflexiones inverſe. Et vires reflexionum ſunt ut velocitates & magnitudines & denſitates partium correſpondentium conjunctim; id eſt ut velocitates & diametrorum cubi & denſitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, reſiſtentiæ partium correſpondentium ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur ſi ſyſtemata illa ſint Fluida duo Elaſtica ad modum Aeris, & partes eorum quieſcant inter ſe: corpora autem

tem duo ſimilia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & denſitatem proportionalia, & inter partes illas ſimiliter poſita, ſecundum lineas ſimiliter poſitas utcunque projiciantur; vires autem motrices, quibus particulæ Fluidorum ſe mutuo agitant, ſint ut corporum projectorum diametri inverſe, & quadrata velocitatum directe: corpora illa temporibus proportionalibus ſimiles excitabunt motus in Fluidis, & ſpatia ſimilia ac diametris ſuis proportionalia deſcribent.

Corol. 2. Proinde in eodem Fluido projectile velox reſiſtitur in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Nam ſi vires, quibus particulæ diſtantes ſe mutuo agitant, augerenter in duplicata ratione velocitatis, projectile reſiſteretur in eadem ratione duplicata accurate; ideoque in Medio, cujus partes ab invicem diſtantes ſeſe viribus nullis agitant, reſiſtentia eſt in duplicata ratione velocitatis accurate. Sunto igitur Media tria *A*, *B*, *C* ex partibus ſimilibus & æqualibus & ſecundum diſtantias æquales regulariter diſpoſitis conſtantia. Partes Mediorum *A* & *B* fugiant ſe mutuo viribus quæ ſint ad invicem ut *T* & *V*, illæ Medii *C* ejuſmodi viribus omnino deſtituantur. Et ſi corpora quatuor æqualia *D*, *E*, *F*, *G* in his Mediis moveantur, priora duo *D* & *E* in prioribus duobus *A* & *B*, & altera duo *F* & *G* in tertio *C*; ſitque velocitas corporis *D* ad velocitatem corporis *E*, & velocitas corporis *F* ad velocitatem corporis *G*, in dimidiata ratione virium *T* ad vires *V*; reſiſtentia corporis *D* erit ad reſiſtentiam corporis *E*, & reſiſtentia corporis *F* ad reſiſtentiam corporis *G* in velocitatum ratione duplicata; & propterea reſiſtentia corporis *D* erit ad reſiſtentiam corporis *F* ut reſiſtentia corporis *E* ad reſiſtentiam corporis *G*. Sunto corpora *D* & *F* æquivelocia ut & corpora *E* & *G*; & augendo velocitates corporum *D* & *F* in ratione quacunque, ac diminuendo vires particularum Medii *B* in eadem ratione duplicata, accedet Medium *B* ad formam & conditionem Medii *C* pro lubitu, & idcirco reſiſtentiæ corporum æqualium & æquivelocium *E* & *G* in his Mediis, perpetuo accedent ad æqualitatem

litatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cum reſiſtentiæ corporum *D* & *F* ſint ad invicem ut reſiſtentiæ corporum *E* & *G*, accedent etiam hæ ſimiliter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur *D* & *F*, ubi velociſſime moventur, reſiſtentiæ ſunt æquales quam proxime: & propterea cum reſiſtentia corporis *F* ſit in duplicata ratione velocitatis, erit reſiſtentia corporis *D* in eadem ratione quamproxime. *Q. E. D.*

Corol. 3. Igitur corporis in Fluido quovis Elaſtico velociſſime moventis eadem fere eſt reſiſtentia ac ſi partes Fluidi viribus ſuis centrifugis deſtituerentur, ſeque mutuo non fugerent: ſi modo Fluidi vis Elaſtica ex particularum viribus centrifugis oriatur.

Corol. 4. Proinde cum reſiſtentiæ ſimilium & æquivelocium corporum, in Medio cujus partes diſtantes ſe mutuo non fugiunt, ſint ut quadrata diametrorum, ſunt etiam æquivelocium & celerrime moventium corporum reſiſtentiæ in Fluido Elaſtico ut quadrata diametrorum quam proxime.

Corol. 5. Et cum corpora ſimilia, æqualia & æquivelocia, in Mediis ejuſdem denſitatis, quorum particulæ ſe mutuo non fugiunt, ſive particulæ illæ ſint plures & minores, ſive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus inpingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & viciſſim (per motus Legem tertiam) æqualem ab eadem reactionem patiantur, hoc eſt, æqualiter reſiſtantur: manifeſtum eſt etiam quod in ejuſdem denſitatis Fluidis Elaſticis, ubi velociſſime moventur, æquales ſint eorum reſiſtentiæ quam proxime; ſive Fluida illa ex particulis craſſioribus conſtent, ſive ex omnium ſubtiliſſimis conſtituantur. Ex Medii ſubtilitate reſiſtentia projectilium celerrime motorum non multum diminuitur.

Corol. 6. Cum autem particulæ Fluidorum, propter vires quibus ſe mutuo fugiunt, moveri nequeant quin ſimul agitent particulas alias in circuitu, atque adeo difficilius moveantur inter ſe quam ſi viribus iſtis deſtituerentur; & quo majores ſint earum

vires centrifugæ, eo difficilius moveantur inter ſe: manifeſtum eſſe videtur quod projectile in tali Fluido eo difficilius movebitur, quo vires illæ ſunt intenſiores; & propterea ſi corporis velociſſimi in ſuperioribus Corollariis velocitas diminuatur, quoniam reſiſtentia diminueretur in duplicata ratione velocitatis, ſi modo vires particularum in eadem ratione duplicata diminuerentur; vires autem nullatenus diminuantur, manifeſtum eſt quod reſiſtentia diminuetur in ratione minore quam duplicata velocitatis.

Corol. 7. Porro cum vires centrifugæ eo nomine ad augendam reſiſtentiam conducant, quod particulæ motus ſuos per Fluidum ad majorem a ſe diſtantiam per vires illas propagent; & cum diſtantia illa minorem habeat rationem ad majora corpora: manifeſtum eſt quod augmentum reſiſtentiæ ex viribus illis oriundum in corporibus majoribus minoris ſit momenti; & propterea, quo corpora ſint majora eo magis accurate reſiſtentia tardeſcentium decreſcet in in duplicata ratione velocitatis.

Corol. 8. Unde etiam ratio illa duplicata magis accurate obtinebit in Fluidis quæ, pari denſitate & vi Elaſtica, ex particulis minoribus conſtant. Nam ſi corpora illa majora diminuantur, & particulæ Fluidi, manente ejus denſitate & vi Elaſtica, diminuantur in eadem ratione; manebit eadem ratio reſiſtentiæ quæ prius: ut ex præcedentibus facile colligitur.

Corol. 9. Hæc omnia ita ſe habent in Fluidis, quorum vis Elaſtica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod ſi vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expanſione ad inſtar Lanæ vel ramorum arborum, aut ex alia quavis cauſa, qua motus particularum inter ſe redduntur minus liberi: reſiſtentia, ob minorem Medii fluiditatem, erit major quam in ſuperioribus Corollariis.

Prop. XXXIV. Theor. XXVII.

Quæ in præcedentibus duabus Propoſitionibus demonſtrata ſunt, obtinent ubi particulæ Syſtematum ſe mutuo contingunt, ſi modo particulæ illæ ſint ſumme lubricæ.

Concipe particulas viribus quibuſdam ſe mutuo fugere, & vires illas in acceſſu ad ſuperficies particularum augeri in infinitum, & contra, in receſſu ab iiſdem celerrime diminui & ſtatim evaneſcere. Concipe etiam ſyſtemata comprimi, ita ut partes eorum ſe mutuo contingant, niſi quatenus vires illæ contactum impediunt. Sint autem ſpatia per quæ vires particularum diffunduntur quam anguſtiſſima, ita ut particulæ ſe mutuo quam proxime contingant: & motus particularum inter ſe iidem erunt quam proxime ac ſi ſe mutuo contingerent. Eadem facilitate labentur inter ſe ac ſi eſſent ſumme lubricæ, & ſi impingant in ſe mutuo reflectentur ab invicem ope virium præfatarum, perinde ac ſi eſſent Elaſticæ. Itaque motus erunt iidem in utroque caſu, niſi quatenus perexigua particularum ſeſe non contingentium intervalla diverſitatem efficiant: quæ quidem diverſitas diminuendo particularum intervalla diminui poteſt in infinitum. Jam vero quæ in præcedentibus duabus Propoſitionibus demonſtrata ſunt, obtinent in particulis ſeſe non contingentibus, idque licet intervalla particularum, diminuendo ſpatia per quæ vires diffundunur, diminuantur in infinitum. Et propterea eadem obtinent in particulis ſeſe contingentibus, exceptis ſolum differentiis quæ tandem differentiis quibuſvis datis minores evadant. Dico igitur quod accurate obtinent. Si negas, aſſigna differentiam in caſu quocunque. Atqui jam probatum eſt quod differentia minor ſit quam data quævis. Ergo differentia falſo aſſignatur, & propterea nulla eſt. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur ſi Syſtematum duorum partes omnes quieſcant inter ſe, exceptis duabus, quæ cæteris majores ſint & ſibi

mutuo correſpondeant inter cæteras ſimiliter ſitæ. Hæ ſecundum lineas ſimiliter poſitas utcunque projectæ ſimiles excitabunt motus in Syſtematibus, & temporibus proportionalibus pergent ſpatia ſimilia & diametris ſuis proportionalia deſcribere ; & reſiſtentur in ratione compoſita ex duplicata ratione velocitatum & duplicata ratione diametrorum & ratione denſitatis Syſtematum.

Corol. 2. Unde ſi Syſtemata illa ſint Fluida duo ſimilia, & eorum partes duæ majores ſint corpora in iiſdem projecta: ſint autem Fluidorum particulæ ſumme lubricæ, & quoad magnitudinem & denſitatem proportionales corporibus: pergent corpora temporibus proportionalibus ſpatia ſimilia & diametris ſuis proportionalia deſcribere, & reſiſtentur in ratione Corollario ſuperiore definita.

Corol. 3. Proinde in eodem Fluido Projectile magnitudine datum reſiſtitur in duplicata ratione velocitatis.

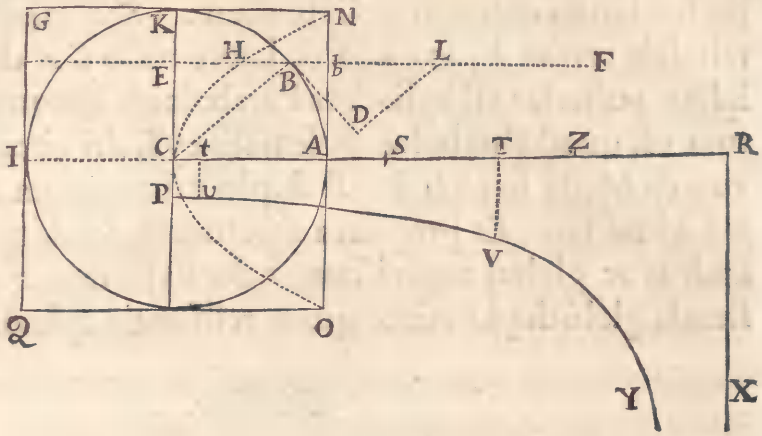
Corol. 4. At ſi particulæ Fluidi non ſint ſumme lubricæ, vel ſi viribus quibuſcunque ſe mutuo agitant, quibus motuum libertas diminuitur: Projectilia tardiora difficilius ſuperabunt reſiſtentiam, & propterea magis reſiſtentur quam in velocitatis ratione duplicata.

Prop. XXXV. Theor. XXVIII.

Si Globus & Cylindrus æqualibus diametris deſcripti, in Medio raro & Elaſtico, ſecundum plagam axis Cylindri, æquali cum velocitate celerrime moveantur: erit reſiſtentia Globi duplo minor quam reſiſtentia Cylindri.

Nam quoniam reſiſtentia (per Corol. 3. Prop. XXXIII.) eadem eſt quam proxime ac ſi partes Fluidi viribus nullis ſe mutuo fugerent, ſupponamus partes Fluidi ejuſmodi viribus deſtitutas per ſpatia omnia uniformiter diſpergi. Et quoniam actio Medii in corpus eadem eſt (per Legum Corol. 5.) ſive corpus in Medio quieſcente moveatur, ſive Medii particulæ eadem cum veloci-

velocitate impingant in corpus quieſcens: conſideremus corpus tanquam quieſcens, & videamus quo impetu urgebitur a Medio movente. Deſignet igitur *ABKI* corpus Sphæricum centro *C* ſemidiametro *CA* deſcriptum, & incidant particulæ Medii data cum velocitate in corpus illud Sphæricum, ſecundum rectas ipſi *AC* parallelas: Sitque *FB*



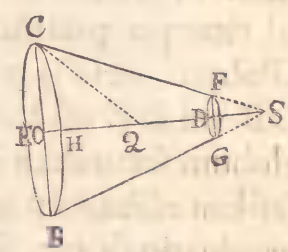
ejuſmodi recta. In ea capiatur *LB* ſemidiametro *CB* æqualis, & ducatur *BD* quæ Sphæram tangat in *B*. In *AC* & *BD* demittantur perpendiculares *BE*, *DL*, & vis qua particula Medii, ſecundum rectam *FB* oblique incidendo, Globum ferit in *B*, erit ad vim qua particula eadem Cylindrum *ONGQ* axe *ACI* circa Globum deſcriptum perpendiculariter feriret in *b*, ut *LD* ad *LB* vel *BE* ad *BC*. Rurſus efficacia hujus vis ad movendum globum ſecundum incidentiæ ſuæ plagam *FB* vel *AC*, eſt ad ejuſdem efficaciam ad movendum globum ſecundum plagam determinationis ſuæ, id eſt ſecundum plagam rectæ *BC* qua globum directe urget, ut *BE* ad *EC*. Et conjunctis rationibus, efficacia particulæ, in globum ſecundum rectam *FB* oblique incidentis, ad movendum eundem ſecundum plagam incidentiæ ſuæ, eſt ad efficaciam particulæ ejuſdem ſecundum eandem rectam in cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipſum movendum in plagam eandem, ut *BE* quadratum ad *BC* quadratum. Quare ſi ad cylindri baſem circularem *NAO* erigatur perpendiculum *bHE*, & ſit *bE* æqualis radio *AC*, & *bH* æqualis $\frac{CE\,quad.}{CB}$, erit *bH* ad

bE

b E ut effectus particulæ in globum ad effectum particulæ in cylindrum. Et propterea Solidum quod a rectis omnibus *b H* occupatur erit ad ſolidum quod a rectis omnibus *b E* occupatur, ut effectus particularum omnium in globum ad effectum particularum omnium in Cylindrum. Sed ſolidum prius eſt Parabolois vertice *V*, axe *C A* & latere recto *C A* deſcriptum, & ſolidum poſterius eſt cylindrus Paraboloidi circumſcriptus: & notum eſt quod Parabolois ſit ſemiſſis cylindri circumſcripti. Ergo vis tota Medii in globum eſt duplo minor quam ejuſdem vis tota in Cylindrum. Et propterea ſi particulæ Medii quieſcerent, & cylindrus ac globus æquali cum velocitate moverentur, foret reſiſtentia globi duplo minor quam reſiſtentia cylindri. *Q. E. D.*

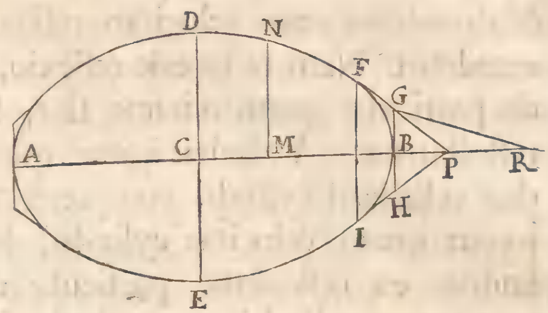
Scholium.

Eadem methodo figuræ aliæ inter ſe quoad reſiſtentiam comparari poſſunt, eæque inveniri quæ ad motus ſuos in Mediis reſiſtentibus continuandos aptiores ſunt. Ut ſi baſe circulari *CEBH*, quæ centro *O*, radio *OC* deſcribitur, & altitudine *O D*, conſtruendum ſit fruſtrum coni *CBG F*, quod omnium eadem baſi & altitudine conſtructorum & ſecundum plaga maxis ſui verſus *D* progredientium fruſtorum minime reſiſtatur: biſeca altitudinem *O D* in *Q* & produc, *O Q* ad *S* ut ſit *Q S* æqualis *Q C*, & erit *S* vertex coni cujus fruſtum quæritur.



Unde obiter cum angulus *C S B* ſemper ſit acutus, conſequens eſt, quod ſi ſolidum *A D B E* convolutione figuræ Ellipticæ vel Ovalis *A D B E* circa axem *A B* facta generetur, & tangatur figura generans a rectis tribus *F G*, *G H*, *H I* in punctis *F*, *B* & *I*, ea lege ut *G H* ſit perpendicularis ad axem in puncto contactus *B*, & *F G*, *H I* cum eadem *G H* contineant angulos *F G B*, *B H I* graduum 135: ſolidum, quod convolutione figuræ *A D F G H I E* circa axem

em eundem *CB* generatur, minus reſiſtitur quam ſolidum prius; ſi modo utrumque ſecundum plagam axis ſui *AB* progrediatur, & utriuſque terminus *B* præcedat. Quam quidem propoſitionem in conſtruendis Navibus non inutilem futuram eſſe cenſeo.



Quod ſi figura *DNFB* ejuſmodi ſit ut, ſi ab ejus puncto quovis *N* ad axem *AB* demittatur perpendiculum *NM*, & a puncto dato *G* ducatur recta *GR* quæ parallela ſit rectæ figuram tangenti in *N*, & axem productum ſecet in *R*, fuerit *MN* ad *GR* ut *GR cub.* ad $4BR \times GBq$: Solidum quod figuræ hujus revolutione circa axem *AB* facta deſcribitur, in Medio raro & Elaſtico ab *A* verſus *B* velociſſime movendo, minus reſiſtetur quam aliud quodvis eadem longitudine & latitudine deſcriptum Solidum circulare.

Prop. XXXVI. Prob. VIII.

Invenire reſiſtentiam corporis Sphærici in Fluido raro & Elaſtico velociſſime progredientis. (Vide Fig. Pag. 325.)

Deſignet *ABKI* corpus Sphæricum centro *C* ſemidiametro *CA* deſcriptum. Producatur *CA* primo ad *S* deinde ad *R*, ut ſit *AS* pars tertia ipſius *CA*, & *CR* ſit ad *CS* ut denſitas corporis Sphærici ad denſitatem Medii. Ad *CR* erigantur perpendicula *PC*, *RX*, centroque *R* & Aſymptotis *CR*, *RX* deſcribatur Hyperbola quævis *PVY*. In *CR* capiatur *CT* longitudinis cujuſvis, & erigatur perpendiculum *TV* abſcindens aream Hyperbolicam *PCTV*, & ſit *CZ* latus hujus areæ applicatæ ad rectam *PC*. Dico quod motus quem globus, deſcribendo ſpatium *CZ*, ex reſiſtentia Medii amittet, erit ad ejus motum totum ſub initio ut longitudo *CT* ad longitudinem *CR* quamproxime.

Nam

Nam (per motuum Legem tertiam) motus quem cylindrus *GNOQ* circa globum deſcriptus impingendo in Medii particulas amitteret, æqualis eſt motui quem imprimeret in eaſdem particulas. Ponamus quod particulæ ſingulæ reflectantur a cylindro, & ab eodem ea cum velocitate reſiliant, quacum cylindrus ad ipſas accedebat. Nam talis erit reflexio, per Legum Corol. 3. ſi modo particulæ quam minime ſint, & vi Elaſtica quam maxima reflectantur. Velocitas igitur quacum a cylindro reſiliunt, addita velocitati cylindri componet totam velocitatem duplo majorem quam velocitas cylindri, & propterea motus quem cylindrus ex reflexione particulæ cujuſque amittit, erit ad motum totum cylindri, ut particula duplicata ad cylindrum. Proinde cum denſitas Medii ſit ad denſitatem cylindri ut *CS* ad *CR*; ſi *Ct* ſit longitudo tempore quam minimo a cylindro deſcripta, erit motus eo tempore amiſſus ad motum totum cylindri ut $2\,Ct \times CS$ ad $AI \times CR$. Ea enim eſt ratio materiæ Medii, a cylindro protruſæ & reflexæ, ad maſſam cylindri. Unde cum globus ſit duæ tertiæ partes cylindri, & reſiſtentia globi (per Propoſitionem ſuperiorem) ſit duplo minor quam reſiſtentia cylindri: erit motus, quem globus deſcribendo longitudinem *L* amittit, ad motum totum globi, ut $Ct \times CS$ ad $\frac{2}{3}\,AI \times CR$, ſive ut *Ct* ad *CR*. Erigatur perpendiculum *tv* Hyperbolæ occurrens in *v*, & (per Corol. 1. Prop. V. Lib. II) ſi corpus deſcribendo longitudinem areæ *CtvP* proportionalem, amittit motus ſui totius *CR* partem quamvis *Ct*, idem deſcribendo longitudinem areæ *CTVP* proportionalem, amittet motus ſui partem *CT*. Sed longitudo *Ct* æqualis eſt $\frac{CPvt}{CP}$, & longitudo *OZ* (per Hypotheſin) æqualis eſt $\frac{CPTV}{CP}$, adeoque longitudo *Ct* eſt ad longitudinem *CZ* ut area *CPvt* ad aream *CPVT*. Et propterea cum globus deſcribendo longitudinem quam minimam *Ct* amittat motus ſui partem, quæ ſit ad totum ut *Ct* ad *CR*, is

deſcribendo

deſcribendo longitudinem aliam quamvis *CZ*, amittet motus ſui partem quæ ſit ad totum ut *CT* ad *CR*. *Q.E.D.*

Corol. 1. Si detur corporis velocitas ſub initio, dabitur tempus quo corpus, deſcribendo ſpatium *Ct*, amittet motus ſui partem *Ct*: & inde, dicendo quod reſiſtentia ſit ad vim gravitatis ut iſta motus pars amiſſa ad motum, quem gravitas Globi eodem tempore generaret; dabitur proportio reſiſtentiæ ad gravitatem Globi.

Corol. 2. Quoniam in his determinandis ſuppoſui quod particulæ Fluidi per vim ſuam Elaſticam quam maxime a Globo reflectantur, & particularum ſic reflexarum impetus in Globum duplo major ſit quam ſi non reflecterentur: manifeſtum eſt quod in Fluido, cujus particulæ vi omni Elaſtica aliaque omni vi reflexiva deſtituuntur, corpus Sphæricum reſiſtentiam duplo minorem patietur; adeoque eandem velocitatis partem amittendo, duplo longius progredietur quam pro conſtructione Problematis hujus ſuperius allata.

Corol. 3. Et ſi particularum vis reflexiva neque maxima ſit neque omnino nulla, ſed mediocrem aliquam rationem teneat: reſiſtentia pariter, inter limites in conſtructione Problematis & Corollario ſuperiore poſitos, mediocrem rationem tenebit.

Corol. 4. Cum corpora tarda paulo magis reſiſtantur quam pro ratione duplicata velocitatis: hæc deſcribendo longitudinem quamvis *CZ* amittent majorem motus ſui partem, quam quæ ſit ad motum ſuum totum ut *CT* ad *CR*.

Corol. 5. Cognita autem reſiſtentia corporum celerrimorum, innoteſcet etiam reſiſtentia tardorum; ſi modo lex decrementi reſiſtentiæ pro ratione velocitatis inveniri poteſt.

Prop. XXXVII. Prob. IX.

Aquæ de vaſe dato per foramen effluentis definire motum.

Si vas impleatur aqua, & in fundo perforetur ut aqua per foramen defluat, manifeſtum eſt quod vas ſuſtinebit pondus aquæ totius, dempto pondere partis illius quod foramini perpendiculariter imminet. Nam ſi foramen obſtaculo aliquo occluderetur, obſtaculum ſuſtineret pondus aquæ ſibi perpendiculariter incumbentis, & fundum vaſis ſuſtineret pondus aquæ reliquæ. Sublato autem obſtaculo, fundum vaſis eadem aquæ preſſione eodemve ipſius pondere urgebitur ac prius; & pondus quod obſtaculum ſuſtinebat, cum jam non ſuſtineatur, faciet ut aqua deſcendat & per foramen defluat.

Unde conſequens eſt, quod motus aquæ totius effluentis is erit quem pondus aquæ foramini perpendiculariter incumbentis generare poſſit. Nam aquæ particula unaquæque pondere ſuo, quatenus non impeditur, deſcendit, idque motu uniformiter accelerato; & quatenus impeditur, urgebit obſtaculum. Obſtaculum illud vel vaſis eſt fundum, vel aqua inferior defluens; & propterea ponderis pars illa, quam vaſis fundum non ſuſtinet, urgebit aquam defluentem & motum ſibi proportionalem generabit.

Deſignet igitur F aream foraminis, A altitudinem aquæ foramini perpendiculariter incumbentis, P pondus ejus, AF quantitatem ejus, S ſpatium quod dato quovis tempore T in vacuo libere cadendo deſcriberet, & V velocitatem quam in fine temporis illius cadendo acquiſierit: & motus ejus acquiſitus $AF \times V$ æqualis erit motui aquæ totius eodem tempore effluentis. Sit velocitas quacum effluendo exit de foramine, ad velocitatem V ut d ad e; & cum aqua velocitate V deſcribere poſſet ſpatium $2S$, aqua effluens eodem tempore, velocitate ſua $\frac{d}{e}V$, deſcribere poſſet ſpatium $\frac{2d}{e}S$. Et propterea columna aquæ cujus longitudo ſit

ſit

ſit $\frac{2d}{e}S$ & latitudo eadem quæ foraminis, poſſet eo tempore defluendo egredi de vaſe, hoc eſt columna $\frac{2d}{e}SF$. Quare motus $\frac{2dd}{ee}SFV$, qui fiet ducendo quantitatem aquæ effluentis in velocitatem ſuam, hoc eſt motus omnis tempore effluxus illius genitus, æquabitur motui $AF \times V$. Et ſi æquales illi motus applicenter ad FV; fiet $\frac{2dd}{ee}S$ æqualis A. Unde eſt dd ad ee ut A ad $2S$, & d ad e in dimidiata ratione $\frac{1}{2}A$ ad S. Eſt igitur velocitas quacum aqua exit e foramine, ad velocitatem quam aqua cadens, & tempore T cadendo deſcribens ſpatium S acquireret, ut altitudo aquæ foramini perpendiculariter incumbentis, ad medium proportionale inter altitudinem illam duplicatam & ſpatium illud S, quod corpus tempore T cadendo deſcriberet.

Igitur ſi motus illi ſurſum vertantur; quoniam aqua velocitate V aſcenderet ad altitudinem illam S de qua deciderat; & altitudines (uti notum eſt) ſint in duplicata ratione velocitatum: aqua effluens aſcenderet ad altitudinem $\frac{1}{2}A$. Et propterea quantitas aquæ effluentis, quo tempore corpus cadendo deſcribere poſſet altitudinem $\frac{1}{2}A$, æqualis erit columnæ aquæ totius AF foramini perpendiculariter imminentis.

Cum autem aqua effluens, motu ſuo ſurſum verſo, perpendiculariter ſurgeret ad dimidiam altitudinem aquæ foramini incumbentis; conſequens eſt quod ſi egrediatur oblique per canalem in latus vaſis, deſcribet in ſpatiis non reſiſtentibus Parabolam cujus latus rectum eſt altitudo aquæ in vaſe ſupra canalis orificium, & cujus diameter horizonti perpendicularis ab orificio illo ducitur, atque ordinatim applicatæ parallelæ ſunt axi canalis.

Hæc omnia de Fluido ſubtiliſſimo intelligenda ſunt. Nam ſi aqua ex partibus craſſioribus conſtet, hæc tardius effluet quam pro ratione ſuperius aſſignata, præſertim ſi foramen anguſtum ſit per quod effluit.

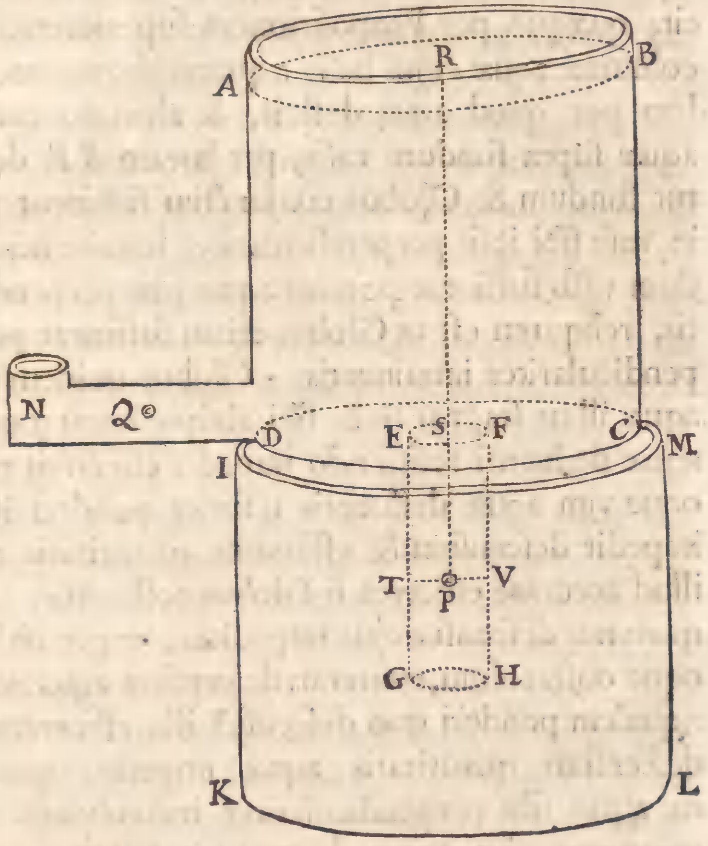
Denique ſi aqua per canalem horizonti parallelum egrediatur; quoniam fundum vaſis integrum eſt, & eadem aquæ incumbentis preſſione ubique urgetur ac ſi aqua non efflueret; vas ſuſtinebit pondus aquæ totius, non obſtante effluxu, ſed latus vaſis de quo effluit non ſuſtinebit preſſionem illam omnem, quam ſuſtineret ſi aqua non efflueret. Tolletur enim preſſio partis illius ubi perforatur: quæ quidem preſſio æqualis eſt ponderi columnæ aquæ, cujus baſis foramini æquatur & altitudo eadem eſt quæ aquæ totius ſupra foramen. Et propterea ſi vas, ad modum corporis penduli, filo prælongo a clavo ſuſpendatur, hoc, ſi aqua in plagam quamvis ſecundum lineam horizontalem effluit, recedet ſemper a perpendiculo in plagam contrariam. Et par eſt ratio motus pilarum, quæ Pulvere tormentario madefacto implentur, &, materia in flammam per foramen paulatim expirante, recedunt a regione flammæ & in partem contrariam cum impetu feruntur.

Prop. XXXVIII. Theor. XXIX.

Corporum Sphæricorum in Mediis quibuſque Fluidiſſimis reſiſtentiam in anteriore ſuperficie definire.

Defluat aqua de vaſe Cylindrico $ABCD$, per canalem Cylindricum $EFGH$, in vas inferius $IKLM$; & inde effluat per vaſis marginem IM. Sit autem margo ille ejuſdem altitudinis cum vaſis ſuperioris fundo CD, eo ut aqua per totum canalem uniformi cum motu deſcendat; & in medio canalis collocetur Globus P, ſitque PR altitudo aquæ ſupra Globum, & SR ejuſdem altitudo ſupra fundum vaſis. Suſtineatur autem Globus filo tenuiſſimo TV, lateribus canalis hinc inde affixo. Et manifeſtum eſt per proportionem ſuperiorem, quod quantitas aquæ dato tempore defluentis erit ut amplitudo foraminis per quod defluit; hoc eſt, ſi Globus tollatur, ut canalis orificium: ſin Globus adſit, ut ſpatium undique inter Globum & canalem. Nam velocitas aquæ defluentis (per ſuperiorem Propoſitionem) ea erit quam

quam corpus cadendo, & caſu ſuo deſcribendo dimidiam aquæ altitudinem *SR*, acquirere poſſet: adeoque eadem eſt ſive Globus tollatur, ſive adſit. Et propterea aqua defluens erit ut amplitudo ſpatii per quod tranſit. Certe tranſitus aquæ per ſpatium anguſtius facilior eſſe nequit quam per ſpatium amplius, & propterea velocitas ejus ubi Globus adeſt, non poteſt eſſe major quam cum tollitur: ideoque major aquæ quantitas, ubi Globus adeſt, non effluet quam pro ratione ſpatii per quod tranſit. Si aqua non ſit liquor ſubtiliſſimus & fluidiſſimus, hujus tranſitus per ſpatium anguſtius, ob craſſitudinem particularum, erit aliquanto tardior: at liquorem fluidiſſimum eſſe hic ſupponimus. Igitur quantitas aquæ, cujus deſcenſum Globus dato tempore impedit, eſt ad quantitatem aquæ quæ, ſi Globus tolleretur, eodem tempore deſcenderet, ut baſis Cylindri circa Globum deſcripti ad orificium canalis; ſive ut quadratum diametri Globi ad quadratum diametri cavitatis canalis. Et propterea quantitas aquæ cujus deſcenſum Globus impedit, æqualis eſt quantitati aquæ, quæ eodem tempore



tempore per foramen circulare in fundo vaſis, baſi Cylindri illius æquale, deſcendere poſſet, & cujus deſcenſus per fundi partem quamvis circularem baſi illi æqualem impeditur.

Jam vero pondus aquæ, quod vas & Globus conjunctim ſuſtinent, eſt pondus aquæ totius in vaſe, præter partem illam quæ aquam defluentem accelerat, & ad ejus motum generandum ſufficit, quæque, per Propoſitionem ſuperiorem, æqualis eſt ponderi columnæ aquæ cujus baſis æquatur ſpatio inter Globum & canalem per quod aqua defluit, & altitudo eadem cum altitudine aquæ ſupra fundum vaſis, per lineam *S R* deſignata. Vaſis igitur fundum & Globus conjunctim ſuſtinent pondus aquæ totius in vaſe ſibi ipſis perpendiculariter imminentis. Unde cum fundum vaſis ſuſtineat pondus aquæ ſibi perpendiculariter imminentis, reliquum eſt ut Globus etiam ſuſtineat pondus aquæ ſibi perpendiculariter imminentis. Globus quidem non ſuſtinet pondus aquæ illius ſtagnantis & ſibi abſque omni motu incumbentis, ſed aquæ defluenti reſiſtendo impedit effectum tanti ponderis; adeoque vim aquæ defluentis ſuſtinet ponderi illi æqualem. Nam impedit deſcenſum & effluxum quantitatis aquæ quem pondus illud accurate efficeret ſi Globus tolleretur. Aqua pondere ſuo, quatenus deſcenſus ejus impeditur, urget obſtaculum omne, ideoque obſtaculum, quatenus deſcenſum aquæ impedit, vim ſuſtinet æqualem ponderi quo deſcenſus ille efficeretur. Globus autem deſcenſum quantitatis aquæ impedit, quem pondus columnæ aquæ ſibi perpendiculariter incumbentis efficere poſſet; & propterea vim aquæ decurrentis ſuſtinet ponderi illi æqualem. Actio & reactio aquæ per motus Legem tertiam æquantur inter ſe, & in plagas contrarias diriguntur. Actio Globi in aquam deſcendentem, ad ejus deſcenſum impediendum, in ſuperiora dirigitur, & eſt ut deſcendendi motus impeditus, eique tollendo adæquate ſufficit: & propterea actio contraria aquæ in Globum æqualis eſt vi quæ motum eundem vel tollere vel generare poſſit,

hoc

hoc eſt ponderi columnæ aquæ, quæ Globo perpendiculariter imminet & cujus altitudo eſt *RS*.

Si jam canalis orificium ſuperius obſtruatur, ſic ut aqua deſcendere nequeat, Globus quidem, pondere aquæ in canali & vaſe inferiore *IKLM* ſtagnantis, premetur undique; ſed non obſtante preſſione illa, ſi ejuſdem ſit ſpecificæ gravitatis cum aqua, quieſcet. Preſſio illa Globum nullam in partem impellet. Et propterea ubi canalis aperitur & aqua de vaſe ſuperiore deſcendit, vis omnis, qua Globus impellitur deorſum, orietur ab aquæ illius deſcenſu, atque adeo æqualis erit ponderi columnæ aquæ, cujus altitudo eſt *RS* & diameter eadem quæ Globi. Pondus autem iſtud, quo tempore data quælibet aquæ quantitas, per foramen baſi Cylindri circa Globum deſcripti æquale, ſublato Globo effluere poſſet, ſufficit ad ejus motum omnem generandum; atque adeo quo tempore aqua in Cylindro uniformiter decurrendo deſcribit duas tertias partes diametri Globi, ſufficit ad motum omnem aquæ Globo æqualis generandum. Nam Cylindrus aquæ, latitudine Globi & duabus tertiis partibus altitudinis deſcriptus, Globo æquatur. Et propterea aquæ currentis impetus in Globum quieſcentem, quo tempore aqua currendo deſcribit duas tertias partes diametri Globi, ſi uniformiter continuetur, generaret motum omnem partis Fluidi quæ Globo æquatur.

Quæ vero de aqua in canali demonſtrata ſunt, intelligenda ſunt etiam de aqua quacunque fluente, qua Globus quilibet in ea quieſcens urgetur. Quæque de aqua demonſtrata ſunt obtinent etiam in Fluidis univerſis ſubtiliſſimis. De his omnibus idem valet argumentum.

Jam vero per Legum Corol. 5, vis Fluidi in Globum eadem eſt, ſive Globus quieſcat & Fluidum uniformi cum velocitate moveatur, ſive Fluidum quieſcat & Globus eadem cum velocitate in partem contrariam pergat. Et propterea reſiſtentia Globi in Medio quocunque Fluidiſſimo uniformiter progredientis, quo tempore Globus duas tertias partes diametri ſuæ deſcribit, æqualis

lis eſt vi, quæ in corpus ejuſdem magnitudinis cum Globo & ejuſdem denſitatis cum Medio uniformiter impreſſa, quo tempore Globus duas tertias partes diametri ſuæ progrediendo deſcribit, velocitatem Globi in corpore illo generare poſſet. Tanta eſt reſiſtentia Globi in ſuperficiei parte præcedente. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si ſolidum Sphæricum in ejuſdem ſecum denſitatis Fluido ſubtiliſſimo libere moveatur, & inter movendum eadem vi urgeatur a tergo atque cum quieſcit; ejuſdem reſiſtentia ea erit quam in Corollario ſecundo Propoſitionis xxxvi. deſcripſimus. Unde ſi computus ineatur, patebit quod ſolidum dimidiam motus ſui partem prius amittet, quam progrediendo deſcripſerit longitudinem diametri propriæ; Quod ſi inter movendum minus urgeatur a tergo, magis retardabitur: & contra, ſi magis urgeatur, minus retardabitur.

Corol. 2. Hallucinantur igitur qui credunt reſiſtentiam projectilium per infinitam diviſionem partium Fluidi in infinitum diminui. Si Fluidum ſit valde craſſum, minuetur reſiſtentia aliquantulum per diviſionem partium ejus. At poſtquam competentem Fluiditatis gradum acquiſiverit, (qualis forte eſt Fluiditas Aeris vel aquæ vel argenti vivi) reſiſtentia in anteriore ſuperficie ſolidi, per ulteriorem partium diviſionem non multum minuetur. Nunquam enim minor futura eſt quam pro limite quem in Corollario ſuperiore aſſignavimus.

Corol. 3. Media igitur in quibus corpora projectilia ſine ſenſibili motus diminutione longiſſime progrediuntur, non ſolum Fluidiſſima ſunt, ſed etiam longe rariora quam ſunt corpora illa quæ in ipſis moventur: niſi forte quis dixerit Medium omne Fluidiſſimum, impetu perpetuo in poſticam projectilis partem facto, tantum promovere motum ejus quantum impedit & reſiſtit in parte antica. Et motus quidem illius, quem projectile imprimit in Medium, partem aliquam a Medio circulariter lato reddi corpori a tergo veriſimile eſt. Nam & experimentis quibuſdam factis, reperi quod in Fluidis ſatis compreſſis pars aliqua redditur.

Omnem

Omnem vero in caſu quocunque reddi nec rationi conſentaneum videtur, neque cum experimentis hactenus a me tentatis bene quadrat. Fluidorum enim utcunque ſubtilium, ſi denſa ſint, vim ad ſolida movenda reſiſtendaque permagnam eſſe, & quomodo vis illius quantitas per experimenta determinetur, plenius patebit per Propoſitiones duas quæ ſequuntur.

Lemmma IV.

Si vas Sphæricum Fluido homogeneo quieſcente plenum a vi impreſſa moveatur in directum, motuque progreſſivo ſemper accelerato ita pergat ut interea non moveatur in orbem: partes Fluidi incluſi, æqualiter participando motum vaſis, quieſcent inter ſe. Idem obtinebit in vaſe figuræ cujuſcunque. Res manifeſta eſt, nec indiget demonſtratione.

Prop. XXXIX. Theor. XXX.

Fluidum omne quod motu accelerato ad modum venti increbeſcentis progreditur, & cujus partes inter ſe quieſcunt, rapit omnia ejuſdem denſitatis innatantia corpora, & ſecum cum eadem velocitate defert.

Nam per Lemma ſuperius ſi vas Sphæricum, rigidum, Fluidoque homogeneo quieſcente plenum, motu paulatim impreſſo progrediatur; Fluidi motum vaſis participantis partis omnes ſemper quieſcent inter ſe. Ergo ſi Fluidi partes aliquæ congelarentur, pergerent hæ quieſcere inter partes reliquas. Nam quoniam partes omnes quieſcunt inter ſe, perinde eſt ſive fluidæ ſint, ſive aliquæ earum rigeſcant. Ergo ſi vas a vi aliqua extrinſecus impreſſa moveatur, & motum ſuum imprimat in Fluidum: Fluidum quoque motum ſuum imprimet in ſui ipſius partes congelatas eaſque ſecum rapiet. Sed partes illæ congelatæ ſunt corpora ſolida ejuſdem denſitates cum Fluido; & par eſt ratio Fluidi, ſive id in vaſe moto claudatur, ſive in ſpatiis liberis ad modum venti

ſpiret. Ergo Fluidum omne quod motu progreſſivo accelerato fertur, & cujus partes inter ſe quieſcunt, ſolida quæcunque ejuſdem denſitatis incluſa, quæ ſub initio quieſcebant, rapit ſecum, & una moveri cogit. *Q. E. D.*

Prop. XL. Prob. X.

Invenire reſiſtentiam ſolidorum Sphæricorum in Mediis Fluidiſſimis denſitate datis.

In Fluido quocunque dato inveniatur reſiſtentia ultima ſolidi ſpecie dati, cujus magnitudo in infinitum augetur. Dein dic: ut ejus motus amiſſus, quo tempore progrediendo longitudinem ſemidiametri ſuæ deſcribit, eſt ad ejus motum totum ſub initio, ita motus quem ſolidum quodvis datum, in Fluido eodem jam facto ſubtiliſſimo, deſcribendo diametri ſuæ longitudinem amitteret, eſt ad ejus motum totum ſub initio quamproxime. Nam ſi particulæ minimæ Fluidi ſubtiliati eandem habeant proportionem eundemque ſitum ad ſolidum datum in eo movens, quem particulæ totidem minimæ Fluidi non ſubtiliati habent ad ſolidum auctum; ſintque particulæ Fluidi utriuſq; ſumme lubricæ, & viribus centrifugis centripetiſque omnino deſtituantur; incipiant autem ſolida temporibus quibuſcunque proportionalibus in his Fluidis ſimiliter moveri: pergent eadem ſimiliter moveri, adeoque quo tempore deſcribunt ſpatia ſemidiametris ſuis æqualia, amittent partes motuum proportionales totis; idque licet partes Medii ſubtiliati minuantur, & magnitudo ſolidi in Medio non ſubtiliato moventis augeatur in infinitum. Ergo ex reſiſtentia ſolidi aucti in Medio non ſubtiliato, dabitur per proportionem ſuperiorem reſiſtentia ſolidi non aucti in Medio ſubtiliato. *Q. E. I.*

Si particulæ non ſunt ſumme lubricæ, ſupponendum eſt quod in utroq; Fluido ſunt æqualiter lubricæ, eo ut ex defectu lubricitatis reſiſtentia utrinq; æqualiter augeatur: & Propoſitio etiamnum valebit.

Corol. 1.

Corol. 1. Ergo ſi ex aucta ſolidi Sphærici magnitudine augeatur ejus reſiſtentia in ratione duplicata; reſiſtentia ſolidi Sphærici dati ex diminuta magnitudine particularum Fluidi, nullatenus minuetur.

Corol. 2. Sin reſiſtentia, augendo ſolidum Sphæricum, augeatur in minore quam duplicata ratione diametri: eadem diminuendo particulas Fluidi, diminuetur in ratione qua reſiſtentia aucta deficit a ratione duplicata diametri.

Corol. 3. Unde perſpicuum eſt quod ſolidi dati reſiſtentia per diviſionem partium Fluidi non multum diminui poteſt. Nam reſiſtentia ſolidi aucti debebit eſſe quam proxime ut quantitas materiæ fluidæ reſiſtentis, quam ſolidum illud movendo protrudit & a locis a ſe invaſis & occupatis propellit: hoc eſt ut ſpatium Cylindricum per quod ſolidum movetur, adeoque in duplicata ratione ſemidiametri ſolidi quamproxime.

Corol. 4. Igitur propoſitis duobus Fluidis, quorum alterum ab altero quoad vim reſiſtendi longiſſime ſuperatur: Fluidum quod minus reſiſtit eſt altero rarius; ſuntque Fluidorum omnium vires reſiſtendi prope ut eorum denſitates; præſertim ſi ſolida ſint magna, & velociter moveantur, & Fluidorum æqualis ſit compreſſio.

Scholium Generale.

Quæ hactenus demonſtrata ſunt tentavi in hunc modum. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{7}{22}$, diametro digitorum *Londinenſium* $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco ſatis firmo ſuſpendi, ita ut inter uncum & centrum oſcillationis Globi diſtantia eſſet pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & uncia una a centro ſuſpenſionis diſtans; & e regione puncti illius collocavi Regulam in digitos diſtinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum a Pendulo deſcriptas. Deinde numeravi oſcillationes quibus Globus quartam motus ſui partem amitteret. Si pendulum deducebatur a perpendiculo ad di-

ſtantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto ſuo deſcenſu deſcriberet arcum duorum digitorum, totaque oſcillatione prima, ex deſcenſu & aſcenſu ſubſequente compoſita, arcum digitorum fere quatuor: idem oſcillationibus 164 amiſit octavam motus ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum quatuor, amiſit octavam motus partem oſcillationibus 121; ita ut aſcenſu ultimo deſcribaret arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum octo, ſexdecim, triginta duorum vel ſexaginta quatuor, amiſit octavam motus partem oſcillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$ reſpective. Igitur differentia inter arcus deſcenſu primo & aſcenſu ultimo deſcriptos, erat in caſu primo, ſecundo, tertio, quarto, quinto, ſexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 reſpective. Dividantur eæ differentiæ per numerum oſcillationum in caſu unoquoque; & in oſcillatione una mediocri, qua arcus digitorum $3\frac{3}{4}$ $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 deſcriptus fuit, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum, erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti reſpective. Hæ autem in majoribus oſcillationibus ſunt in duplicata ratione arcuum deſcriptorum quam proxime; in minoribus vero paulo majores quam in ea ratione, & propterea (per Corol. 2. Prop. xxxi. Libri hujus) reſiſtentia Globi, ubi celerius movetur, eſt in duplicata ratione velocitatis quamproxime; ubi tardius, paulo major quam in ea ratione: omnino ut in Corollariis Propoſitionis xxxii. demonſtratum eſt.

Deſignet jam V velocitatem maximam in oſcillatione quavis, ſintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum ſit $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$. Et cum velocitates maximæ in prædictis ſex Caſibus, ſint ut arcuum dimidiorum $1\frac{7}{8}$, $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60 chordæ, atque adeo ut arcus ipſi quamproxime, hoc eſt ut numeri $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16: ſcribamus in Caſu ſecundo quarto & ſexto numeros 1, 4, & 16 pro V; & prodibit arcuum differentia $\frac{1}{242}$ æqualis $A + B + C$ in Caſu ſecundo; & $\frac{2}{35\frac{1}{2}}$ æqualis $4A + 8B + 16C$ in

in caſu quarto; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ æqualis $16A+64B+256C$ in caſu ſexto. Unde ſi per has æquationes determinemus quantitates A, B, C; habebimus Regulam inveniendi differentiam arcuum pro velocitate quacunque data.

Cæterum cum velocitates maximæ ſint in Cycloide ut arcus oſcillando deſcripti, in circulo vero ut ſemiſſium arcuum illorum chordæ, adeoque paribus arcubus majores ſint in Cycloide quam in circulo, in ratione ſemiſſium arcuum ad eorundem chordas; tempora autem in circulo ſint majora quam in Cycloide in velocitatis ratione reciproca: ut ex reſiſtentia in circulo inveniatur reſiſtentia in Trochoide, debebit reſiſtentia augeri in duplicata circiter ratione arcus ad chordam, ob velocitatem in ratione illa ſimplici auctam; & diminui in ratione chordæ ad arcum, ob tempus (ſeu durationem reſiſtentiæ qua arcuum differentia prædicta generatur) diminutum in eadem ratione: id eſt (ſi rationes conjungamus) debebit reſiſtentia augeri in ratione arcus ad chordam circiter. Hæc ratio in caſu ſecundo eſt 6283 ad 6279, in quarto 12565 ad 12533, in ſexto 25132 ad 24869. Et inde reſiſtentia $\frac{1}{242}$, $\frac{2}{35\frac{1}{2}}$, & $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ evadunt $\frac{6283}{6279 \times 242}$, $\frac{25132}{12533 \times 35\frac{1}{2}}$ & $\frac{201056}{24869 \times 9\frac{2}{3}}$, id eſt in numeris decimalibus 0,004135, 0,056486 & 0,8363. Unde prodeunt æquationes $A+B+C=0,004135$: $4A+8B+16C=0,05648$ & $16A+64B+256C=0,8363$. Et ex his per debitam terminorum collationem & reductionem Analyticam fit $A=0,0002097$, $B=0,0008955$ & $C=0,0030298$. Eſt igitur differentia arcuum ut $0,0002097\,V + 0,0008955\,V^{\frac{2}{3}} + 0,0030298\,V^2$: & propterea cum per Corol. Prop. XXX. reſiſtentia Globi in medio arcus oſcillando deſcripti, ubi velocitas eſt V, ſit ad ipſius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{16}{23}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem Penduli; ſi pro A, B & C ſcribantur numeri inventi, fiet reſiſtentia Globi ad ejus pondus, ut $0,0001334\,V + 0,000623\,V^{\frac{3}{2}} + 0,0022735\,V^2$ ad longitudinem Penduli inter centrum ſuſpenſionis & Regulam, id eſt ad 121 digitos. Unde cum V in

caſu

caſu ſecundo deſignet 1, in quarto 4, in ſexto 16: erit reſiſtentia ad pondus Globi in caſu ſecundo ut 0. 003029 ad 121, in quarto ut 0. 042875 ad 121, in ſexto ut 0. 63013 ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in Caſu ſexto deſcripſit, erat $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ ſeu $119\frac{5}{29}$ digitorum. Et propterea cum radius eſſet 121 digitorum, & longitudo penduli inter punctum ſuſpenſionis & centrum Globi eſſet 126 digitorum, arcus quem centrum Globi deſcripſit erat $124\frac{3}{31}$ digitorum. Quoniam corporis oſcillantis velocitas maxima ob reſiſtentiam Aeris non incidit in punctum infimum arcus deſcripti, ſed in medio fere loco arcus totius verſatur: hæc eadem erit circiter ac ſi Globus deſcenſu ſuo toto in Medio non reſiſtente deſcriberet arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{3}{62}$; idque in Cycloide, ad quam motum penduli ſupra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam Globus, perpendiculariter cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem arcus illius Sinui verſo æqualem, acquirere poſſet. Eſt autem ſinus ille verſus in Cycloide ad arcum iſtum $62\frac{3}{62}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis digitis 15, 278. Quare velocitas ea ipſa eſt quam corpus cadendo & caſu ſuo ſpatium 15, 278 digitorum deſcribendo acquirere poſſet. Unde cum corpus tempore minuti unius ſecundi cadendo (uti per experimenta pendulorum determinavit *Hugenius*) deſcribat pedes *Pariſienſes* $15\frac{1}{12}$, id eſt pedes *Anglicos* $16\frac{11}{24}$ ſeu digitos $197\frac{1}{2}$, & tempora ſint in dimidiata ratione ſpatiorum; Globus tempore minut. 16tert. 38quart. cadendo deſcribet 15, 278 digitos, & velocitatem ſuam prædictam acquiret; & propterea cum eadem velocitate uniformiter continuata deſcribet eodem tempore longitudinem duplam 30, 556 digitorum. Tali igitur cum velocitate Globus reſiſtentiam patitur, quæ ſit ad ejus pondus ut 0, 63013 ad 121, vel (ſi reſiſtentiæ pars illa ſola ſpectetur quæ eſt in velocitatis ratione duplicata) ut 0, 58172 ad 121.

Experimento autem Hydroſtatico inveni quod pondus Globi

hujus

hujus ligni eſſet ad pondus Globi aquei magnitudinis ejuſdem, ut 55 ad 97: & propterea cum 121 ſit ad 213, 4 in eadem ratione, erit reſiſtentia Globi aquei præfata cum velocitate progredientis ad ipſius pondus ut 0, 58172 ad 213, 4, id eſt ut 1 ad $366\frac{5}{6}$. Unde cum pondus Globi aquei, quo tempore Globus cum velocitate uniformiter continuata deſcribat longitudinem pedum 30,556, velocitatem illam omnem in Globo cadente generare poſſet; manifeſtum eſt quod vis reſiſtentiæ uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem minorem in ratione 1 ad $366\frac{5}{6}$, hoc eſt velocitatis totius partem $\frac{1}{366\frac{5}{6}}$. Et propterea quo tempore Globus, ea cum velocitate uniformiter continuata, longitudinem ſemidiametri ſuæ ſeu digitorum $3\frac{7}{16}$ deſcribere poſſet, eodem amitteret motus ſui partem $\frac{1}{3262}$.

Numerabam etiam oſcillationes quibus pendulum quartam motus ſui partem amiſit. In ſequente Tabula numeri ſupremi denotant longitudinem arcus deſcenſu primo deſcripti, in digitis & partibus digiti expreſſam: numeri medii ſignificant longitudinem arcus aſcenſu ultimo deſcripti, & loco infimo ſtant numeri oſcillationum. Experimentum deſcripſi tanquam magis accuratum quam cum motus pars tantum octava amitteretur. Calculum tentet qui volet.

Deſcenſus Primus	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Num. Oſcillat.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Poſtea Globum plumbeum, diametro digitorum duorum & pondere unciarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$, ſuſpendi filo eodem, ſic ut inter centrum Globi & punctum ſuſpenſionis intervallum eſſet pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oſcillationes quibus data motus pars amitteretur. Tabularum ſubſequentium prior exhibet numerum oſcillatio-

oſcillationum quibus pars octava motus totius ceſſavit; ſecunda numerum oſcillationum quibus ejuſdem pars quarta amiſſa fuit.

Deſcenſus primus	1	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Numerus Oſcillat.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

Deſcenſus primus	1	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oſcillat.	510	518	420	318	204	121	70

In Tabula priore ſeligendo ex obſervationibus tertiam, quintam & ſeptimam, & exponendo velocitates maximas in his obſervationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 reſpective, & generaliter per quantitatem V ut ſupra: emerget in obſervatione prima $\frac{1}{193} = A + B + C$, in ſecunda $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, in tertia $\frac{8}{30}$ æqu. $16A + 64B + 256C$. Quæ æquationes per reductiones ſuperius expoſitas dant, $A = 0{,}00145$, $B = 0{,}000247$ & $C = 0{,}0009$. Et inde prodit reſiſtentia Globi cum velocitate V moventis, in ea ratione ad pondus ſuum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0{,}000923V + 0{,}000172V^{\frac{3}{2}} + 0{,}000675V^2$ ad Penduli longitudinem 121 digitorum. Et ſi ſpectemus eam ſolummodo reſiſtentiæ partem quæ eſt in duplicata ratione velocitatis, hæc erit ad pondus Globi ut $0{,}000675V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars reſiſtentiæ in experimento primo ad pondus Globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$ ut $0{,}00227235V^2$ ad 121; & inde fit reſiſtentia Globi lignei ad reſiſtentiam Globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$ in $0{,}00227235$ ad $26\frac{1}{4}$ in $0{,}000675$, id eſt ut [illegible] ad [illegible] ſeu $7\frac{1}{3}$ ad 1. Diametri Globorum duorum erant 6[illegible] & 2 digitorum, & harum quadrata ſunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, ſeu 11[illegible] & 1 quamproxime. Ergo reſiſtentiæ

Globorum

Globorum æquivelocium erant in minore ratione quam duplicata diametrorum. At nondum conſideravimus reſiſtentiam fili, quæ certe permagna erat, ac de pendulorum inventa reſiſtentia ſubduci debet. Hanc accurate definire non potui, ſed majorem tamen inveni quam partem tertiam reſiſtentiæ totius minoris penduli, & inde didici quod reſiſtentiæ Globorum, dempta fili reſiſtentia, ſunt quamproxime in dimidiata ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, id eſt 7 ad $\frac{3}{2}$ ſeu $10\frac{1}{2}$ ad 1, non longe abeſt a diametrorum ratione duplicata $11\frac{13}{16}$ ad 1.

Cum reſiſtentia fili in Globis majoribus minoris ſit momenti, tentavi etiam experimentum in Globo cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis erat digitorum $122\frac{3}{4}$, inter punctum ſuſpenſionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli deſcenſu a nodo deſcriptus, 32 dig. arcus aſcenſu ultimo poſt oſcillationes quinque ab eodem nodo deſcriptus, 28 dig. Summa arcuum ſeu arcus totus oſcillatione mediocri deſcriptus, 30 dig. Differentia arcuum 4 dig. Ejus pars decima ſeu differentia inter deſcenſum & aſcenſum in oſcillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oſcillatione mediocri a Nodo deſcriptus, ad arcum totum $67\frac{1}{8}$, oſcillatione mediocri a centro Globi deſcriptum: & ita differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0,4475. Si longitudo penduli, manente longitudine arcus deſcripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$, velocitas ejus diminueretur in ratione illa dimidiata; & arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum differentia 0,4475 diminueretur in ratione velocitatis, adeoque evaderet 0,4412. Deinde ſi arcus deſcriptus augeretur in ratione $67\frac{1}{8}$ ad $124\frac{3}{31}$, differentia iſta 0,4412 augeretur in duplicata illa ratione, adeoque evaderet 1,509. Hæc ita ſe haberent, ex hypotheſi quod reſiſtentia Penduli eſſet in duplicata ratione velocitatis. Ergo ſi pendulum deſcriberet arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis eſſet 126 digitorum, differentia arcu-

um deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum foret 1, 509 dig. Et hæc differentia ducta in pondus Globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 313, 9. Rurſus ubi pendulum ſuperius ex Globo ligneo conſtructum, centro oſcillationis, quod a puncto ſuſpenſionis digitos 126 diſtabat, deſcribebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, differentia arcuum deſcenſu & aſcenſu deſcriptum fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ ſeu $\frac{25}{29}$, quæ ducta in pondus Globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 48, 55. Duxi autem differentias haſce in pondera Globorum ut invenirem eorum reſiſtentias. Nam differentiæ oriuntur ex reſiſtentiis, ſuntque ut reſiſtentiæ directe & pondera inverſe. Sunt igitur reſiſtentiæ ut numeri 313,9 & 48,55. Pars autem reſiſtentiæ Globi minoris, quæ eſt in duplicata ratione velocitatis, erat ad reſiſtentiam totam ut 0,58172 ad 0,63013, id eſt ut 44,4 ad 48,55; & pars reſiſtentiæ Globi majoris propemodum æquatur ipſius reſiſtentiæ toti, adeoque partes illæ ſunt ut 313,9 & 44,4 quamproxime, id eſt ut 7,07 ad 1. Sunt autem Globorum diametri $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{1}{2}$ & $47\frac{17}{64}$ ſunt ut 7,438 & 1, id eſt ut Globorum reſiſtentiæ 7,07 & 1 quamproxime. Differentia rationum haud major eſt quam quæ ex fili reſiſtentia oriri potuit. Igitur reſiſtentiarum partes illæ quæ ſunt (paribus Globis) ut quadrata velocitatum, ſunt etiam (paribus velocitatibus) ut quadrata diametrorum Globorum; & propterea (per Corollaria Prop. XL. Libri hujus) reſiſtentia quam Globi majores & velociores in aere movendo ſentiunt, haud multum per infinitam aeris diviſionem & ſubtiliationem diminui poteſt, proindeque Media omnia in quibus corpora multo minus reſiſtuntur, ſunt aere rariora.

Cæterum Globorum, quibus uſus ſum in his experimentis, maximus non erat perfecte Sphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quaſdam brevitatis gratia neglexi; de calculo accurato in experimento non ſatis accurato minime ſollicitus. Optarim itaque (cum demonſtratio vacui ex his dependeat) ut experimenta

perimenta cum Globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si Globi ſumantur in proportione Geometrica, puta quorum diametri ſint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progreſſione experimentorum colligetur quid in Globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam vero conferendo reſiſtentias diverſorum fluidorum inter ſe tentavi ſequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aqua fontana, fecique ut immerſa pendula in medio aquæ oſcillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $16\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum, movebatur ut in Tabula ſequente deſcripſimus, exiſtente videlicet longitudine penduli a puncto ſuſpenſionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oſcillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

Arcus deſcenſu primo a puncto in filo notato deſcriptus digitorum.	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus digitorum.	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia motui amiſſo proportionalis, digitorum.	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus oſcillationum in aqua.			$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Numerus oſcillationum in aere.	$35\frac{1}{2}$		287	535					

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oſcillationibus 535 in aere, & $1\frac{1}{5}$ in aqua amiſſi ſunt. Erant autem oſcillationes in aere paulo celeriores quam in aqua, nimirum in ratione 44 ad 41. Nam $14\frac{2}{3}$ oſcillationes in aqua, & $15\frac{2}{3}$ in aere ſimul peragebantur. Et propterea ſi oſcillationes in aqua in ea ratione accelerarentur ut motus pendulorum in Medio utroque fierent æquiveloces, numerus oſcillationum $1\frac{1}{5}$ in aqua, quibus motus idem ac prius amitteretur (ob reſiſtentiam auctam in ratione illa duplicata & tempus diminutum in ratione eadem ſimplici)

plici) diminueretur in eadem illa ratione 44 ad 41, adeoque evaderet $1\frac{1}{5}$ in $\frac{41}{44}$ ſeu $\frac{123}{110}$. Paribus igitur Pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oſcillationibus 535 & in aqua oſcillationibus $\frac{123}{110}$ amiſſi ſunt; ideoque reſiſtentia penduli in aqua eſt ad ejus reſiſtentiam in aere ut 535 ad $\frac{123}{110}$. Hæc eſt proportio reſiſtentiarum totarum in Caſu columnæ quartæ.

Deſignet jam $AV+CV^2$ reſiſtentiam Globi in aere cum velocitate V moventis, & cum velocitas maxima, in Caſu columnæ quartæ, ſit ad velocitatem maximam in caſu columnæ primæ ut 1 ad 8, & reſiſtentia in Caſu columnæ quartæ ad reſiſtentiam in Caſu columnæ primæ in ratione arcuum differentiæ in his caſibus, ad numeros oſcillationum applicatæ, id eſt ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, ſeu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: ſcribamus in his Caſibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro reſiſtentiis, & fiet $A+C=85\frac{1}{2}$ & $8A+64C=4280$ ſeu $A+8C=535$, indeque per reductionem æquationum proveniet $7C=449\frac{1}{2}$ & $C=64\frac{3}{14}$ & $A=21\frac{2}{7}$; atque adeo reſiſtentia ut $21\frac{2}{7}V+64\frac{3}{14}V^2$ quamproxime. Quare in Caſu columnæ quartæ ubi velocitas erat 1, reſiſtentia tota eſt ad partem ſuam quadrato velocitatis proportionalem, ut $21\frac{2}{7}+64\frac{3}{14}$ ſeu $85\frac{1}{2}$, ad $64\frac{3}{14}$; & idcirco reſiſtentia penduli in aqua eſt ad reſiſtentiæ partem illam in aere quæ quadrato velocitatis proportionalis eſt, quæque ſola in motibus velocioribus conſideranda venit, ut $85\frac{1}{2}$ ad $64\frac{3}{14}$ & 535 ad $\frac{123}{110}$ conjunctim, id eſt ut 637 ad 1. Si penduli in aqua oſcillantis filum totum fuiſſet immerſum, reſiſtentia ejus fuiſſet adhuc major; adeo ut penduli in aere oſcillantis reſiſtentia illa quæ velocitatis quadrato proportionalis eſt, quæque ſola in corporibus velocioribus conſideranda venit, ſit ad reſiſtentiam ejuſdem penduli totius, eadem cum velocitate in aqua oſcillantis, ut 800 vel 900 ad 1 circiter, hoc eſt ut denſitas aquæ ad denſitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo ſumi quoque deberet pars illa reſiſtentiæ penduli in aqua, quæ eſſet ut quadratum velocitatis, ſed (quod mirum

rum

rum forte videatur) reſiſtentia in aqua augebatur in ratione velocitatis pluſquam duplicata. Ejus rei cauſam inveſtigando, in hanc incidi, quod Arca nimis anguſta eſſet pro magnitudine Globi penduli, & motum aquæ cedentis præ anguſtia ſua nimis impediebat. Nam ſi Globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur, reſiſtentia augebatur in duplicata ratione velocitatis quamproxime. Id tentabam conſtruendo pendulum ex Globis duobus, quorum inferior & minor oſcillaretur in aqua, ſuperior & major proxime ſupra aquam filo affixus eſſet, & in Aere oſcillando, adjuvaret motum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo inſtituta ſe habebant ut in Tabula ſequente deſcribitur.

Arcus deſcenſu primo deſcriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus.	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum diff. motui amiſſo proportionalis	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oſcillationum	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Reſiſtentia hic nunquam augetur in ratione velocitatis pluſquam duplicata. Et idem in pendulo majore evenire veriſimile eſt, ſi modo Arca augeatur in ratione penduli. Debebit tamen reſiſtentia tam in aere quam in aqua, ſi velocitas per gradus in infinitum augeatur, augeri tandem in ratione paulo pluſquam duplicata, propterea quod in experimentis hic deſcriptis reſiſtentia minor eſt quam pro ratione de corporibus velociſſimis in Libri hujus Prop. xxxvi & xxxviii. demonſtrata. Nam corpora longe velociſſima ſpatium a tergo relinquent vacuum, ideoque reſiſtentia quam ſentiunt in partibus præcedentibus, nullatenus minuetur per preſſionem Medii in partibus poſticis.

Conferendo reſiſtentias Mediorum inter ſe, effeci etiam ut pendula ferrea oſcillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quaſi trium, & diameter Globi penduli quaſi tertia

pars

pars digiti. Ad filum autem proxime ſupra Mercurium affixus erat Globus alius plumbeus ſatis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vaſculum, quod capiebat quaſi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aqua communi, ut pendulo in Fluido utroque ſucceſſive oſcillante invenirem proportionem reſiſtentiarum: & prodiit reſiſtentia argenti vivi ad reſiſtentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id eſt ut denſitas argenti vivi ad denſitatem aquæ. Ubi Globum pendulum paulo majorem adhibebam, puta cujus diameter eſſet quaſi $\frac{1}{2}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat reſiſtentia argenti vivi in ea ratione ad reſiſtentiam aquæ quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum eſt, propterea quod in his ultimis vas nimis anguſtum fuit pro magnitudine Globi immerſi. Ampliato Globo, deberet etiam vas ampliari. Conſtitueram quidem hujuſmodi experimenta in vaſis majoribus & in liquoribus tum Metallorum fuſorum, tum aliis quibuſdam tam calidis quam frigidis repetere: ſed omnia experiri non vacat, & ex jam deſcriptis ſatis liquet reſiſtentiam corporum celeriter motorum denſitati Fluidorum in quibus moventur proportionalem eſſe quamproxime. Non dico accurate. Nam Fluida tenaciora pari denſitate proculdubio magis reſiſtunt quam liquidiora, ut oleum frigidum quam calidum, calidum quam aqua pluvialis, aqua quam Spiritus vini. Verum in liquoribus qui ad ſenſum ſatis fluidi ſunt, ut in Aere, in aqua ſeu dulci ſeu ſalſa, in Spiritibus vini, Terebinthi & Salium, in Oleo a fœcibus per deſtillationem liberato & calefacto, Oleoque Vitrioli & Mercurio, ac Metallis liquefactis, & ſiqui ſint alii, qui tam Fluidi ſunt ut in vaſis agitati motum impreſſum diutius conſervent, effuſique liberrime in guttas decurrendo reſolvantur, nullus dubito quin regula allata ſatis accurate obtineat: præſertim ſi experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis inſtituantur.

Quare cum Globus aqueus in aere movendo reſiſtentiam patiatur qua motus ſui pars $\frac{1}{3261}$, interea dum longitudinem ſemidi-

ametri

ametri ſuæ deſcribat (ut jam ante oſtenſum eſt) tollatur, ſitque denſitas aeris ad denſitatem aquæ ut 800 vel 850 ad 1 circiter, conſequens eſt ut hæc Regula generaliter obtineat. Si corpus quodlibet Sphæricum in Medio quocunque ſatis Fluido moveatur, & ſpectetur reſiſtentiæ pars illa ſola quæ eſt in duplicata ratione velocitatis, hæc pars erit ad vim quæ totum corporis motum, interea dum corpus idem longitudinem duarum ipſius ſemidiametrorum motu illo uniformiter continuato deſcribat, vel tollere poſſet vel eundem generare, ut denſitas Medii ad denſitatem corporis quamproxime. Igitur reſiſtentia quaſi triplo major eſt quam pro lege in Corollario primo Propoſitionis xxxviii. allata; & propterea partes quaſi duæ tertiæ motus illius omnis quem Globi partes anticæ movendo imprimunt in Medium, reſtituuntur in Globi partes poſticas a Medio in orbem redeunte, inque ſpatium irruente quod Globus alias vacuum poſt ſe relinqueret. Unde ſi velocitas Globi euſque augeatur ut Medium non poſſet adeo celeriter in ſpatium illud irruere, quin aliquid vacui a tergo Globi ſemper relinquatur, reſiſtentia tandem evadet quaſi triplo major quam pro Regula generali noviſſime poſita.

Hactenus experimentis uſi ſumus oſcillantium pendulorum, eo quod eorum motus facilius & accuratius obſervari & menſurari poſſint. Motus autem pendulorum in gyrum actorum & in orbem redeundo circulos deſcribentium, propterea quod ſint uniformes & eo nomine ad inveſtigandam reſiſtentiam datæ velocitati competentem longe aptiores videantur, in conſilium etiam adhibui. Faciendo enim ut pendulum circulariter latum duodecies revolveretur, notavi magnitudines circulorum duorum, quos prima & ultima revolutione deſcripſit. Et inde collegi velocitates corporis ſub initio & fine. Tum dicendo quod corpus, velocitate mediocri deſcribendo circulos duodecim mediocres, amitteret velocitatum illarum differentiam, collegi reſiſtentiam qua differentia illa eo omni corporis per circulos duodecim itinere amitti poſſet; & reſiſtentia inventa, quanquam hujus generis experi-

menta

menta minus accurate tentare licuit, probe tamen cum præcedentibus congruebat.

Denique cum receptiſſima Philoſophorum ætatis hujus opinio ſit, Medium quoddam æthereum & longe ſubtiliſſimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrime permeet; a tali autem Medio per corporum poros fluente reſiſtentia oriri debeat: ut tentarem an reſiſtentia, quam in motis corporibus experimur, tota ſit in eorum externa ſuperficie, an vero partes etiam internæ in ſuperficiebus propriis reſiſtentiam notabilem ſentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis, ab unco chalybeo ſatis firmo, mediante annulo chalybeo, ſuſpendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad conſtituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus ſurſum præacutus erat acie concava, ut annulus arcu ſuo ſuperiore aciei innixus liberrime moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita conſtitutum deducebam a perpendiculo ad diſtantiam quaſi pedum ſex, idque ſecundum planum aciei unci perpendiculare, ne annulus, oſcillante Pendulo, ſupra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum ſuſpenſionis in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accurate notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demiſſo notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oſcillationis primæ, ſecundæ ac tertiæ. Hoc repetebam ſæpius, ut loca illa quam potui accuratiſſime invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, una cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. (Nam filum tenſum dimidio ponderis ſui pendulum a perpendiculo digreſſum ſemper urget.) Huic ponderi addebam pondus aeris quam pyxis capiebat. Et pondus totum erat quaſi pars ſeptuageſima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis Metallorum plena, pondere ſuo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam

bam filum ut penduli jam oſcillantis eadem eſſet longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum diſtracto ac dimiſſo, numerabam oſcillationes quaſi ſeptuaginta & ſeptem, donec pyxis ad locum ſecundo notatum rediret, totidemque ſubinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rurſus totidem donec pyxis reditu ſuo attingeret locum quartum. Unde concludo quod reſiſtentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad reſiſtentiam pyxidis vacuæ quam 78 ad 77. Nam ſi æquales eſſent ambarum reſiſtentiæ, pyxis plena ob vim ſuam inſitam ſeptuagies & octies majorem vi inſita pyxidis vacui, motum ſuum oſcillatorium tanto diutius conſervare deberet, atque adeo completis ſemper oſcillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oſcillationibus 77.

Deſignet igitur A reſiſtentiam pyxidis in ipſius ſuperficie externa, & B reſiſtentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & ſi reſiſtentiæ corporum æquivelocium in partibus internis ſint ut materia, ſeu numerus particularum quæ reſiſtuntur: erit $78\,B$ reſiſtentia pyxidis plenæ in ipſius partibus internis: adeoque pyxidis vacuæ reſiſtentia tota $A+B$ erit ad pyxidis plenæ reſiſtentiam totam $A+78\,B$ ut 77 ad 78, & diviſim $A+B$ ad $77\,B$ ut 77, ad 1, indeque $A+B$ ad B ut 77×77 ad 1, & diviſim A ad B ut 5928 ad 1. Eſt igitur reſiſtentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejuſdem reſiſtentia in externa ſuperficie, & amplius. Sic diſputamus ex hypotheſi quod major illa reſiſtentia pyxidis plenæ oriatur ab actione Fluidi alicujus ſubtilis in Metallum incluſum. At cauſam longe aliam eſſe opinor. Nam tempora oſcillationum pyxidis plenæ minora ſunt quam tempora oſcillationum pyxidis vacuæ, & propterea reſiſtentia pyxidis plenæ in externa ſuperficie major eſt, pro ipſius velocitate & longitudine ſpatii oſcillando deſcripti, quam ea pyxidis vacuæ. Quod cum ita ſit, reſiſtentia pyxidum in partibus internis aut nulla erit aut plane inſenſibilis.

 Hoc

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in qua illud aliquando deſcripſeram, intercidit. Unde fractas quaſdam numerorum partes, quæ memoria exciderunt, omittere compulſus ſum. Nam omnia denuo tentare non vacat. Prima vice, cum unco infirmo uſus eſſem, pyxis plena citius retardabatur. Cauſam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oſcillationibus obſequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum ſuſpenſionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti ſupra deſcripſimus.

Eadem methodo qua invenimus reſiſtentiam corporum Sphæricorum in Aqua & argento vivo, inveniri poteſt reſiſtentia corporum figurarum aliarum; & ſic Navium figuræ variæ in Typis exiguis conſtructæ inter ſe conferri, ut quænam ad navigandum aptiſſimæ ſint, ſumptibus parvis tentetur.

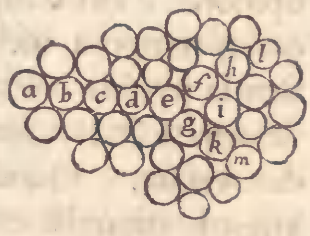
SECT. VIII.

De Motu per Fluida propagato.

Prop. XLI. Theor. XXXI.

Preſſio non propagatur per Fluidum ſecundum lineas rectas, niſi ubi particulæ Fluidi in directum jacent.

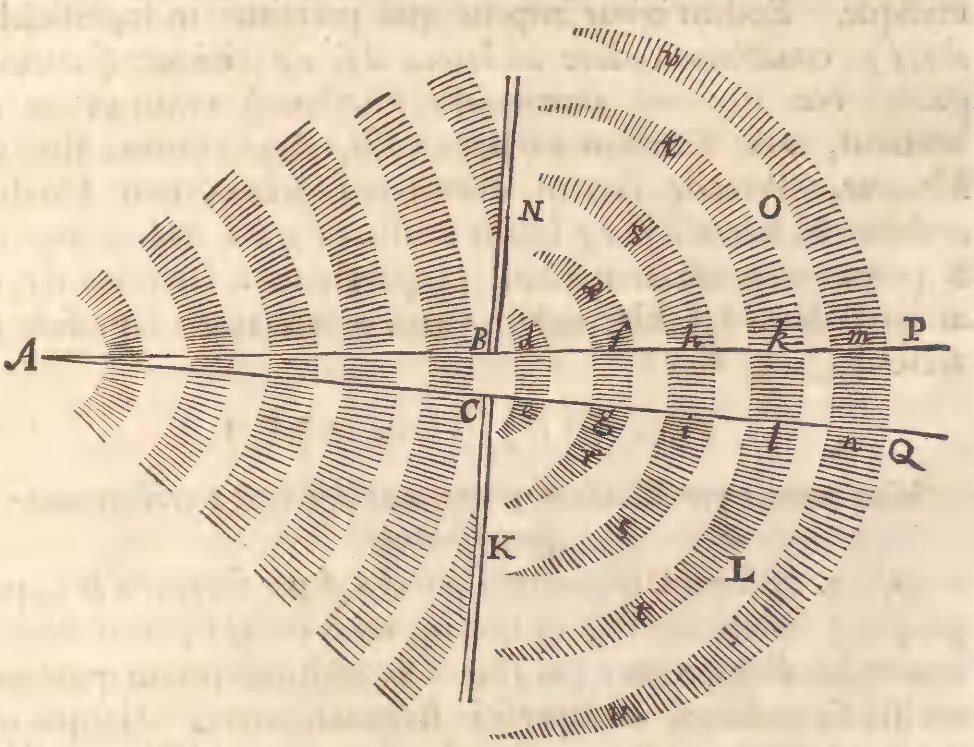
Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in linea recta, poteſt quidem preſſio directe propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas oblique poſitas *f* & *g* oblique, & particulæ illæ *f* & *g* non ſuſtinebunt preſſionem illatam, niſi fulciantur a particulis ulterioribus *h* & *k*; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non ſuſtinebunt preſſionem niſi fulcian-



tur

tur ab ulterioribus *l* & *m* eaſque premant, & ſic deinceps in infinitum. Preſſio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & oblique propagabitur in infinitum; & poſtquam incipit oblique propagari, ſi inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accurate in directum jacentes inciderit. *Q. E. D.*

Corol. Si preſſionis a dato puncto per Fluidum propagatæ pars aliqua obſtaculo intercipiatur, pars reliqua quæ non intercipitur divaricabit in ſpatia pone obſtaculum. Id quod ſic etiam



demonſtrari poteſt. A puncto *A* propagetur preſſio quaquaverſum, idque ſi fieri poteſt ſecundum lineas rectas, & obſtaculo *N B C K* perforato in *B C*, intercipiatur ea omnis, præter partem Coniformem *A P Q*, quæ per foramen circulare *B C* tranſit. Planis tranſverſis *d e*, *f g*, *h i* diſtinguatur conus *A P Q* in fruſta

& interea dum conus *A B C*, preſſionem propagando, urget fruſtum conicum ulterius *d e g f* in ſuperficie *d e*, & hoc fruſtum urget fruſtum proximum *f g i h* in ſuperficie *f g*, & fruſtum illud urget fruſtum tertium, & ſic deinceps in infinitum; manifeſtum eſt (per motus Legem tertiam) quod fruſtum primum *d e f g*, reactione fruſti ſecundi *f g h i*, tantum urgebitur & premetur in ſuperficie *f g*, quantum urget & premit fruſtum illud ſecundum. Fruſtum igitur *d e g f* inter Conum *A d e* & fruſtum *f h i g* comprimitur utrinque, & propterea (per Corol. 6. Prop. XIX.) figuram ſuam ſervare nequit, niſi vi eadem comprimatur undique. Eodem igitur impetu quo premitur in ſuperficiebus *d e*, *f g* conabitur cedere ad latera *d f*, *e g*; ibique (cum rigidum non ſit, ſed omnimodo Fluidum) excurret ac dilatabitur, niſi Fluidum ambiens adſit, quo conatus iſte cohibeatur. Proinde conatu excurrendi premet tam Fluidum ambiens ad latera *d f*, *e g* quam fruſtum *f g h i* eodem impetu; & propterea preſſio non minus propagabitur a lateribus *d f*, *e g* in ſpatia *N O*, *K L* hinc inde, quam propagatur a ſuperficie *f g* verſus *P Q*. *Q. E. D.*

Prop. XLII. Theor. XXXII.

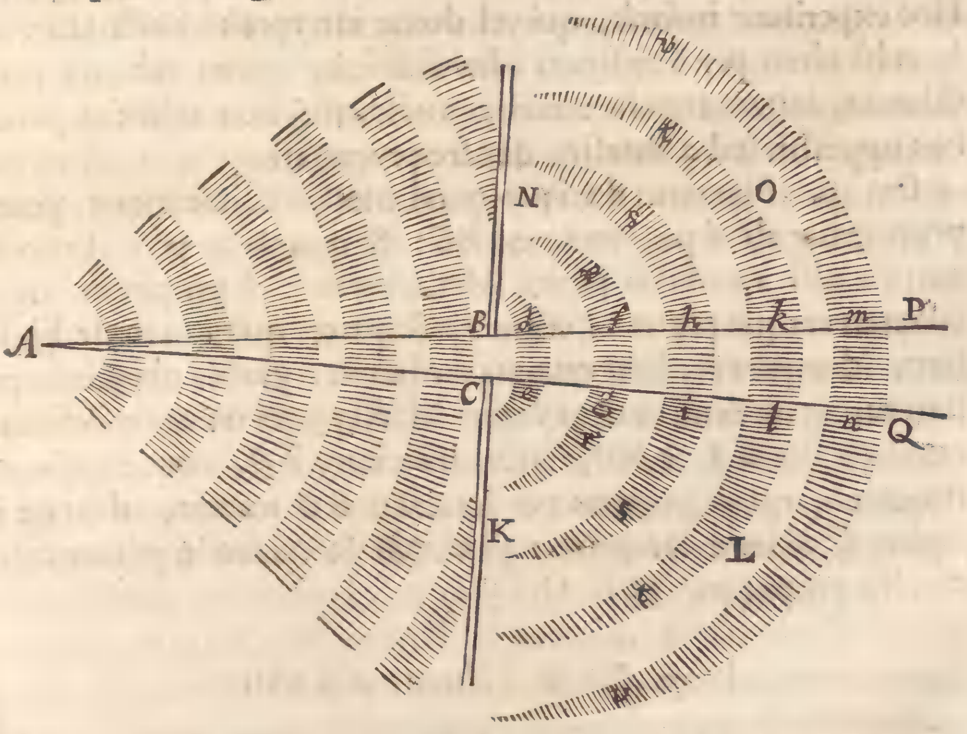
Motus omnis per Fluidum propagatus divergit a recto tramite in ſpatia immota.

Caſ. 1. Propagetur motus a puncto *A* per foramen *B C*, pergatque (ſi fieri poteſt) in ſpatio conico *B C Q P*, ſecundum lineas rectas divergentes a puncto *C*. Et ponamus primo quod motus iſte ſit undarum in ſuperficie ſtagnantis aquæ. Sintque *d e*, *f g*, *h i*, *k l*, &c. undarum ſingularum partes altiſſimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem diſtinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior eſt quam in Fluidi partibus immotis *L K*, *N O*, defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *h*, *k*, &c. hinc inde verſus *K L* & *N O*: & quoniam in undarum vallibus depreſſior eſt quam in Fluidi partibus immotis *K L*, *N O*; defluet

eadem

eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, poſteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur verſus *KL* & *NO*. Et quoniam motus undarum ab *A* verſus *PQ* fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, adeoque celerior non eſt quam pro celeritate deſcenſus; & deſcenſus aquæ hinc inde verſus *KL* & *NO* eadem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde verſus *KL* & *NO*, eadem velocitate qua undæ ipſæ ab *A* verſus *PQ* recta progrediuntur. Proindeque ſpatium totum hinc inde verſus *KL* & *NO* ab undis dilatatis *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, &c occupabitur. *Q. E. D.* Hæc ita ſe habere quilibet in aqua ſtagnante experiri poteſt.

Caſ. 2. Ponamus jam quod *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* deſignent pulſus a puncto *A* per Medium Elaſticum ſucceſſive propagatos.



Pulſus propagari concipe per ſucceſſivas condenſationes & rarefactiones Medii, ſic ut pulſus cujuſque pars denſiſſima Sphæricam occupet

occupet ſuperficiem circa centrum *A* deſcriptam, & inter pulſus ſucceſſivos æqualia intercedant intervalla. Deſignent autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. denſiſſimas pulſuum partes per foramen *BC* propagatas. Et quoniam Medium ibi denſius eſt quam in ſpatiis hinc inde verſus *KL* & *NO*, dilatabit ſeſe tam verſus ſpatia illa *KL*, *NO* utrinque ſita, quam verſus pulſuum rariora intervalla; eoq; pacto rarius ſemper evadens e regione intervallorum ac denſius e regione pulſuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulſuum progreſſivus motus oritur a perpetua relaxatione partium denſiorum verſus antecedentia intervalla rariora; & pulſus eadem celeritate ſeſe in Medii partes quieſcentes *KL*, *NO* hinc inde relaxare debent; pulſus illi eadem celeritate ſeſe dilatabunt undique in ſpatia immota *KL*, *NO*, qua propagantur directe a centro *A*; adeoque ſpatium totum *KLON* occupabunt. *Q. E. D.* Hoc experimur in ſonis, qui vel domo interpoſita audiuntur, vel in cubiculum per feneſtram admiſſi ſeſe in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non reflexi a parietibus oppoſitis ſed a feneſtra directe propagati.

Caſ. 3. Ponamus denique quod motus cujuſcunque generis propagetur ab *A* per foramen *BC*: & quoniam propagatio iſta non fit niſi quatenus partes Medii centro *A* propiores urgent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur Fluidæ ſunt, ideoque recedunt quaquaverſum in regiones ubi minus premuntur: recedent eædem verſus Medii partes omnes quieſcentes, tam laterales *KL* & *NO*, quam anteriores *PQ*, eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen *BC* tranſiit, dilatari incipiet, & abinde tanquam a principio & centro in partes omnes directe propagari. *Q. E. D.*

Prop. XLIII. Theor. XXXIII.

Corpus omne tremulum in Medio Elaſtico propagabit motum pulſuum undique in directum; in Medio vero non Elaſtico motum circularem excitabit.

Caſ. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, itu ſuo urgebunt & propellent partes Medii ſibi proximas, & urgendo comprimenteaſdem & condenſabunt; dein reditu ſuo ſinent partes compreſſas recedere & ſeſe expandere. Igitur partes Medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad inſtar partium corporis illius tremuli: & qua ratione partes corporis hujus agitabant haſce Medii partes, hæ ſimilibus tremoribus agitatæ agitabunt partes ſibi proximas, eæque ſimiliter agitatæ agitabunt ulteriores, & ſic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Medii partes primæ eundo condenſantur & redeundo relaxantur, ſic partes reliquæ quoties eunt condenſabuntur, & quoties redeunt ſeſe expandent. Et propterea non omnes ibunt & ſimul redibunt (ſic enim determinatas ab invicem diſtantias ſervando non rarefierent & condenſarentur per vices) ſed accedendo ad invicem ubi condenſantur, & recedendo ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condenſatæ, ob motum ſuum progreſſivum quo feriunt obſtacula, ſunt pulſus; & propterea pulſus ſucceſſivi a corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem diſtantiis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus ſuis ſingulis ſingulos pulſus excitat. *Q. E. D.* Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant ſecundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulſus inde per Medium propagati ſeſe dilatabunt ad latera, per Propoſitionem præcedentem; & a corpore illo tremulo tanquam centro communi, ſecundum ſuperficies propemodum Sphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in Undis, quæ ſi digito tremulo excitentur, non ſolum pergent hinc inde ſecundum plagam motus digiti, ſed, in modum circulorum concentricorum, digitum ſtatim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas undarum ſupplet locum vis Elaſticæ.

Quod ſi Medium non ſit Elaſticum: quoniam ejus partes a corporis

poris tremuli partibus vibratis preſſæ condenſari nequeunt, propagabitur motus in inſtanti ad partes ubi Medium facillime cedit, hoc eſt ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas a tergo relinqueret. Idem eſt caſus cum caſu corporis in Medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum, ſed in circulum eundo pergit ad ſpatia quæ corpus relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, Medium cedendo perget per circulum ad partes quæ corpus relinquit, & quoties corpus regreditur ad locum priorem, Medium inde repelletur & ad locum ſuum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non ſit firmum, ſed modis omnibus flexile, ſi tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus ſuis nequit Medium ubivis urgere, quin alibi eidem ſimul cedat; efficiet ut Medium, recedendo a partibus ubi premitur, pergat ſemper in Orbem ad partes quæ eidem cedunt.

Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium flammæ ad preſſionem per Medium ambiens ſecundum lineas rectas propagandam conducere. Debebit ejuſmodi preſſio non ab agitatione ſola partium flammæ ſed a totius dilatatione derivari.

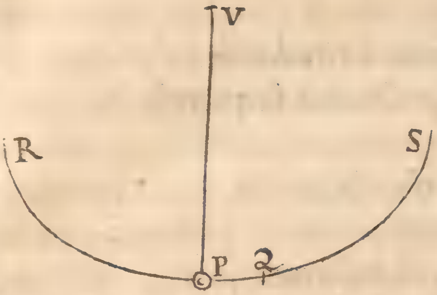
Prop. XLIV. Theor. XXXIV.

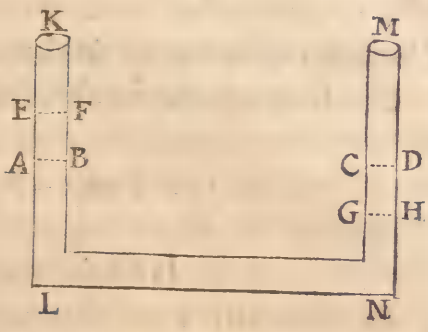
Si Aqua in canalis cruribus erectis KL, MN *vicibus alternis aſcendat & deſcendat; conſtruatur autem Pendulum cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis æquetur ſemiſſi longitudinis aquæ in Canali: dico quod aqua aſcendet & deſcendet iiſdem temporibus quibus pendulum oſcillatur.*

Longitudinem aquæ menſuro ſecundum axes canalis & crurum, eandem ſummæ horum axium æquando. Deſignent igitur *AB*, *CD* mediocrem altitudinem aquæ in crure utroque; & ubi aqua in crure *K L* aſcendit ad altitudinem *E F*, deſcenderit aqua in crure *MN* ad altitudinem *G H*. Sit autem *P* corpus

pendulum,

pendulum, *VP* filum, *V* punctum ſuſpenſionis, *SPQR* Cycloïs quam Pendulum deſcribat, *P* ejus punctum infimum, *PQ* arcus altitudini *AE* æqualis. Vis, qua motus aquæ alternis vicibus





acceleratur & retardatur, eſt exceſſus ponderis aquæ in alterutro crure ſupra pondus in altero, ideoque ubi aqua in crure *KL* aſcendit ad *EF*, & in crure altero deſcendit ad *GH*, vis illa eſt pondus duplicatum aquæ *EABF*, & propterea eſt ad pondus aquæ totius ut *AE* ſeu *PQ* ad *VP* ſeu *PR*. Vis etiam, qua pondus *P* in loco quovis *Q* acceleratur & retardatur in Cycloide, eſt ad ejus pondus totum, ut ejus diſtantia *PQ* a loco infimo *P*, ad Cycloidis longitudinem *PR*. Quare aquæ & penduli, æqualia ſpatia *AE*, *PQ* deſcribentium, vires motrices ſunt ut pondera movenda; ideoque vires illæ, ſi aqua & pendulum in principio, æquali cum velocitate moveantur; pergent eadem temporibus æqualiter movere, efficientque ut motu reciproco ſimul eant & redeant. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur aquæ aſcendentis & deſcendentis, ſive motus intenſior ſit ſive remiſſior, vices omnes ſunt Iſochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali ſit pedum *Pariſienſium* $6\frac{1}{9}$, aqua tempore minuti unius ſecundi deſcendet, & tempore minuti alterius ſecundi aſcendet; & ſic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis, tempore minuti unius ſecundi oſcillatur.

Corol. 3. Aucta autem vel diminuta longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione dimidiata.

Prop. XLV. Theor. XXXV.

Undarum velocitas eſt in dimidiata ratione latitudinum.

Conſequitur ex conſtructione Propoſitionis ſequentis.

Prop. XLVI. Prob. XI.

Invenire velocitatem Undarum.

Conſtituatur Pendulum cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis æquetur latitudini Undarum: & quo tempore pendulum illud oſcillationes ſingulas peragit, eodem Undæ progrediendo latitudinem ſuam propemodum conficient.

Undarum latitudinem voco menſuram tranſverſam quæ vel vallibus imis vel ſummis culminibus interjacet. Deſignet *ABCDEF* ſuperficiem aquæ ſtagnantis, undis ſucceſſivis aſcendentem ac deſcendentem, ſintque *A*, *C*, *E*, &c. undarum culmina, & *B*, *D*, *F*, &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ ſucceſſivum aſcenſum & deſcenſum, ſic ut ejus partes *A*, *C*, *E*, &c. quæ nunc infimæ ſunt, mox fiant altiſſimæ; & vis motrix, qua partes altiſſimæ deſcendunt & infimæ aſcendunt, eſt pondus aquæ elevatæ; alternus ille aſcenſus & deſcenſus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, eaſdemque temporis leges obſervabit: & propterea (per Prop. XLIV) ſi diſtantiæ inter undarum loca altiſſima *A*, *C*, *E*, & infima *B*, *D*, *F* æquentur duplæ penduli longitudini, partes altiſſimæ *A*, *C*, *E* tempore oſcillationis unius evadent infimæ, & tempore oſcillationis alterius denuo aſcendent. Igitur inter tranſitum Undarum ſingularum tempus erit oſcillationum duarum; hoc eſt Unda deſcribet latitudinem ſuam, quo tempore pendulum illud bis oſcillatur; ſed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla eſt,

adeoque

adeoque æquat undarum latitudinem, oſcillabitur ſemel. *Q.E.D.*

Corol. 1. Igitur Undæ, quæ pedes *Pariſienſes* $3\frac{1}{18}$ latæ ſunt, tempore minuti unius ſecundi progrediendo latitudinem ſuam conficient; adeoque tempore minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ ſpatio pedes 11000 quam proxime.

Corol. 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in dimidiata ratione latitudinis.

Hæc ita ſe habent ex Hypotheſi quod partes aquæ recta aſcendunt vel recta deſcendunt; ſed aſcenſus & deſcenſus ille verius fit per circulum, ideoque tempus hac Propoſitione non niſi quam proxime definitum eſſe affirmo.

Prop. XLVII. Theor. XXXVI.

Pulſuum in Fluido Elaſtico propagatorum velocitates ſunt in ratione compoſita ex dimidiata ratione vis Elaſticæ directe & dimidiata ratione denſitatis inverſe; ſi modo Fluidi vis Elaſtica ejuſdem condenſationi proportionalis eſſe ſupponatur.

Caſ. 1. Si Media ſint homogenea, & pulſuum diſtantiæ in his Mediis æquentur inter ſe, ſed motus in uno Medio intenſior ſit: contractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non eſt hæc proportio. Verum tamen niſi contractiones & dilatationes ſint valde intenſæ, non errabit ſenſibiliter, ideoque pro Phyſice accurata haberi poteſt. Sunt autem vires Elaſticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium ſimul genitæ ſunt ut vires. Ideoque æquales & correſpondentes pulſuum correſpondentium partes, itus & reditus ſuos per ſpatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia, ſimul peragent: & propterea pulſus, qui tempore itus & reditus unius latitudinem ſuam progrediendo conficiunt, & in loca pulſuum proxime præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum, æquali cum velocitate in Medio utroque progredientur.

Caſ. 2. Sin pulſuum diſtantiæ ſeu longitudines ſint majores in uno Medio quam in altero; ponamus quod partes correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia ſingulis vicibus eundo & redeundo deſcribant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque ſi Media ſint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ Elaſticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda, eſt ut pulſuum latitudo; & in eadem ratione eſt ſpatium per quod ſingulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. Eſtque tempus itus & reditus unius in ratione compoſita ex ratione dimidiata materiæ & ratione dimidiata ſpatii, atque adeo ut ſpatium. Pulſus autem temporibus itus & reditus unius eundo latitudines ſuas conficiunt, hoc eſt, ſpatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea ſunt æquiveloces.

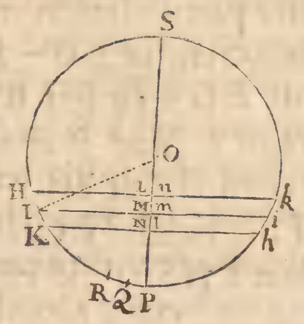
Caſ. 3. In Mediis igitur denſitate & vi elaſtica paribus, pulſus omnes ſunt æquiveloces. Quod ſi Medii vel denſitas vel vis Elaſtica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis Elaſticæ, & materia movenda in ratione denſitatis augetur; tempus quo motus iidem peragantur ac prius, augebitur in dimidiata ratione denſitatis, ac diminuetur in dimidiata ratione vis Elaſticæ. Et propterea velocitas pulſuum erit in ratione compoſita ex ratione dimidiata denſitatis Medii inverſe & ratione dimidiata vis Elaſticæ directe. *Q. E. D.*

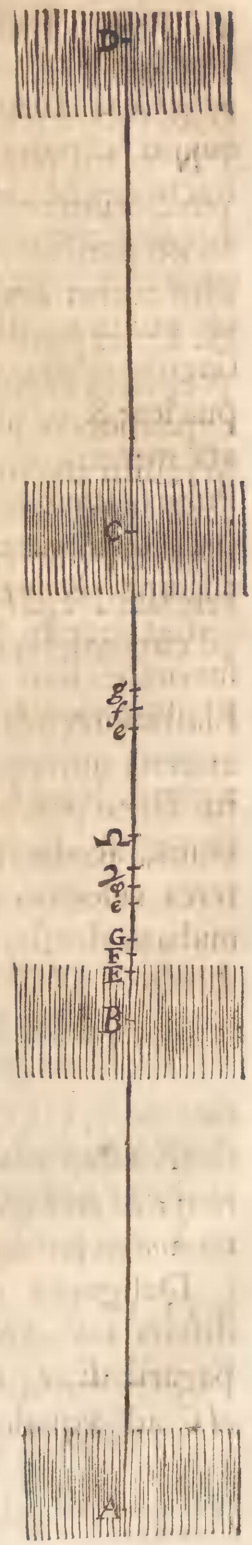
Prop. XLVIII. Theor. XXXVII.

Pulſibus per Fluidum propagatis, ſingulæ Fluidi particulæ, motu reciproco breviſſimo euntes & redeuntes, accelerantur ſemper & retardantur pro lege oſcillantis Penduli.

Deſignent AB, BC, CD, &c. pulſuum ſucceſſivorum æquales diſtantias; ABC plagam motus pulſuum ab A verſus B propagati; E, F, G puncta tria Phyſica Medii quieſcentis, in recta AC ad æquales ab invicem diſtantias ſita; Ee, Ff, Gg, ſpatia æqualia

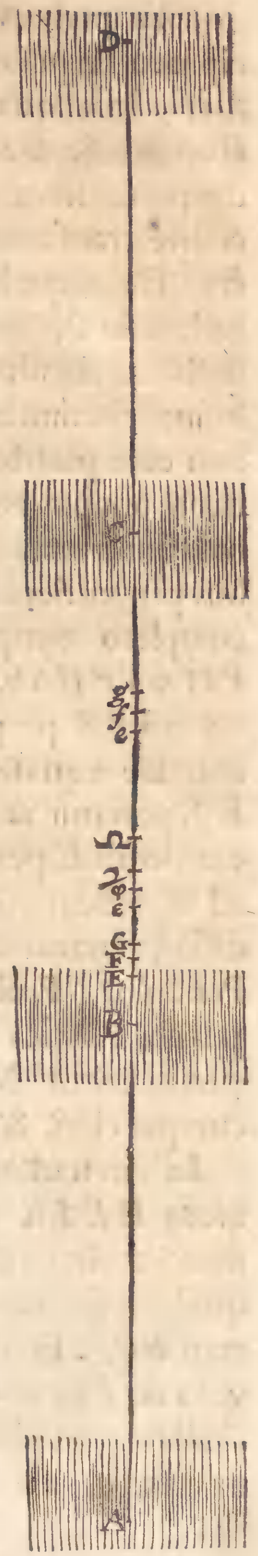
æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco ſingulis vibrationibus eunt & redeunt; ε, φ, γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & *EF*, *FG* lineolas Phyſicas ſeu Medii partes lineares punctis illis interjectas, & ſucceſſive tranſlatas in loca $\varepsilon\varphi$, $\varphi\gamma$ & *ef*, *fg*. Rectæ *Ee* æqualis ducatur recta *PS*. Biſecetur eadem in *O*, centroque *O* & intervallo *OP* deſcribatur circulus *SIPi*. Per hujus circumferentiam totam cum partibus ſuis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipſius partibus proportionalibus; ſic ut completo tempore quovis *PH* vel *PHSh*, ſi demittatur ad *PS* perpendiculum *HL* vel *hl*, & capiatur *Ee* æqualis *PL* vel *Pl*, punctum Phyſicum *E* reperiatur in ε. Hac lege punctum quodvis *E* eundo ab *E* per ε ad *e*, & inde redeundo per ε ad *E* iiſdem accelerationis ac retardationis gradibus, vibrationes ſingulas peraget cum oſcillante Pendulo. Probandum eſt quod ſingula Medii puncta Phyſica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur Medium tali motu a cauſa quacunque cieri, & videamus quid inde ſequatur.



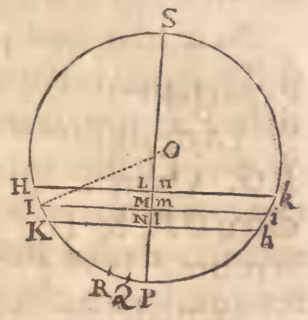


In circumferentia *PHSh* capiantur æquales arcus *HI*, *IK* vel *hi*, *ik*, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ *EF*, *FG* ad pulſuum intervallum totum *BC*. Et demiſſis perpendiculis *IM*, *KN* vel *im*, *kn*; quoniam puncta *E*, *F*, *G* motibus ſimilibus ſucceſſive agitantur, ſi *PH* vel *PHSk* ſit tempus ab initio motus puncti *E*, erit *PI* vel

vel $PHSi$ tempus ab initio motus puncti F, & PK vel $PHSb$ tempus ab initio motus puncti G; & propterea $E\varepsilon$, $F\varphi$, $G\gamma$ erunt ipſis PL, PM, PN in itu punctorum, vel ipſis Pn, Pm, Pl in punctorum reditu, æquales reſpective. Unde $\varepsilon\gamma$ in itu punctorum æqualis erit $EG - LN$, in reditu autem æqualis $EG + ln$. Sed $\varepsilon\gamma$ latitudo eſt ſeu expanſio partis Medii EG in loco $\varepsilon\gamma$, & propterea expanſio partis illius in itu, eſt ad ejus expanſionem mediocrem ut $EG - LN$ ad EG; in reditu autem ut $EG + ln$ ſeu $EG + LN$ ad EG. Quare cum ſit LN ad KH ut IM ad radium OP, & EG ad BC ut HK ad circumferentiam $PHSbP$, & viciſſim EG ad HK ut BC ad circumferentiam $PHSbP$; id eſt (ſi circumferentia dicatur Z) ut $\frac{OP \times BC}{Z}$ ad OP, & ex æquo LN ad EG ut IM ad $\frac{OP \times BC}{Z}$: erit expanſio partis EG in loco $\varepsilon\gamma$ ad expanſionem mediocrem quam habet in loco ſuo primo EG, ut $\frac{OP \times BC}{Z} - IM$ ad $\frac{OP \times BC}{Z}$ in itu, utque $\frac{OP \times BC}{Z} + im$ ad $\frac{OP \times BC}{Z}$ in reditu. Unde ſi $\frac{OP \times BC}{Z}$ dicatur V, erit expanſio partis EG, punctive Phyſici F, ad ejus expanſionem mediocrem in itu, ut $V - IM$ ad V, in reditu ut $V + im$ ad V; & ejuſdem vis elaſtica ad vim ſuam elaſticam medio- in itu, ut $\frac{1}{V - IM}$ ad $\frac{1}{V}$; in reditu ut $\frac{1}{V + im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento vires Elaſticæ punctorum Phyſicorum E & G in itu, ſunt ut $\frac{1}{V - HL}$ & $\frac{1}{V - KN}$ ad $\frac{1}{V}$; & virium differentia ad Medii vim



vim elaſticam mediocrem, ut $\frac{HL-KN}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ ad $\frac{1}{V}$. Hoc eſt (ſi ob brevitatem pulſuum ſupponamus HK & KN indefinite minores eſſe quantitate V) ut $\frac{HL-KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$, ſive ut $HL-KN$ ad V. Quare cum quantitas V detur, differentia virium eſt ut $HL-KN$, hoc eſt (ob proportionales $HL-KN$ ad HK, & OM ad OI vel OP, dataſque HK & OP) ut OM; id eſt, ſi Ff biſecetur in Ω, ut $\Omega\varphi$. Et eodem argumento differentia virium Elaſticarum punctorum Phyſicorum ε & γ, in reditu lineolæ Phyſicæ $\varepsilon\gamma$ eſt ut $\Omega\varphi$. Sed differentia illa (id eſt exceſſus vis Elaſticæ puncti ε ſupra vim elaſticam puncti γ,) eſt vis qua interjecta Medii lineola Phyſica $\varepsilon\gamma$ acceleratur; & propterea vis acceleratrix lineolæ Phyſicæ $\varepsilon\gamma$ eſt ut ipſius diſtantia a Medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (per Prop. XXXVIII. Lib. I.) recte exponitur per arcum PI; & Medii pars linearis $\varepsilon\gamma$ lege præſcripta movetur, id eſt lege oſcillantis Penduli: eſtque par ratio partium omnium linearium ex quibus Medium totum componitur. *Q. E. D.*



Corol. Hinc patet quod numerus pulſuum propagatorum idem ſit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progreſſu. Nam lineola Phyſica $\varepsilon\gamma$, quamprimum ad locum ſuum primum redierit, quieſcet; neque deinceps movebitur, niſi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulſuum qui a corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quieſcet igitur quamprimum pulſus a corpore tremulo propagari deſinunt.

Prop. XLIX. Prob. XII.

Datis Medii denſitate & vi Elaſtica, invenire velocitatem pulſuum.

Fingamus Medium ab incumbente pondere, pro more Aeris noſtri

ſtri comprimi, ſitque *A* altitudo Medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus denſitas eadem ſit cum denſitate Medii compreſſi, in quo pulſus propagantur. Conſtitui autem intelligatur Pendulum, cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis ſit *A*: & quo tempore pendulum illud oſcillationem integram ex itu & reditu compoſitam peragit, eodem pulſus eundo conficiet ſpatium circumferentiæ circuli radio *A* deſcripti æquale.

Nam ſtantibus quæ in Propoſitione ſuperiore conſtructa ſunt, ſi linea quævis Phyſica, *EF* ſingulis vibrationibus deſcribendo ſpatium *PS*, urgeatur in extremis itus & reditus cujuſque locis *P* & *S*, a vi Elaſtica quæ ipſius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes ſingulas quo tempore eadem in Cycloide, cujus Perimeter tota longitudini *PS* æqualis eſt, oſcillari poſſet: id adeo quia vires æquales æqualia corpuſcula per æqualia ſpatia ſimul impellent. Quare cum oſcillationum tempora ſint in dimidiata ratione longitudinis pendulorum, & longitudo penduli æquetur dimidio arcui Cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oſcillationis Penduli cujus longitudo eſt *A*, in dimidiata ratione longitudinis $\frac{1}{2}$ *PS* ſeu *PO* ad longitudinem *A*. Sed vis Elaſtica qua lineola Phyſica *EG*, in locis ſuis extremis *P*, *S* exiſtens, urgetur, erat (in demonſtratione Propoſitionis ſuperioris) ad ejus vim totam Elaſticam ut $HL - KN$ ad *V*, hoc eſt (cum punctum *K* jam incidat in *P*) ut *HK* ad *V*: & vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, qua lineola *EG* comprimitur, eſt ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo *A* ad lineolæ longitudinem *EG*; adeoque ex æquo, vis qua lineola *EG* in locis ſuis *P* & *S* urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut $HK \times A$ ad $V \times EG$. Quare cum tempora, quibus æqualia corpora per æqualia ſpatia impelluntur, ſint reciproce in dimidiata ratione virium, erit tempus vibrationis unius urgente vi illa Elaſtica, ad tempus vibrationis urgente vi ponderis, in dimidiata ratione $V \times EG$ ad $HK \times A$, atque adeo ad tempus oſcillationis Penduli cujus longitudo eſt *A*, in dimidiata ratione $V \times EG$ ad $HK \times A$ & *PO* ad *A* conjunctim;

id

id eſt (cùm fuerit, in ſuperiore Propoſitione, V æqualis $\frac{PO \times BC}{Z}$, & HK æqualis $\frac{EG \times Z}{BC}$) in dimidiata ratione $\frac{PO\,qu. \times BC \times EG}{Z}$ ad $\frac{EG \times Z \times A\,qu.}{BC}$ ſeu $PO\,qu. \times BC\,qu.$ ad $Z\,qu. \times A\,qu.$ hoc eſt in ratione $PO \times BC$ ad $Z \times A$, ſeu BC ad $\frac{Z \times A}{PO}$. Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compoſitæ, pulſus progrediendo conficit latitudinem ſuam BC. Ergo tempus quo pulſus percurrit ſpatium BC, eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, ut BC ad $\frac{Z \times A}{PO}$, id eſt ut BC ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A. Tempus autem, quo pulſus percurret ſpatium BC, eſt ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in eadem ratione; ideoque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Prop. L. Prob. XIII.

Invenire pulſuum diſtantias.

Corporis, cujus tremore pulſus excitantur, inveniatur numerus Vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur ſpatium quod pulſus eodem tempore percurrere poſſit, & pars inventa erit pulſus unius latitudo. *Q. E. I.*

Schol.

Spectant Propoſitiones noviſſimæ ad motum Lucis & Sonorum. Lux enim cum propagetur ſecundum lineas rectas, in actione ſola (per Prop. XLI. & XLII.) conſiſtere nequit. Soni vero propterea quod a corporibus tremulis oriantur, nihil aliud ſunt quàm aeris pulſus propagati, per Prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, ſi modò vehementes ſint & gra-

ves, quales ſunt ſoni Tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & ſonos quoſvis, in chordas corporibus ſonoris uniſonas impactos, excitare tremores notiſſimum eſt. Confirmatur etiam ex velocitate ſonorum. Nam cùm pondera ſpecifica Aquæ pluvialis & Argenti vivi ſint ad invicem ut 1 ad $13\frac{2}{3}$ circiter, & ubi *Mercurius* in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus ſpecificum Aeris & aquæ pluvialis ſint ad invicem ut 1 ad 850 circiter: erunt pondera ſpecifica aeris & argenti vivi ut 1 ad 11617. Proinde cum altitudo argenti vivi ſit 30 digitorum, altitudo aeris uniformis, cujus pondus aerem noſtrum ſubjectum comprimere poſſet, erit 348500 digitorum ſeu pedum *Anglicorum* 29042. Eſtque hæc altitudo illa ipſa quam in conſtructione ſuperioris Problematis nominavimus *A*. Circuli radio 29042 pedum deſcripti circumferentia eſt pedum 182476. Et cum Pendulum digitos $39\frac{1}{5}$ longum, oſcillationem ex itu & reditu compoſitam, tempore minutorum duorum ſecundorum, uti notum eſt, abſolvat; pendulum pedes 29042, ſeu digitos 348500, longum, oſcillationem conſimilem tempore minutorum ſecundorum $188\frac{4}{7}$ abſolvere debebit. Eo igitur tempore ſonus progrediendo conficiet pedes 182476, adeoque tempore minuti unius ſecundi pedes 968. Scribit *Merſennus*, in Baliſticæ ſuæ Prop. XXXV. ſe factis experimentis inveniſſe quod ſonus minutis quinque ſecundis hexapedas *Gallicas* 1150 (id eſt pedes *Gallicos* 6900) percurrat. Unde cum pes *Gallicus* ſit ad *Anglicum* ut 1068 ad 1000, debebit ſonus tempore minuti unius ſecundi pedes *Anglicos* 1474 conficere. Scribit etiam idem *Merſennus* *Robervallum* Geometram clariſſimum in Obſidione *Theodonis* obſervaſſe tormentorum fragorem exauditum eſſe poſt 13 vel 14 ab igne viſo minuta ſecunda, cùm tamen vix dimidiam *Leucam* ab illis Tormentis abfuerit. Continet *Leuca Gallica* hexapedas 2500, adeoque ſonus tempore 13 vel 14 ſecundorum, ex Obſervatione *Robervalli*, confecit pedes *Pariſienſes* 7500, ac tempore minuti unius ſecundi pedes *Pariſienſes* 560, *Anglicos*

verò

verò 600 circiter. Multum differunt hæ Obſervationes ab invicem, & computus noſter medium locum tenet. In porticu Collegii noſtri pedes 208 longa, ſonus in termino alterutro excitatus quaterno recurſu Echo quadruplicem efficit. Factis autem experimentis inveni quod ſingulis ſoni recurſibus pendulum quaſi ſex vel ſeptem digitorum longitudinis oſcillabatur, ad priorem ſoni recurſum eundo & ad poſteriorem redeundo. Longitudinem penduli ſatis accuratè definire nequibam: ſed longitudine quatuor digitorum, oſcillationes nimis celeres eſſe, ea novem digitorum nimis tardas judicabam. Unde ſonus eundo & redeundo confecit pedes 416 minore tempore quàm pendulum digitorum novem, & majore quàm pendulum digitorum quatuor oſcillatur; id eſt minore tempore quàm $28\frac{3}{4}$ minutorum tertiorum, & majore quàm $19\frac{1}{6}$; & propterea tempore minuti unius ſecundi conficit pedes *Anglicos* plures quàm 866 & pauciores quàm 1272, atque adeò velocior eſt quàm pro Obſervatione *Robervalli*, ac tardior quàm pro Obſervatione *Merſenni*. Quinetiam accuratioribus poſtea Obſervationibus definivi quod longitudo penduli major eſſe deberet quàm digitorum quinque cum ſemiſſe, & minor quàm digitorum octo; adeoque quòd ſonus tempore minuti unius ſecundi confecit pedes *Anglicos* plures quàm 920 & pauciores quàm 1085. Igitur motus ſonorum, ſecundum calculum Geometricum ſuperius allatum, inter hos limites conſiſtens, quadrat cum Phænomenis, quatenus hactenus tentare licuit. Proinde cùm motus iſte pendeat ab aeris totius denſitate, conſequens eſt quod ſoni non in motu ætheris vel aeris cujuſdam ſubtilioris, ſed in aeris totius agitatione conſiſtat.

Refragari videntur experimenta quædam de ſono in vaſis aere vacuis propagato, ſed vaſa aere omni evacuari vix poſſunt; & ubi ſatis evacuantur ſoni notabiliter imminui ſolent; *Ex. gr.* Si aeris totius pars tantùm centeſima in vaſe maneat, debebit ſonus eſſe centuplo languidior, atque adeò non minus audiri quàm ſi quis ſonum eundem in aere libero excitatum audiendo, ſubinde ad decu-

plam diſtantiam à corpore ſonoro recederet. Conferenda ſunt igitur corpora duo æqualiter ſonora, quorum alterum in vaſe evacuato, alterum in aere libero conſiſtat, & quorum diſtantiæ ab auditore ſint in dimidiata ratione denſitatum aeris: & ſi ſonus corporis prioris non ſuperat ſonum poſterioris objectio ceſſabit.

Cognita ſonorum velocitate, innoteſcunt etiam intervalla pulſuum. Scribit *Merſennus* (Lib. I. Harmonicorum Prop. IV.) ſe (factis experimentis quibuſdam quæ ibidem deſcribit) inveniſſe quod nervus tenſus vicibus 104 recurrit ſpatio minuti unius ſecundi, quando facit Uniſonum cum organica Fiſtula quadrupedali aperta vel bipedali obturata, quam vocant Organarii *C fa ut*. Sunt igitur pulſus 104 in ſpatio pedum 968, quos ſonus tempore minuti ſecundi deſcribit: adeoque pulſus unus occupat ſpatium pedum $9\frac{1}{4}$ circiter; id eſt duplam circiter longitudinem fiſtulæ. Unde veriſimile eſt quòd latitudines pulſuum, in omnium apertarum fiſtularum ſonis, æquentur duplis longitudinibus fiſtularum.

Porrò cur Soni ceſſante motu corporis ſonori ſtatim ceſſant, neque diutiùs audiuntur ubi longiſſimè diſtamus à corporibus ſonoris, quàm cum proximè abſumus, patet ex Corollario Propoſitionis XLVIII. Libri hujus. Sed & cur ſoni in Tubis Stenterophonicis valde augentur, ex allatis principiis manifeſtum eſt. Motus enim omnis reciprocus ſingulis recurſibus à cauſa generante augeri ſolet. Motus autem in Tubis dilatationem ſonorum impedientibus tardiùs amittitur & fortius recurrit, & propterea à motu novo ſingulis recurſibus impreſſo magis augetur. Et hæc ſunt præcipua Phænomena Sonorum.

SECT.

SECT. IX.

De motu Circulari Fluidorum.

Hypotheſis.

R*Eſiſtentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, cæteris paribus, proportionalem eſſe velocitati, qua partes Fluidi ſeparantur ab invicem.*

Prop. LI. Theor. XXXVIII.

Si Cylindrus ſolidus infinitè longus in fluido uniformi & infinito circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur Fluidum in Orbem, perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo; dico quod tempora periodica partium fluidi ſunt ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri.



Sit *AFL* cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. diſtinguatur fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos ſolidos ejuſdem craſſitudinis. Et quoniam homogeneum eſt Fluidum, impreſſiones contiguorum orbium in ſe mutuò factæ, erunt (per Hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in Orbem aliquem major eſt

eſt vel minor, ex parte concava quàm ex parte convexa, prævalebit impreſſio fortior, & motum Orbis vel accelerabit vel retardabit prout in eandem regionem cum ipſius motu, vel in contrariam dirigitur. Proinde ut Orbis unuſquiſque in motu ſuo uniformiter perſeveret, debent impreſſiones ex parte utraque ſibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cùm impreſſiones ſunt ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem, erunt tranſlationes inversè ut ſuperficies, hoc eſt inversè ut ſuperficierum diſtantiæ ab axe. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directè & diſtantiæ inversè; hoc eſt (conjunctis rationibus) ut quadrata diſtantiarum inversè. Quare ſi ad infinitæ rectæ *SABCDEQ* partes ſingulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipſarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. quadratis reciprocè proportionalia, & per terminos perpendicularium duci intelligatur linea curva Hyperbolica; erunt ſummæ diſtantiarum, hoc eſt motus toti angulares, ut reſpondentes ſummæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*: id eſt, ſi ad conſtituendum Medium uniformiter fluidum orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ Hyperbolicæ his ſummis Analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. & tempora motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Eſt igitur tempus periodicum particulæ cujuſvis *D* reciprocè ut area *DdQ*, hoc eſt (per notas Curvarum quadraturas) directè ut diſtantia *SD*. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc motus angulares particularum fluidi ſunt reciprocè ut ipſarum diſtantiæ ab axe Cylindri, & velocitates abſolutæ ſunt æquales.

Corol. 2. Si fluidum in vaſe cylindrico longitudinis infinitæ contineantur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, ſintque revolutionum tempora ut ipſorum ſemidiametri, & perſeveret fluidi pars unaquæque in motu ſuo: erunt partium ſingularum tempora periodica ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindrorum.

Co-

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, qui attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quàm retardatur.

Corol. 4. Unde ſi toti cylindrorum & fluidi Syſtemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, habebitur motus fluidi in cylindro quieſcente.

Corol. 5. Igitur ſi fluido & cylindro exteriore quieſcentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter, communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius deſinet augeri quàm fluidi partes ſingulæ motum Corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum ſuum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior niſi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus quoad uſque tempora periodica cylindri utriuſque æquentur inter ſe. Quod ſi cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare, & niſi cylindrus interior vi aliqua extrinſecùs impreſſa motum illum conſervet, efficiet ut idem paulatim ceſſet.

Quæ omnia in aqua profunda ſtagnante experiri licet.

Prop. LII. Theor. XXXIX.

Si Sphæra ſolida, in fluido uniformi & infinito, circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur fluidum in orbem; perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata diſtantiarum à centro Sphæræ. Fig. Prop. LI.

Caſ. 1. Sit *AFL* ſphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. diſtinguatur

guatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejuſdem craſſitudinis. Finge autem orbes illos eſſe ſolidos; & quoniam homogeneum eſt fluidum, impreſſiones contiguorum Orbium in ſe mutuò factæ, erunt (per Hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in orbem aliquem major eſt vel minor ex parte concava quàm ex parte convexa, prævalebit impreſſio fortior, & velocitatem Orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unuſquiſque in motu ſuo perſeveret uniformiter, debebunt impreſſiones ex parte utraque ſibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impreſſiones ſint ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem; erunt tranſlationes inversè ut ſuperficies, hoc eſt inversè ut quadrata diſtantiarum ſuperficierum à centro. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directè & diſtantiæ inversè; hoc eſt (conjunctis rationibus) ut cubi diſtantiarum inversè. Quare ſi ad rectæ infinitæ *SABCDEQ* partes ſingulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipſarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. cubis reciprocè proportionalia, erunt ſummæ diſtantiarum, hoc eſt, motus toti angulares, ut reſpondentes ſummæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*: id eſt (ſi ad conſtituendum Medium uniformiter fluidum, numerus Orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ Hyperbolicæ his ſummis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Eſt igitur tempus periodicum orbis cujuſvis *DIO* reciprocè ut area *DdQ*, hoc eſt, (per notas Curvarum quadraturas) directè ut quadratum diſtantiæ *SD*. Id quod volui primò demonſtrare.

Caſ. 2. A centro Sphæræ ducantur infinitæ rectæ quam plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis ſe mutuò ſuperantes; & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos

nulos innumeros ſecari; & annulus unuſquiſque habebit annulos quatuor ſibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non poteſt annulus unuſquiſque, niſi in motu juxta legem caſus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonſtratione caſus primi. Et propterea annulorum ſeries quælibet à globo in infinitum rectà pergens movebitur pro lege caſus primi, niſi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hac lege facto, attritus annulorum ad latera nullus eſt, neque adeò motum, quo minus hac lege fiat, impediet. Si annuli, qui à centro æqualiter diſtant, vel citiùs revolverentur vel tardiùs juxta polos quàm juxta æquatorem; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & ſic vergerent ſemper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege caſus primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat ſecundum legem caſus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc eſt annulorum ſingulorum tempora periodica erunt ut quadrata diſtantiarum ipſorum à centro globi. Quod volui ſecundo demonſtrare.

Caſ. 3. Dividatur jam annulus unuſquiſque ſectionibus tranſverſis in particulas innumeras conſtituentes ſubſtantiam abſolutè & uniformiter fluidam; & quoniam hæ ſectiones non ſpectant ad legem motus circularis, ſed ad conſtitutionem fluidi ſolummodo conducunt, perſeverabit motus circularis ut priùs. His ſectionibus annuli omnes quamminimi aſperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt aut mutabunt æqualiter. Et manente cauſarum proportione manebit effectuum proportio, hoc eſt proportio motuum & periodicorum temporum. *Q. E. D.* Cæterum cum motus circularis,& abinde orta vis centrifuga, major ſit ad Eclipticam quàm ad polos; debebit cauſa aliqua adeſſe qua particulæ ſingulæ in circulis ſuis retineantur, ne materia quæ ad Eclipticam eſt recedat ſemper à centro & per exteriora Vorticis migret ad polos, indeque per axem ad Eclipticam circulatione perpetua revertatur.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro globi,& velocitates

abſolutæ reciprocè ut eadem quadrata applicata ad diſtantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quieſcente ſimilari & infinito circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem Vorticis; & motus iſte paulatim propagabitur in infinitum; neque prius ceſſabit in ſingulis fluidi partibus accelerari, quàm tempora periodica ſingularum partium ſint ut quadrata diſtantiarum à centro globi.

Corol. 3. Quoniam Vorticis partes interiores ob majorem ſuam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipſis ea actione perpetuò communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores ſimul transferunt, eaque actione ſervant quantitatem motus ſui planè invariatam; patet quod motus perpetuò transfertur à centro ad circumferentiam Vorticis, & per infinitatem circumferentiæ abſorbetur. Materia inter ſphæricas duas quaſvis ſuperficies Vortici concentricas nunquam accelerabitur, eò quod motum omnem à materia interiore acceptum transfert ſemper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conſervationem Vorticis conſtanter in eodem movendi ſtatu, requiritur principium aliquod activum à quo globus eandem ſemper quantitatem motus accipiat quam imprimit in materiam vorticis. Abſque tali principio neceſſe eſt ut globus & Vorticis partes interiores, propagantes ſemper motum ſuum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardeſcant paulatim & in orbem agi deſinant.

Corol. 5. Si globus alter huic Vortici ad certam ab ipſius centro diſtantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliqua conſtanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in vorticem: & primò revolveretur hic vortex novus & exiguus una cum globo circa centrum alterius, & interea latiùs ſerperet ipſius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eadem ratione qua hujus globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, ſic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, ſeque mutuò ob motum

 tum

tum illum circularem ſugerent, niſi per vim aliquam cohibiti. Poſtea ſi vires conſtanter impreſſæ, quibus globi in motibus ſuis perſeverant, ceſſarent, & omnia legibus Mechanicis permitterentur, langueſceret paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3. & 4. aſſignatam) & vortices tandem conquieſcerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes poſitione datos certis cum velocitatibus conſtanter revolverentur, fierent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi ſinguli, eadem ratione qua unus aliquis motum ſuum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus ſuos in infinitum, adeò ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus reſultat. Unde vortices non definientur certis limitibus, ſed in ſe mutuò paulatim excurrent; globiq; per actiones vorticum in ſe mutuò, perpetuò movebuntur de locis ſuis; uti in Lemmate ſuperiore expoſitum eſt; neq; certam quamvis inter ſe poſitionem ſervabunt, niſi per vim aliquam retenti. Ceſſantibus autem viribus illis quæ in globos conſtanter impreſſæ conſervant hoſce motus, materia ob rationem in Corollario tertio & quarto aſſignatam paulatim requieſcet & in vortices agi deſinet.

Corol. 7. Si Fluidum ſimilare claudatur in vaſe ſphærico, ac globi in centro conſiſtentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, ſintq; eorum tempora periodica ut quadrata ſemidiametrorum: partes fluidi non prius perſeverabunt in motibus ſuis ſine acceleratione & retardatione, quàm ſint eorum tempora periodica ut quadrata diſtantiarum à centro vorticis. Alia nulla Vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.

Corol. 8. Si vas, Fluidum incluſum & globus ſervent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in ſe invicem, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium inter ſe pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quàm acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde ſi vas quieſcat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum tranſire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone tempus revolutionis hujus eſſe ad ſummam hujus temporis & temporis revolutionis globi, ut quadratum ſemidiametri vaſis ad quadratum ſemidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi reſpectu plani hujus erunt ut quadrata diſtantiarum ſuarum à centro globi.

Corol. 10. Proinde ſi vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diverſum aliquem, data cum velocitate quacunq; moveatur, dabitur motus fluidi. Nam ſi Syſtemati toti auferatur vaſis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter ſe qui prius, per Corol. 8. Et motus iſti per Corol. 9. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quieſcant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas niſi violenter detentum, neq; prius deſinent fluidum & vas accelerari, quàm ſint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod ſi vas vi aliqua detineatur vel revolvatur motu quovis conſtanti & uniformi, deveniet Medium paulatim ad ſtatum motus in Corollariis 8. 9 & 10 definiti, nec in alio unquam ſtatu quocunq; perſeverabit. Deinde verò ſi, viribus illis ceſſantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur Syſtema totum Legibus Mechanicis; vas & globus in ſe invicem agent mediante fluido, neq; motus ſuos in ſe mutuò per fluidum propagare prius ceſſabunt, quàm eorum tempora periodica æquantur inter ſe, & Syſtema totum ad inſtar corporis unius ſolidi ſimul revolvatur.

Scholium.

In his omnibus ſuppono fluidum ex materia quoad denſitatem & fluiditatem uniformi conſtare. Tale eſt in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus ſimiles & æquales, ad æquales ſemper à ſe diſtantias, ubivis in fluido conſtitutus, propagare poſſit. Conatur quidem materia per motum ſuum

cir-

circularem recedere ab axe Vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hac preſſione fit attritus partium fortior & ſeparatio ab invicem difficilior; & per conſequens diminuitur materiæ fluiditas. Rurſus ſi partes fluidi ſunt alicubi craſſiores ſeu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores ſuperficies in quibus partes ſeparentur ab invicem. In hujuſmodi caſibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliave aliqua conditione reſtitui ſuppono. Hoc niſi fiat, materia ubi minùs fluida eſt magis cohærebit & ſegnior erit, adeoq; motum tardiùs recipiet & longiùs propagabit quàm pro ratione ſuperiùs aſſignata. Si figura vaſis non ſit Sphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus ſed conformibus eidem vaſis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium diſtantiarum à centro quamproximè. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora ſunt ſpatia, tardiores erunt motus, ubi anguſtiora velociores; neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim deſcribent minus curvos, & conatus recedendi à centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quàm augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo à ſpatiis anguſtioribus in latiora recedent paulò longiùs à centro, ſed iſto receſſu tardeſcent; & accedendo poſtea de latioribus ad anguſtiora accelerabuntur, & ſic per vices tardeſcent & accelerabuntur particulæ ſingulæ in perpetuum. Hæc ita ſe habebunt in vaſe rigido. Nam in fluido infinito conſtitutio Vorticum innoteſcit per Propoſitionis hujus Corollarium ſextum.

Proprietates autem Vorticum hac Propoſitione inveſtigare conatus ſum, ut pertentarem ſiqua ratione Phænomena cœleſtia per Vortices explicari poſſint. Nam Phænomenon eſt quod Planetarum circa Jovem revolventium tempora periodica ſunt in ratione ſeſquialtera diſtantiarum à centro Jovis; & eadem Regula obtinet in Planetis qui circa Solem revolvuntur. Obtinent autem hæ Regulæ in Planetis utriſque quam accuratiſſimè, quatenus obſervationes Aſtronomicæ hactenus prodidêre. Ideoq; ſi Planetæ illi à Vorticibus circa Jovem & Solem revolventibus deferantur, debebunt etiam

am hi Vortices eadem lege revolvi. Verum tempora periodica partium Vorticis prodierunt in ratione duplicata diſtantiarum à centro motus: neque poteſt ratio illa diminui & ad rationem ſeſquialteram reduci, niſi vel materia vorticis eo fluidior ſit quo longius diſtat à centro, vel reſiſtentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex aucta velocitate qua partes fluidi ſeparantur ab invicem, augeatur in majori ratione quàm ea eſt in qua velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi conſentaneum videtur. Partes craſſiores & minus fluidæ (niſi graves ſint in centrum) circumferentiam petent; & veriſimile eſt quod, etiamſi Demonſtrationum gratia Hypotheſin talem initio Sectionis hujus propoſuerim ut Reſiſtentia velocitati proportionalis eſſet, tamen Reſiſtentia in minori ſit ratione quàm ea velocitatis eſt. Quo conceſſo tempora periodica partium Vorticis erunt in majori quàm duplicata ratione diſtantiarum ab ipſius centro. Quod ſi vortices (uti aliquorum eſt opinio) celeriùs moveantur prope centrum, dein tardiùs uſque ad certum limitem, tum denuò celeriùs juxta circumferentiam; certè nec ratio ſeſquialtera neque alia quævis certa ac determinata obtinere poteſt. Viderint itaq; Philoſophi quo pacto Phænomenon illud rationis ſeſquialteræ per Vortices explicari poſſit.

Prop. LIII. Theor. XL.

Corpora quæ in Vortice delata in orbem redeunt ejuſdem ſunt denſitatis cum Vortice, & eadem lege cum ipſius partibus (quoad velocitatem & curſus determinationem) moventur.

Nam ſi vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ ſeu puncta phyſica datum ſervant ſitum inter ſe, congelari ſupponatur: hæc, quoniam neq; quoad denſitatem ſuam, neque quoad vim inſitam aut figuram ſuam mutatur, movebitur eadem lege ac prius: & contra, ſi Vorticis pars congelata & ſolida ejuſdem ſit denſitatis cum reliquo vortice, & reſolvatur in fluidum; movebitur hæc eadem lege ac prius, niſi quatenus ipſius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter ſe. Negligatur igitur motus particularum inter ſe, tan-

quam

quam ad totius motum progreſſivum nil ſpectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum Vorticis partium à centro æqualiter diſtantium, propterea quod ſolidum in Fluidum reſolutum ſit pars Vorticis cæteris partibus conſimilis. Ergo ſolidum, ſi ſit ejuſdem denſitatis cum materia Vorticis, eodem motu cum ipſius partibus movebitur, in materia proximè ambiente relative quieſcens. Sin denſius ſit, jam magis conabitur recedere à centro Vorticis quàm priùs; adeoq; Vorticis vim illam, qua priùs in Orbita ſua tanquam in æquilibrio conſtitutum retinebatur, jam ſuperans, recedet à centro & revolvendo deſcribet Spiralem, non amplius in eundem Orbem rediens. Et eodem argumento ſi rarius ſit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem Orbem niſi ſit ejuſdem denſitatis cum fluido. Eo autem in caſu oſtenſum eſt, quod revolveretur eadem lege cum partibus fluidi à centro Vorticis æqualiter diſtantibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo ſolidum quod in Vortice revolvitur & in eundem Orbem ſemper redit, relativè quieſcit in fluido cui innatat.

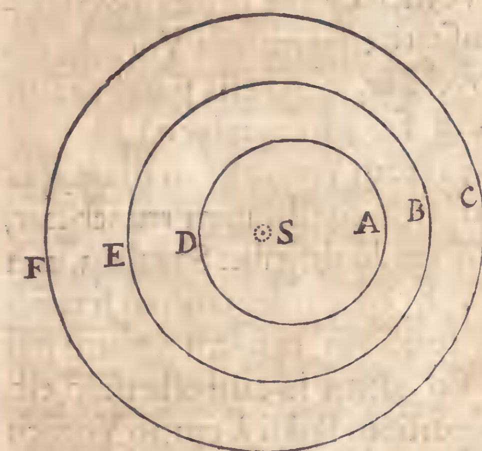
Corol. 2. Et ſi vortex ſit quoad denſitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet à centro Vorticis diſtantiam revolvi poteſt.

Scholium.

Hinc liquet Planetas à Vorticibus corporeis non deferri. Nam Planetæ ſecundum Hypotheſin *Copernicæam* circa Solem delati revolvuntur in Ellipſibus umbilicum habentibus in Sole, & radiis ad Solem ductis areas deſcribunt temporibus proportionales. At partes Vorticis tali motu revolvi nequeunt. Deſignent *AD*, *BE*, *CF*, orbes tres circa Solem *S* deſcriptos, quorum extimus *CF* circulus ſit Soli concentricus, & interiorum duorum Aphelia ſint *A*, *B*, & Perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in orbe *CF*, radio ad Solem ducto areas temporibus proportionales deſcribendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in Orbe *BE*, tardiùs movebitur in Aphelio *B* & velociùs in Perihelio *C*, ſecundum leges Aſtronomicas; cum tamen ſecundum leges Mechanicas materia Vorticis in ſpatio anguſtiore inter *A* & *C* velociùs

moveri

moveri debeat quàm in ſpatio latiore inter *D* & *F*; id eſt in Aphelio velociùs quàm in Perihelio. Quæ duo repugnant inter ſe. Sic in principio Signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam verſatur, diſtantia inter orbes Martis & Veneris eſt ad diſtantiam eorundem orbium in principio Signi Piſcium ut tria ad duo circiter, & propterea materia Vorticis inter Orbes illos in principio Piſcium debet eſſe velocior quàm in principio Virginis in ratione trium ad duo. Nam quo anguſtius eſt ſpatium per quod eadem Materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore tranſit, eo majori cum velocitate tranſire debet. Igitur ſi Terra in hac Materia cœleſti relativè quieſcens ab ea deferretur, & una circa Solem revolveretur, foret hujus velocitas in principio Piſcium ad ejuſdem velocitatem in principio Virginis in ratione ſeſquialtera. Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major eſſet quàm minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio Piſcium minor quàm minutorum quadraginta & octo: cum tamen (experientia teſte) apparens iſte Solis motus major ſit in principio Piſcium quàm in principio Virginis, & propterea Terra velocior in principio Virginis quàm in principio Piſcium. Itaq; Hypotheſis Vorticum cum Phænomenis Aſtronomicis omninò pugnat, & non tam ad explicandos quàm ad perturbandos motus cœleſtes conducit. Quomodo verò motus iſti in ſpatiis liberis abſque Vorticibus peraguntur intelligi poteſt ex Libro primo, & in Mundi Syſtemate pleniùs docebitur.



DE
Mundi Syſtemate
LIBER TERTIUS.

IN Libris præcedentibus principia Philoſophiæ tradidi, non tamen Philoſophica ſed Mathematica tantum, ex quibus videlicet in rebus Philoſophicis diſputari poſſit. Hæc ſunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philoſophiam maximè ſpectant. Eadem tamen, ne ſterilia videantur, illuſtravi Scholiis quibuſdam Philoſophicis, ea tractans quæ generalia ſunt, & in quibus Philoſophia maximè fundari videtur, uti corporum denſitatem & reſiſtentiam, ſpatia corporibus vacua, motumque Lucis & Sonorum. Supereſt ut ex iiſdem principiis doceamus conſtitutionem Syſtematis Mundani. De hoc argumento compoſueram Librum tertium methodo populari, ut à pluribus legeretur. Sed quibus Principia poſita ſatis intellecta non fuerint, ij vim conſequentiarum minimè percipient, neque præjudicia deponent quibus à multis retro annis inſueverunt: & propterea ne res in diſputationes trahatur, ſummam libri illius tranſtuli in Propoſitiones, more Mathematico, ut ab iis ſolis legantur qui principia prius evolverint. Veruntamen quoniam Propoſitiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ Lectoribus etiam Mathematicè doctis moram nimiam injicere poſſint, author eſſe nolo ut quiſquam eas omnes evolvat; ſuffecerit ſiquis Definitiones, Leges motuum & ſectiones tres priores Libri primi ſedulò legat, dein tranſeat ad hunc Librum de Mundi Syſtemate, & reliquas Librorum priorum Propoſitiones hic citatas pro lubitu conſulat.

HYPOTHESES.

Hypoth. I. *Cauſas rerum naturalium non plures admitti debere, quàm quæ & vera ſint & earum Phænomenis explicandis ſufficiunt.*

Natura enim ſimplex eſt & rerum cauſis ſuperfluis non luxuriat.

Hypoth. II. *Ideoque effectuum naturalium ejuſdem generis eædem ſunt cauſæ.*

Uti reſpirationis in Homine & in Beſtia; deſcenſûs lapidum in *Europa* & in *America*; Lucis in Igne culinari & in Sole; reflexionis lucis in Terra & in Planetis.

Hypoth. III. *Corpus omne in alterius cujuſcunque generis corpus transformari poſſe, & qualitatum gradus omnes intermedios ſucceſſivè induere.*

Hypoth. IV. *Centrum Syſtematis Mundani quieſcere.*

Hoc ab omnibus conceſſum eſt, dum aliqui Terram alii Solem in centro quieſcere contendant.

Hypoth. V. *Planetas circumjoviales, radiis ad centrum Jovis ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica eſſe in ratione ſeſquialtera diſtantiarum ab ipſius centro.*

Conſtat ex obſervationibus Aſtronomicis. Orbes horum Planetarum non differunt ſenſibiliter à circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora verò periodica eſſe in ratione ſeſquialtera ſemidiametrorum orbium conſentiunt Aſtronomici: & *Flamſtedius*, qui omnia Micrometro & per Eclipſes Satellitum accuratius definivit, literis ad me datis, quinetiam numeris ſuis mecum communicatis, ſignificavit rationem illam ſeſquialteram tam accuratè obtinere, quàm ſit poſſibile ſenſu deprehendere. Id quod ex Tabula ſequente manifeſtum eſt.

Satellitum tempora periodica.

1d. 18h. $28'\frac{3}{5}$. 3d. 13h. $17'\frac{9}{10}$. 7d. 3h. $59'\frac{3}{5}$. 16d. 18h. $5'\frac{1}{5}$.

Diſtantiæ Satellitum à centro Jovis.

Ex Obſervationibus	1.	2	3	4	
Caſſini	5.	8.	13.	23.	Semidiam. Jovis.
Borelli	$5\frac{2}{3}$.	$8\frac{2}{3}$.	14.	$24\frac{2}{3}$.	
Tounlei *per Micromet-*	5,51.	8,78.	13,47.	24,72.	
Flamſtedii *per Microm.*	5,31.	8,85.	13,98.	24,23.	
Flamſt. *per Eclipſ.* Satel.	5,578.	8,876.	14,159.	24,903.	
Ex temporibus periodicis.	5,578.	8,878.	14,168.	24,968.	

Hypoth. VI. *Planetas quinque primarios Mercurium, Venerem, Martem, Jovem & Saturnum Orbibus ſuis Solem cingere.*

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi ex eorum phaſibus lunaribus demonſtratur. Plenâ facie lucentes ultra Solem ſiti ſunt, dimidiatâ è regione Solis, falcatâ cis Solem; per diſcum ejus ad modum macularum nonnunquam tranſeuntes. Ex Martis quoque plena facie prope Solis conjunctionem, & gibboſa in quadraturis, certum eſt quod is Solem ambit. De Jove etiam & Saturno idem ex eorum phaſibus ſemper plenis demonſtratur.

Hypoth. VII. *Planetarum quinque primariorum, & (vel Solis circa Terram vel) Terræ circa Solem tempora periodica eſſe in ratione ſeſquialtera mediocrium diſtantiarum à Sole.*

Hæc à *Keplero* inventa ratio in confeſſo eſt apud omnes. Eadem utique ſunt tempora periodica, eædemq; orbium dimenſiones, ſive Planetæ circa Terram, ſive iidem circa Solem revolvantur. Ac de menſura quidem temporum periodicorum convenit inter Aſtronomos univerſos. Magnitudines autem Orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentiſſimè ex Obſervationibus determinaverunt: & diſtantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis reſpondent, non

 diffe-

differunt ſenſibiliter à diſtantiis quas illi invenerunt, ſuntque inter ipſas ut plurimum intermediæ; uti in Tabula ſequente videre licet.

Planetarum ac Telluris Diſtantiæ mediocres à Sole.

	♄	♃	♂	♁	♀	☿
Secundum *Keplerum*	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum *Bullialdum*	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	953806.	520116.	152399.	100000.	72333.	38710.

De diſtantiis Mercurii & Veneris à Sole diſputandi non eſt locus, cum hæ per eorum Elongationes à Sole determinentur. De diſtantiis etiam ſuperiorum Planetarum à Sole tollitur omnis diſputatio per Eclipſes Satellitum Jovis. Etenim per Eclipſes illas determinatur poſitio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo Heliocentrica. Ex longitudinibus autem Heliocentrica & Geocentrica inter ſe collatis determinatur diſtantia Jovis.

Hypoth. VIII. *Planetas primarios radiis ad Terram ductis areas deſcribere temporibus minimè proportionales; at radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales percurrere.*

Nam reſpectu terræ nunc progrediuntur, nunc ſtationarii ſunt, nunc etiam regrediuntur: At Solis reſpectu ſemper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, ſed paulo celerius tamen in Periheliis ac tardius in Apheliis, ſic ut arearum æquabilis ſit deſcriptio. Propoſitio eſt Aſtronomis notiſſima, & in Jove apprimè demonſtratur per Eclipſes Satellitum, quibus Eclipſibus Heliocentricas Planetæ hujus longitudines & diſtantias à Sole determinari diximus.

Hypoth. IX. *Lunam radio ad centrum terræ ducto aream tempori proportionalem deſcribere.*

Patet ex Lunæ motu apparente cum ipſius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus Lunaris aliquantulum à vi Solis, ſed errorum inſenſibiles minutias Phyſicis in hiſce Hypotheſibus negligo.

Prop. I. Theor. I.

Vires, quibus Planetæ circumjoviales perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere centrum Jovis, & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum locorum ab eodem centro.

Patet pars prior Propoſitionis per Hypoth. V. & Prop. II. vel III. Lib. I. & pars poſterior per Hypoth. V. & Corol. 6. Prop. IV. ejuſdem Libri.

Prop. II. Theor. II.

Vires, quibus Planetæ primarii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in Orbibus ſuis retinentur, reſpicere Solem, & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro.

Patet pars prior Propoſitionis per Hypoth. VIII. & Prop. II. Lib. I. & pars poſterior per Hypoth. VII. & Prop. IV. ejuſdem Libri. Accuratiſſimè autem demonſtratur hæc pars Propoſitionis per quietem Apheliorum. Nam aberratio quam minima à ratione duplicata (per Coral. I. Prop. XLV. Lib. I.) motum Apſidum in ſingulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

Prop. III. Theor. III.

Vim qua Luna retinetur in Orbe ſuo reſpicere terram, & eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Patet aſſertionis pars prior, per Hypoth. IX. & Prop. II. vel III. Lib. I. & pars poſterior per motum tardiſſimum Lunaris Apogæi. Nam motus ille, qui ſingulis revolutionibus eſt graduum tantum trium in conſequentia, contemni poteſt. Patet enim, per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I. quod ſi diſtantia Lunæ à centro Terræ dicatur

tur D, vis à qua motus talis oriatur, ſit reciproce ut $D\ 2\frac{4}{243}$, id eſt reciprocè ut ea ipſius D dignitas, cujus index eſt $2\frac{4}{243}$, hoc eſt in ratione diſtantiæ paulo majore quam duplicata inverſe, ſed quæ vicibus $60\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Tantillus autem acceſſus meritò contemnendus eſt. Oritur verò ab actione Solis (uti poſthac dicetur) & propterea hic negligendus eſt. Reſtat igitur ut vis illa, quæ ad Terram ſpectat, ſit reciprocè ut D^2; id quod etiam plenius conſtabit, conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in Propoſitione ſequente.

Prop. IV. Theor. IV.

Lunam gravitare in terram, & vi gravitatis retrahi ſemper à motu rectilineo, & in orbe ſuo retineri.

Lunæ diſtantia mediocris à centro Terræ eſt ſemidiametrorum terreſtrium, ſecundum pleroſque Aſtronomorum 59, ſecundum *Vendelinum* 60, ſecundum *Copernicum* $60\frac{1}{3}$, ſecundum *Kircherum* $62\frac{1}{2}$, & ſecundum *Tychonem* $56\frac{1}{2}$. Aſt *Tycho*, & quotquot ejus Tabulas refractionum ſequuntur, conſtituendo refractiones Solis & Lunæ (omnino contra naturam Lucis) majores quam fixarum, idque ſcrupulis quaſi quatuor vel quinque, auxerunt Parallaxin Lunæ ſcrupulis totidem, hoc eſt quaſi duodecima vel decima quinta parte totius parallaxeos. Corrigatur iſte error, & diſtantia evadet quaſi 61 ſemidiametrorum terreſtrium, fere ut ab aliis aſſignatum eſt. Aſſumamus diſtantiam mediocrem ſexaginta ſemidiametrorum; & Lunarem periodum reſpectu fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab Aſtronomis ſtatuitur; atque ambitum Terræ eſſe pedum Pariſienſium 123249600, uti à Gallis menſurantibus nuper definitum eſt: & ſi Luna motu omni privari fingatur, ac dimitti ut, urgente vi illa omni qua in Orbe ſuo retinetur, deſcendat in terram; hæc ſpatio minuti primi cadendo deſcribet pedes Pariſienſes $15\frac{1}{12}$. Colligitur hoc

hoc ex calculo, vel per Propoſitionem xxxvi Libri primi, vel (quod eodem recedit) per Scholium Propoſitionis quartæ ejuſdem Libri, confecto. Unde cum vis illa accedendo ad terram augeatur in duplicata diſtantiæ ratione inversâ, adeoque ad ſuperficiem Terræ major ſit vicibus 60 x 60 quam ad Lunam, corpus vi illa in regionibus noſtris cadendo deſcribere deberet ſpatio minuti unius primi pedes Pariſienſes 60 x 60 x 15 $\frac{1}{12}$, & ſpatio minuti unius ſecundi pedes 15 $\frac{1}{12}$. Atqui corpora in regionibus noſtris vi gravitatis cadendo deſcribunt tempore minuti unius ſecundi pedes Pariſienſes 15 $\frac{1}{12}$, uti *Hugenius*, factis pendulorum experimentis & computo inde inito, demonſtravit: & propterea vis qua Luna in orbe ſuo retinetur, illa ipſa eſt quam nos gravitatem dicere ſolemus. Nam ſi gravitas ab ea diverſa eſt, corpora viribus utriſque conjunctis Terram petendo duplo velocius deſcendent, & ſpatio minuti unius ſecundi cadendo deſcribent pedes Pariſienſes 30 $\frac{1}{6}$: omnino contra experientiam.

Calculus hic fundatur in Hypotheſi quod Terra quieſcit. Nam ſi Terra & Luna circa Solem moveantur, & interea quoque circa commune gravitatis centrum revolvantur: diſtantia centrorum Lunæ ac Terræ ab invicem erit 60 $\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium; uti computationem (per Prop. LX. Lib. I.) ineunti patebit.

Prop. V. Theor. V.

Planetas circumjoviales gravitare in Jovem, & circumſolares in Solem, & vi gravitatis ſuæ retrahi ſemper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones Planetarum circumjovialium circa Jovem, & Mercurii ac Veneris reliquorumque circumſolarium circa Solem ſunt Phænomena ejuſdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram; & propterea per Hypoth. II. à cauſis ejuſdem generis dependent: præſertim cùm demonſtratum ſit quod vires, à quibus revolutiones illæ dependent, reſpiciant centra Jovis ac Solis, & recedendo

cedendo

cedendo à Jove & Sole decreſcant eadem ratione ac lege, qua vis gravitatis decreſcit in receſſu à Terra.

Corol. 1. Igitur gravitas datur in Planetas univerſos. Nam Venerem, Mercurium cæteroſque eſſe corpora ejuſdem generis cum Jove nemo dubitat. Certe Planeta Hugenianus, eodem argumento quo Satellites Jovis gravitant in Jovem, gravis eſt in Saturnum. Et cum attractio omnis (per motus legem tertiam) mutua ſit, Saturnus viciſſim gravitabit in Planetam Hugenianum. Eodem argumento Jupiter in Satellites ſuos omnes, Terraque in Lunam, & Sol in Planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. Gravitatem, quæ Planetam unumquemque reſpicit, eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Prop. VI. Theor. VI.

Corpora omnia in Planetas ſingulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus diſtantiis à centro Planetæ, proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis.

Deſcenſus gravium omnium in Terram (dempta ſaltem inæquali retardatione quæ ex Aeris perexigua reſiſtentia oritur) æqualibus temporibus fieri jamdudum obſervarunt alii; & accuratiſſimè quidem notare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arena, ſale communi, ligno, aqua, tritico. Comparabam pixides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam ligno, & idem auri pondus ſuſpendebam (quàm potui exactè) in alterius centro oſcillationis. Pixides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes conſtituebant Pendula, quoad pondus, figuram & aeris reſiſtentiam omnino paria: Et paribus oſcillationibus juxta poſitæ ibant unà & redibant diutiſſime. Proinde copia materiæ in auro (per Corol. 1. & 6. Prop. XXIV. Lib. II.) erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad ejuſdem actionem in totum lignum; hoc

eſt

eſt ut pondus ad pondus. Et ſit in cæteris. In corporibus ejuſdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor eſſet quàm pars milleſima materiæ totius, his experimentis manifeſtò deprehendi potuit. Jam verò naturam gravitatis in Planetas eandem eſſe atque in Terram non eſt dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc Terreſtria ad uſque Orbem Lunæ, & una cum Lunâ motu omni privata demitti, ut in Terram ſimul cadant; & per jam ante oſtenſa certum eſt quod temporibus æqualibus deſcribent æqualia Spatia cum Luna, adeoque quod ſunt ad quantitatem materiæ in Luna, ut pondera ſua ad ipſius pondus. Porrò quoniam Satellites Jovis temporibus revolvuntur quæ ſunt in ratione ſeſquialtera diſtantiarum a centro Jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro Jovis; & propterea in æqualibus à Jove diſtantiis eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo deſcriberent æqualia Spatia, perinde ut fit in gravibus, in hac Terra noſtra. Et eodem argumento Planetæ circumſolares ab æqualibus à Sole diſtantiis dimiſſi, deſcenſu ſuo in Solem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, ſunt ut corpora; hoc eſt pondera ut quantitates materiæ in Planetis. Porrò Jovis & ejus Satellitum pondera in Solem proportionalia eſſe quantitatibus materiæ eorum, patet ex motu Satellitum quam maxime regulari; per Corol. 3. Prop. LXV. Lib. I. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in Solem pro quantitate materiæ ſuæ quàm cæteri, motus Satellitum (per Corol. 2. Prop. LXV. Lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si (paribus à Sole diſtantiis) Satelles aliquis gravior eſſet in Solem pro quantitate materiæ ſuæ, quam Jupiter pro quantitate materiæ ſuæ, in ratione quacunque data, puta *d* ad *e*: diſtantia inter centrum Solis & centrum Orbis Satellitis major ſemper foret quam diſtantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione dimidiata quam proximè; uti calculis quibuſdam initis inveni. Et ſi Satelles minus gravis eſſet in Solem in ratione illa *d* ad *e*, diſtantia

centri Orbis Satellitis à Sole minor foret quàm diſtantia centri Jovis à Sole in ratione illa dimidiata. Igitur ſi in æqualibus à Sole diſtantiis, gravitas acceleratrix Satellitis cujuſvis in Solem major eſſet vel minor quàm gravitas acceleratrix Jovis in Solem, parte tantum milleſima gravitatis totius; foret diſtantia centri Orbis Satellitis à Sole major vel minor quàm diſtantia Jovis à Sole parte $\frac{1}{2000}$ diſtantiæ totius, id eſt parte quinta diſtantiæ Satellitis extimi à centro Jovis: Quæ quidem Orbis excentricitas foret valde ſenſibilis. Sed Orbes Satellitum ſunt Jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitum in Solem æquantur inter ſe. Et eodem argumento pondera Saturni & Comitis ejus in Solem, in æqualibus à Sole diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in ipſis: Et pondera Lunæ ac Terræ in Solem vel nulla ſunt, vel earum maſſis accuratè proportionalia.

Quinetiam pondera partium ſingularum Planetæ cujuſque in alium quemcunque ſunt inter ſe ut materia in partibus ſingulis. Nam ſi partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quàm pro quantitate materiæ, Planeta totus, pro genere partium quibus maximè abundet, gravitaret magis vel minus quàm pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ ſint vel internæ. Nam ſi verbi gratia corpora Terreſtria, quæ apud nos ſunt, in Orbem Lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore Lunæ: Si horum pondera eſſent ad pondera partium externarum Lunæ ut quantitates materiæ in iiſdem, ad pondera verò partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus Lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam ſupra oſtenſum eſt.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam ſi cum formis variari poſſent, forent majora vel minora pro varietate formarum in æquali materia: omninò contra experientiam.

Corol. 2. Igitur corpora univerſa quæ circa Terram ſunt, gravia ſunt in Terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro Terræ diſtant, ſunt ut quantitates materiæ in iiſdem. Nam ſi æther

aut

aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omnino deſtitueretur vel pro quantitate materiæ ſuæ minus gravitaret, quoniam id non differt ab aliis corporibus niſi in forma materiæ, poſſet idem per mutationem formæ gradatim tranſmutari in corpus ejuſdem conditionis cum iis quæ pro quantitate materiæ quam maximè gravitant, (per Hypoth. III.) & viciſſim corpora maxime gravia, formam illius gradatim induendo, poſſent gravitatem ſuam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, poſſentque cum formis variari, contra quam probatum eſt in Corollario ſuperiore.

Corol. 3. Itaque Vacuum neceſſariò datur. Nam ſi ſpatia omnia plena eſſent, gravitas ſpecifica fluidi quo regio aeris impleretur, ob ſummam denſitatem materiæ, nil cederet gravitati ſpecificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuſcunque denſiſſimi; & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aere deſcendere poſſet. Nam corpora in fluidis, niſi ſpecificè graviora ſint, minimè deſcendunt.

Corol. 4. Gravitatem diverſi generis eſſe à vi magnetica. Nam attractio magnetica non eſt ut materia attracta. Corpora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Eſtque vis magnetica longe major pro quantitate materiæ quam vis gravitatis: ſed & in eodem corpore intendi poteſt & remitti; in receſſu verò à magnete decreſcit in ratione diſtantiæ pluſquam duplicata; propterea quod vis longe fortior ſit in contactu, quam cum attrahentia vel minimum ſeparantur ab invicem.

Prop. VII. Theor. VII.

Gravitatem in corpora univerſa fieri, eamque proportionalem eſſe quantitati materiæ in ſingulis.

Planetas omnes in ſe mutuò graves eſſe jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque ſeorſim ſpectatum eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à centro Planetæ. Et inde conſequens

eſt, (per Prop. LXIX. Lib.I. & ejus Corollaria) gravitatem in omnes proportionalem eſſe materiæ in iiſdem.

Porrò cum Planetæ cujuſvis *A* partes omnes graves ſint in Planetam quemvis *B*, & gravitas partis cujuſque ſit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius, & actioni omni reactio (per motus Legem tertiam) æqualis ſit; Planeta *B* in partes omnes Planetæ *A* viciſſim gravitabit, & erit gravitas ſua in partem unamquamque ad gravitatem ſuam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Oritur igitur & componitur gravitas in Planetam totum ex gravitate in partes ſingulas. Cujus rei exempla habemus in attractionibus Magneticis & Electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes ſingulas. Res intelligetur in gravitate, concipiendo Planetas plures minores in unum Globum coire & Planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Siquis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos ſunt, hac lege gravitare deberent in ſe mutuò, cùm tamen ejuſmodi gravitas neutiquam ſentiatur: Reſpondeo quod gravitas in hæc corpora, cum ſit ad gravitatem in Terram totam ut ſunt hæc corpora ad Terram totam, longe minor eſt quam quæ ſentiri poſſit.

Corol. 2. Gravitatio in ſingulas corporis particulas æquales eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à particulis. Patet per Corol. 3. Prop. LXXIV. Lib. I.

Prop. VIII. Theor. VIII.

Si Globorum duorum in ſe mutuò gravitantium materia undique, in regionibus quæ à centris æqualiter diſtant, homogenea ſit: erit pondus Globi alterutrius in alterum reciprocè ut quadratum diſtantiæ inter centra.

Poſtquam inveniſſem gravitatem in Planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & eſſe in partes ſingulas reciprocè

pro-

proportionalem quadratis diſtantiarum à partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accuratè in vi tota ex viribus pluribus compoſita, an verò quam proximè. Nam fieri poſſet ut proportio illa in majoribus diſtantiis ſatis obtineret, at prope ſuperficiem Planetæ, ob inæquales particularum diſtantias & ſitus diſſimiles, notabiliter erraret. Tandem verò, per Prop. LXXV. Libri primi & ipſius Corollaria, intellexi veritatem Propoſitionis de qua hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter ſe comparari poſſunt pondera corporum in diverſos Planetas. Nam pondera corporum æqualium circum Planetas in circulis revolventium ſunt (per Prop. IV. Lib. I.) ut diametri circulorum directè & quadrata temporum periodicorum inversè; & pondera ad ſuperficies Planetarum aliasve quaſvis à centro diſtantias majora ſunt vel minora (per hanc Propoſitionem) in duplicata ratione diſtantiarum inverſa. Sic ex temporibus periodicis Veneris circa Solem dierum $224\frac{2}{3}$, Satellitis extimi circumjovialis circa Jovem dierum $16\frac{3}{4}$, Satellitis Hugeniani circa Saturnum dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & Lunæ circa Terram 27 *dier.* 7 *hor.* 43 *min.* collatis cum diſtantia mediocri Veneris à Sole; cum Elongatione maxima Heliocentrica Satellitis extimi circumjovialis, quæ (in mediocri Jovis à Sole diſtantia juxta obſervationes *Flamſtedii*) eſt 8′. 13″; cum elongatione maxima Heliocentrica Satellitis Saturnii 3′. 20″; & cum diſtantia Lunæ à Terra, ex Hypotheſi quod Solis parallaxis horizontalis ſeu ſemidiameter Terræ è Sole viſæ ſit quaſi 20″; calculum ineundo inveni quod corporum æqualium & à Sole, Jove, Saturno ac Terra æqualiter diſtantium pondera in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram forent ad invicem ut 1, $\frac{1}{1100}$, $\frac{2}{2360}$ & $\frac{1}{28700}$ reſpectivè. Eſt autem Solis ſemidiameter mediocris apparens quaſi 16′. 6″. Illam Jovis è Sole viſam *Flamſtedius*, ex umbræ Jovialis diametro per Eclipſes Satellitum inventa, determinavit eſſe ad elongationem Satellitis extimi ut 1 ad 24,9 adeoque cum elongatio illa ſit 8′. 13″ ſemidiameter Jovis è Sole viſi erit $19''\frac{3}{4}$. Diameter Saturni eſt

eſt ad diametrum Annuli ejus ut 4 ad 9, & diameter annuli è Sole viſi (menſurante *Flamſtedio*) 50″, adeoque ſemidiameter Saturni è Sole viſi 11″. Malim dicere 10″ vel 9″, propterea quod globus Saturni per lucis inæqualem refrangibilitatem nonnihil dilatatur. Hinc inito calculo prodeunt veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ ſemidiametri ad invicem ut 10000, 1063, 889, & 208. Unde cum pondera æqualium corporum à centris Solis, Jovis, Saturni ac Telluris æqualiter diſtantium ſint in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram ut 1, $\frac{1}{1100}$, $\frac{1}{2360}$, $\frac{1}{28700}$ reſpective, & auctis vel diminutis diſtantiis diminuuntur vel augentur pondera in duplicata ratione; erunt pondera eorundem æqualium corporum in Solem, Jovem, Saturnum & Terram, in diſtantiis 10000, 1063, 889 & 208 ab eorum centris, atque adeo in eorum ſuperficiebus verſantium, ut 10000, $804\frac{1}{2}$, 536 & $805\frac{1}{2}$ reſpectivè. Pondera corporum in ſuperficie Lunæ ferè duplo minora eſſe quam pondera corporum in ſuperficie Terræ dicemus in ſequentibus.

Corol. 2. Igitur pondera corporum æqualium, in ſuperficiebus Terræ & Planetarum, ſunt fere in ratione dimidiata diametrorum apparentium è Sole viſarum. De Terræ quidem diametro è Sole viſa nondum conſtat. Hanc aſſumpſi 40″, propterea quod obſervationes *Kepleri*, *Riccioli* & *Vendelini* non multo majorem eſſe permittunt; eam *Horroxii* & *Flamſtedii* obſervationes paulo minorem adſtruere videntur. Et malui in exceſſu peccare. Quòd ſi fortè diameter illa & gravitas in ſuperficie Terræ mediocris ſit inter diametros Planetarum & gravitatem in eorum ſuperficiebus: quoniam Saturni, Jovis, Martis, Veneris & Mercurii è Sole viſorum diametri ſunt 18″, $39''\frac{1}{2}$, 8″, 28″, 20″ circiter, erit diameter Terræ quaſi 24″, adeoque Parallaxis Solis quaſi 12″, ut *Horroxius* & *Flamſtedius* propemodum ſtatuere. Sed diameter paulo major melius congruit cum Regula hujus Corollarii.

Corol. 3. Innoteſcit etiam quantitas materiæ in Planetis ſingulis. Nam quantitates illæ ſunt ut Planetarum Vires in diſtantiis à ſe æqualibus; id eſt in Sole, Jove, Saturno ac Terra ut 1,

$\frac{1}{1000}$,

$\frac{1}{1100}$, $\frac{1}{2360}$, $\frac{1}{28700}$ reſpectivè. Si Parallaxis Solis ſtatuatur minor quàm 20″, debebit quantitas materiæ in Terra diminui in triplicata ratione.

Corol. 4. Innoteſcunt etiam denſitates Planetarum. Nam corporum æqualium & homogeneorum pondera in Sphæras homogeneas in ſuperficiebus Sphærarum, ſunt ut Sphærarum diametri per Prop. LXXII. Lib. I. ideoque Sphærarum heterogenearum denſitates ſunt ut pondera applicata ad diametros. Erant autem veræ Solis, Saturni, Jovis ac Terræ diametri ad invicem ut 10000, 889, 1063 & 208, & pondera in eoſdem ut 10000, 536, 804$\frac{1}{2}$ & 805$\frac{1}{2}$, & propterea denſitates ſunt ut 100, 60, 76, 387. Denſitas autem Terræ, quæ hic colligitur, non pendet à Parallaxi Solis, ſed determinatur per parallaxin Lunæ, & propterea hic recte definitur. Eſt igitur Sol paulo denſior quàm Jupiter, & Terra multo denſior quàm Sol.

Corol. 5. Planetarum autem denſitates inter ſe fere ſunt in ratione compoſita ex ratione diſtantiarum à Sole & ratione dimidiata diametrorum apparentium è Sole viſarum. Nempe Saturni, Jovis, Terræ & Lunæ denſitates 60, 76, 387 & 700, fere ſunt ut diſtantiarum reciproca $\frac{1}{9538}$, $\frac{1}{5201}$, $\frac{1}{1000}$ & $\frac{1}{1000}$, ducta in radices diametrorum apparentium 18″, 39″$\frac{1}{2}$, 40″, & 11″. Diximus utique, in Corollario ſecundo, gravitatem ad ſuperficies Planetarum eſſe quam proximè in ratione dimidiata apparentium diametrorum è Sole viſarum; & in Lemmate quarto denſitates eſſe ut gravitates illæ applicatæ ad diametros veras: ideoque denſitates fere ſunt ut radices diametrorum apparentium applicatæ ad diametros veras, hoc eſt reciproce ut diſtantiæ Planetarum à Sole ductæ in radices diametrorum apparentium. Collocavit igitur Deus Planetas in diverſis diſtantiis à Sole, ut quilibet pro gradu denſitatis calore Solis majore vel minore fruatur. Aqua noſtra, ſi Terra locaretur in orbe Saturni, rigeſceret, ſi in orbe Mercurii in vapores ſtatim abiret. Nam lux Solis, cui calor proportionalis eſt, ſeptuplo denſior eſt in orbe Mercurii quàm apud nos: & Thermometro

mometro expertus ſum quod ſeptuplo Solis æſtivi calore aqua ebullit. Dubium verò non eſt quin materia Mercurii ad calorem accommodetur, & propterea denſior ſit hac noſtra; cum materia omnis denſior ad operationes Naturales obeundas majorem calorem requirat.

Prop. IX. Theor. IX.

Gravitatem pergendo à ſuperficiebus Planetarum deorſum decreſcere in ratione diſtantiarum à centro quam proximè.

Si materia Planetæ quoad denſitatem uniformis eſſet, obtineret hæc Propoſitio accuratè: per Prop. LXXIII. Lib. I. Error igitur tantus eſt, quantus ab inæquabili denſitate oriri poſſit.

Prop. X. Theor. X.

Motus Planetarum in Cœlis diutiſſimè conſervari poſſe.

In Scholio Propoſitionis XL. Lib. II. oſtenſum eſt quod globus Aquæ congelatæ in Aere noſtro, liberè movendo & longitudinem ſemidiametri ſuæ deſcribendo, ex reſiſtentia Aeris amitteret motus ſui partem $\frac{1}{32000}$. Obtinet autem eadem proportio quam proximè (per Prop. XL. Lib. II.) in globis utcunque magnis & velocibus. Jam verò Globum Terræ noſtræ denſiorem eſſe quam ſi totus ex Aqua conſtaret, ſic colligo. Si Globus hicce totus eſſet aqueus, quæcunque rariora eſſent quàm aqua, ob minorem ſpecificam gravitatem emergerent & ſupernatarent. Eaque de cauſa Globus terreus aquis undique coopertus, ſi rarior eſſet quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppoſita. Et par eſt ratio Terræ noſtræ maribus magna ex parte circumdatæ. Hæc ſi denſior non eſſet, emergeret ex maribus, & parte ſui pro gradu levitatis extaret ex Aqua, maribus omnibus in

regionem

regionem oppoſitam confluentibus. Eodem argumento maculæ Solares leviores ſunt quàm materia lucida Solaris cui ſupernatant. Et in formatione qualicunque Planetarum, materia omnis gravior, quo tempore maſſa tota fluida erat, centrum petebat. Unde cum Terra communis ſuprema quaſi duplo gravior ſit quam aqua, & paulo inferius in fodinis quaſi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: veriſimile eſt quòd copia materiæ totius in Terra quaſi quintuplo vel ſextuplo major ſit quàm ſi tota ex aqua conſtaret; præſertim cum Terram quaſi quintuplo denſiorem eſſe quàm Jovem jam ante oſtenſum ſit. Igitur ſi Jupiter paulo denſior ſit quàm aqua, hic ſpatio dierum viginti & unius, quibus longitudinem 320 ſemidiametrorum ſuarum deſcribit, amitteret in Medio ejuſdem denſitatis cum Aere noſtro motus ſui partem fere decimam. Verum cum reſiſtentia Mediorum minuatur in ratione ponderis ac denſitatis, ſic ut aqua, quæ vicibus $13\frac{2}{3}$ levior eſt quàm argentum vivum, minus reſiſtat in eadem ratione; & aer, qui vicibus 800 levior eſt quàm aqua, minus reſiſtat in eadem ratione: ſi aſcendatur in cœlos ubi pondus Medii, in quo Planetæ moventur, diminuitur in immenſum, reſiſtentia prope ceſſabit.

Prop. XI. Theor. XI.

Commune centrum gravitatis Terræ Solis & Planetarum omnium quieſcere.

Nam centrum illud (per Legum Corol. 4.) vel quieſcet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo ſemper progrediente, centrum Mundi quoque movebitur contra Hypotheſin quartam.

Prop. XII. Theor. XII.

Solem motu perpetuo agitari ſed nunquam longe recedere à communi gravitatis centro Planetarum omnium.

Nam cum, per Corol. 3. Prop. VIII. materia in Sole ſit ad materiam in Jove ut 1100 ad 1, & diſtantia Jovis à Sole ſit ad ſemediametrum Solis in eadem ratione circiter; commune centrum gravitatis Jovis & Solis incidet fere in ſuperficiem Solis. Eodem argumento cùm materia in Sole ſit ad materiam in Saturno ut 2360 ad 1, & diſtantia Saturni à Sole ſit ad ſemidiametrum Solis in ratione paulo minori: incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra ſuperficiem Solis. Et ejuſdem calculi veſtigiis inſiſtendo ſi Terra & Planetæ omnes ex una Solis parte conſiſterent, commune omnium centrum gravitatis vix integra Solis diametro à centro Solis diſtaret. Aliis in caſibus diſtantia centrorum ſemper minor eſt. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuo quieſcit, Sol pro vario Planetarum ſitu in omnes partes movebitur, ſed à centro illo nunquam longe recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis & Planetarum omnium pro centro Mundi habendum eſt. Nam cùm Terra, Sol & Planetæ omnes gravitent in ſe mutuò, & propterea, pro vi gravitatis ſuæ, ſecundum leges motûs perpetuò agitentur: perſpicuum eſt quod horum centra mobilia pro Mundi centro quieſcente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum eſſet in quod corpora omnia maximè gravitant (uti vulgi eſt opinio) privilegium iſtud concedendum eſſet Soli. Cum autem Sol moveatur, eligendum erit punctum quieſcens, à quo centrum Solis quam minimè diſcedit, & à quo idem adhuc minus diſcederet, ſi modò Sol denſior eſſet & major, ut minus moveretur.

Prop.

Prop. XIII. Theor. XIII.

Planetæ moventur in Ellipſibus umbilicum habentibus in centro Solis, & radiis ad centrum illud ductis areas deſcribunt temporibus proportionales.

Diſputavimus ſupra de his motibus ex Phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœleſtes à priori. Quoniam pondera Planetarum in Solem ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro Solis; ſi Sol quieſceret & Planetæ reliqui non agerent in ſe mutuò, forent orbes eorum Elliptici, Solem in umbilico communi habentes, & areæ deſcriberentur temporibus proportionales (per Prop. I. & XI, & Corol. 1. Prop. XIII. Lib. I.) Actiones autem Planetarum in ſe mutuò perexiguæ ſunt (ut poſſint contemni) & motus Planetarum in Ellipſibus circa Solem mobilem minus perturbant (per Prop. LXVI. Lib. I.) quàm ſi motus iſti circa Solem quieſcentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non eſt omnino contemnenda. Nam gravitas in Jovem eſt ad gravitatem in Solem (paribus diſtantiis) ut 1 ad 1100; adeoque in conjunctione Jovis & Saturni, quoniam diſtantia Saturni à Jove eſt ad diſtantiam Saturni à Sole fere ut 4 ad 9, erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in Solem ut 81 ad 16x1100 ſeu 1 ad 217 circiter. Error tamen omnis in motu Saturni circa Solem, à tanta in Jovem gravitate oriundus, evitari fere poteſt conſtituendo umbilicum Orbis Saturni in communi centro gravitatis Jovis & Solis (per Prop. LXVII. Lib. I.) & propterea ubi maximus eſt vix ſuperat minutos duos primos. In conjunctione autem Jovis & Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum & Jovis in Solem ſunt fere ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 2360}{25}$ ſeu 122342, adeoque differentia gravitatum Solis in Saturnum & Jovis in Saturnum eſt ad gravitatem Jovis in Solem ut 65 ad 122342 ſeu 1 ad 1867.

Huic autem differentiæ proportionalis eſt maxima Saturni efficacia ad perturbandum motum Jovis, & propterea perturbatio orbis Jovialis longe minor eſt quàm ea Saturnii. Reliquorum orbium perturbationes ſunt adhuc longe minores.

Prop. XIV. Theor. XIV.

Orbium Aphelia & Nodi quieſcunt.

Aphelia quieſcunt, per Prop. XI. Lib. I. ut & orbium plana, per ejuſdem Libri Prop. I. & quieſcentibus planis quieſcunt Nodi. Attamen à Planetarum revolventium & Cometarum actionibus in ſe invicem orientur inæqualitates aliquæ, ſed quæ ob parvitatem contemni poſſunt.

Corol. 1. Quieſcunt etiam Stellæ fixæ, propterea quod datas ad Aphelia Nodoſque poſitiones ſervant.

Corol. 2. Ideoque cum nulla ſit earum parallaxis ſenſibilis ex Terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immenſam corporum diſtantiam nullos edent ſenſibiles effectus in regione Syſtematis noſtri.

Prop. XV. Theor. XV.

Invenire Orbium tranſverſas diametros.

Capiendæ ſunt hæ in ratione ſeſquialtera temporum periodicorum, per Prop. XV. Lib. I. deinde ſigillatim augendæ in ratione ſummæ maſſarum Solis & Planetæ cujuſque revolventis ad primam duarum mediè proportionalium inter ſummam illam & Solem, per Prop. LX. Lib. 1.

Prop. XVI. Prob. I.

Invenire Orbium Excentricitates & Aphelia.

Problema conſit per Prop. XVIII. Lib. I.

Prop. XVII. Theor. XVI.

Planetarum motus diurnos uniformes eſſe, & librationem Lunæ ex ipſius motu diurno oriri.

Patet per motus Legem I, & Corol. 22. Prop. LXVI. Lib. I. Quoniam verò Lunæ,circa axem ſuum uniformiter revolventis, dies menſtruus eſt; hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ipſius ſemper reſpiciet, & propterea pro ſitu umbilici illius deviabit hinc inde à Terra. Hæc eſt libratio in longitudinem. Nam libratio in latitudinem orta eſt ex inclinatione axis Lunaris ad planum orbis. Porrò hæc ita ſe habere, ex Phænomenis manifeſtum eſt.

Prop. XVIII. Theor. XVII.

Axes Planetarum diametris quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur minores eſſe.

Planetæ ſublato omni motu circulari diurno figuram Sphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem aſcendere conentur. Ideoque materia ſi fluida ſit aſcenſu ſuo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò deſcenſu ſuo ad polos diminuet. Sic Jovis diameter (conſentientibus obſervationibus *Caſſini* & *Flamſtedii*) brevior deprehenditur inter polos quàm ab oriente in occidentem. Eodem argumento, niſi Terra noſtra

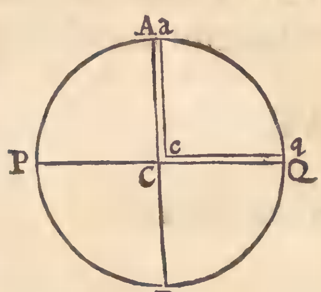
pau-

paulò altior eſſet ſub æquatore quàm ad polos, Maria ad polos ſubſiderent, & juxta æquatorem aſcendendo, ibi omnia inundarent.

Prop. XIX. Prob. II.

Invenire proportionem axis Planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Ad hujus Problematis ſolutionem requiritur computatio multiplex, quæ facilius exemplis quàm præceptis addiſcitur. Inito igitur calculo invenio, per Prop. IV. Lib. I. quod vis centrifuga partium Terræ ſub æquatore, ex motu diurno oriunda, ſit ad vim gravitatis ut 1 ad $290\frac{4}{5}$. Unde ſi *APBQ* figuram Terræ deſignet revolutione Ellipſeos circa axem minorem *PQ* genitam; ſitque *ACQqca* canalis aquæ plena, à polo *Qq* ad centrum *Cc*, & inde ad æquatorem *Aa* pergens: debebit pondus aquæ in canalis crure *ACca* eſſe ad pondus aquæ in crure altero *QCcq* ut 291 ad 290, eò quòd vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam è ponderis partibus 291 ſuſtinebit & detrahet, & pondus 290 in altero crure ſuſtinebit partes reliquas. Porrò (ex Propoſitionis XCI. Corollario ſecundo, Lib. I.) computationem ineundo, invenio quod ſi Terra conſtaret ex uniformi materia, motuque omni privaretur, & eſſet ejus axis *PQ* ad diametrum *AB* ut 100 ad 101: gravitas in loco *Q* in Terram, foret ad gravitatem in eodem loco *Q* in ſphæram centro *C* radio *PC* vel *QC* deſcriptam, ut $126\frac{2}{15}$ ad $125\frac{2}{15}$. Et eodem argumento gravitas in loco *A* in Sphæroidem, convolutione Ellipſeos *APBQ* circa axem *AB* deſcriptam, eſt ad gravitatem in eodem loco *A* in Sphæram centro *C* radio *AC* deſcriptam, ut $125\frac{2}{15}$ ad $126\frac{2}{15}$. Eſt autem gravitas in loco *A* in Terram, media proportionalis inter gravitates in dictam Sphæroidem & Sphæram, propterea quod Sphæ-



Sphæra, diminuendo diametrum *PQ* in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram Terræ; & hæc figura diminuendo in eadem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus *AP*, *PQ* perpendicularis eſt, vertitur in dictam Sphæroidem, & gravitas in *A*, in caſu utroque, diminuitur in eadem ratione quam proximè. Eſt igitur gravitas in *A* in Sphæram centro *C* radio *AC* deſcriptam, ad gravitatem in *A* in Terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$, & gravitas in loco *Q* in Sphæram centro *C* radio *QC* deſcriptam, eſt ad gravitatem in loco *A* in Sphæram centro *C* radio *AC* deſcriptam, in ratione diametrorum (per Prop. LXXII. Lib. I.) id eſt ut 100 ad 101: Conjungantur jam hæ tres rationes, $126\frac{2}{15}$ ad $125\frac{2}{15}$, $125\frac{1}{2}$ ad 126 & 100 ad 101 & fiet gravitas in loco *Q* in Terram ad gravitatem in loco *A* in Terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, ſeu ut 501 ad 500.

Jam cum per Corol. 3. Prop. XCI. Lib. I. gravitas in canalis crure utrovis *ACca* vel *QCcq* ſit ut diſtantia locorum à centro Terræ; ſi crura illa ſuperficiebus tranſverſis & æquidiſtantibus diſtinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium ſingularum in crure *ACca* ad pondera partium totidem in crure altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim; id eſt ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc eſt ut 505 ad 501. Ac proinde ſi vis centrifuga partis cujuſque in crure *ACca* ex motu diurno oriunda, fuiſſet ad pondus partis ejuſdem ut 4 ad 505, eò ut de pondere partis cujuſque, in partes 505 diviſo, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum conſiſteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujuſque eſt ad pondus ejuſdem ut 1 ad 290. Hoc eſt, vis centripeta quæ deberet eſſe ponderis pars $\frac{4}{505}$ eſt tantum pars $\frac{1}{290}$, & propterea dico, ſecundum Regulam auream, quod ſi vis centrifuga $\frac{4}{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure *ACca* ſuperet altitudinem aquæ in crure *QCcq* parte centeſima totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{290}$ faciet ut exceſſus altitudinis in crure *ACca* ſit altitudinis in crure altero *QCcq* pars tantum $\frac{3}{689}$. Eſt igitur diameter Terræ ſecundum æquatorem

ad

ad ipſius diametrum per polos ut 692 ad 689. Ideoque cùm Terræ ſemidiameter mediocris, juxta nuperam Gallorum menſuram, ſit pedum Pariſienſium 19615800 ſeu milliarium 3923 (poſito quod milliare ſit menſura pedum 5000;) Terra altior erit ad æquatorem quàm ad polos, exceſſu pedum 85200 ſeu milliarium 17.

Si Planeta vel major ſit vel denſior, minorve aut rarior quàm Terra, manente tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum ſecundum æquatorem. At ſi motus diurnus in ratione quacunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicata illa ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur in eadem duplicata ratione. Unde cum Terra reſpectu fixarum revolvatur horis 23, 56′, *Jupiter* autem horis 9, 56′, ſintque temporum quadrata ut 29 ad 5, differentia diametrorum *Jovis* erit ad ipſius diametrum minorem ut $\frac{29 \times 3}{5 \times 689}$ ad 1, ſeu 1 ad $39\frac{3}{5}$. Eſt igitur diameter *Jovis* ab oriente in occidentem ducta, ad ipſius diametrum inter polos ut $40\frac{3}{5}$ ad $39\frac{3}{5}$ quam proximè. Hæc ita ſe habent ex Hypotheſi quod uniformis ſit Planetarum materia. Nam ſi materia denſior ſit ad centrum quàm ad circumferentiam, diameter, quæ ab oriente in occidentem ducitur, erit adhuc major.

Prop. XX. Prob. III.

Invenire & inter ſe comparare pondera corporum in regionibus diverſis.

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ *ACQqca* æqualia ſunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & ſimiliter in totis ſitarum, ſunt ad invicem ut pondera totorum, adeoque etiam æquantur inter ſe; erunt pondera æqualium & in cruribus ſimiliter ſitarum partium reciprocè ut crura, id eſt reciprocè ut 692 ad 689. Et par eſt ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus ſimiliter ſitorum corporum. Horum pon-

pondera ſunt reciprocè ut crura, id eſt reciprocè ut diſtantiæ corporum à centro Terræ. Proinde ſi corpora in ſupremis canalium partibus, ſive in ſuperficie Terræ conſiſtant; erunt pondera eorum ad invicem reciprocè ut diſtantiæ eorum à centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuſcunque per totam Terræ ſuperficiem regionibus, ſunt reciprocè ut diſtantiæ locorum à centro; & propterea, ex Hypotheſi quod Terra Sphærois ſit, dantur proportione.

Unde tale confit Theorema, quod incrementum ponderis, pergendo ab Æquatore ad Polos, ſit quam proximè ut Sinus verſus latitudinis duplicatæ, vel quod perinde eſt ut quadratum Sinus recti Latitudinis. Exempli gratia, Latitudo *Lutetiæ Pariſiorum* eſt 48 *gr.* 45′: Ea Inſulæ *Goree* prope *Cape Verde* 14 *gr.* 15′: ea *Cayennæ* ad littus *Guaianæ* quaſi 5 *gr.* ea locorum ſub Polo 90 *gr.* Duplorum $97\frac{1}{2}$ *gr.* $28\frac{1}{2}$ *gr.* 10 *gr.* & 180 *gr.* Sinus verſi ſunt 11305, 1211, 152, & 20000. Proinde cum gravitas in Polo ſit ad gravitatem ſub Æquatore ut 692 ad 689, & exceſſus ille gravitatis ſub Polo ad gravitatem ſub Æquatore ut 3 ad 689; erit exceſſus gravitatis *Lutetiæ*, in Inſula *Goree* & *Cayennæ*, ad gravitatem ſub æquatore ut $\frac{3\times11305}{20000}$, $\frac{3\times1211}{20000}$ & $\frac{3\times152}{20000}$ ad 689, ſeu 33915, 3633, & 456 ad 13780000, & propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 13813915, 13783633, 13780456 & 13780000. Quare cum longitudines Pendulorum æqualibus temporibus oſcillantium ſint ut gravitates, & *Lutetiæ Pariſiorum* longitudo penduli ſingulis minutis ſecundis oſcillantis ſit pedum trium Pariſienſium & $\frac{17}{24}$ partium digiti; longitudines Pendulorum in Inſulâ *Goree*, in illâ *Cayennæ* & ſub Æquatore, minutis ſingulis ſecundis oſcillantium ſuperabuntur à longitudine Penduli Pariſienſis exceſſibus $\frac{81}{1000}$, $\frac{89}{1000}$ & $\frac{90}{1000}$ partium digiti. Hæc omnia ita ſe habebunt, ex Hypotheſi quod Terra ex uniformi materia conſtat. Nam ſi materia ad centrum paulò denſior ſit quàm ad ſuperficiem, exceſſus illi erunt paulò majores; propterea quod, ſi materia ad centrum redundans, qua denſitas ibi major redditur, ſubducatur & ſeorſim ſpectetur, gravitas in Terram reliquam uniformiter denſam erit

reciprocè ut diſtantia ponderis à centro; in materiam verò redundantem reciprocè ut quadratum diſtantiæ à materia illa quam proximè. Gravitas igitur ſub æquatore minor erit in materiam illam redundantem quàm pro computo ſuperiore, & propterea Terra ibi propter defectum gravitatis paulò altius aſcendet quàm in præcedentibus definitum eſt. Jam verò Galli factis experimentis invenerunt quod Pendulorum minutis ſingulis ſecundis oſcillantium longitudo *Pariſiis* major ſit quàm in Inſula *Goree*, parte decima digiti, & major quàm *Cayennæ* parte octava. Paulò majores ſunt hæ differentiæ quam differentiæ $\frac{81}{1000}$ & $\frac{89}{1000}$ quæ per computationem ſuperiorem prodiere: & propterea (ſi craſſis hiſce Obſervationibus ſatìs confidendum ſit) Terra aliquanto altior erit ſub æquatore quàm pro ſuperiore calculo, & denſior ad centrum quàm in fodinis prope ſuperficiem. Si exceſſus gravitatis in locis hiſce Borealibus ſupra gravitatem ad æquatorem, experimentis majori cum diligentia inſtitutis, accuratè tandem determinetur, deinde exceſſus ejus ubique ſumatur in ratione Sinus verſi latitudinis duplicatæ; determinabitur tum Menſura Univerſalis, tum Æquatio temporis per æqualia pendula in locis diverſis indicati, tum etiam proportio diametrorum Terræ ac denſitas ejus ad centrum; ex Hypotheſi quod denſitas illa, pergendo ad circumferentiam, uniformiter decreſcat. Quæ quidem Hypotheſis, licet accurata non ſit, ad ineundum tamen calculum aſſumi poteſt.

Prop. XXI. Theor. XVIII.

Puncta Æquinoctialia regredi, & axem Terræ ſingulis revolutionibus nutando bis inclinari in Eclipticam & bis redire ad poſitionem priorem.

Patet per Corol. 20. Prop. LXVI. Lib. I. Motus tamen iſte nutandi perexiguus eſſe debet, & vix aut ne vix quidem ſenſibilis.

Prop. XXII. Theor. XIX.

Motus omnes Lunares, omneſque motuum inæqualitates ex allatis Principiis conſequi.

Planetas majores, interea dum circa Solem feruntur, poſſe alios minores circum ſe revolventes Planetas deferre, & minores illos in Ellipſibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per Prop. LXV. Lib. I. Actione autem Solis perturbabuntur eorum motus multimode, iiſque adficientur inæqualitatibus quæ in Luna noſtra notantur. Hæc utique (per Corol. 2, 3, 4, & 5 Prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad Terram ducto deſcribit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvam, atque adeò propius accedit ad Terram, in Syzygiis quàm in Quadraturis, niſi quatenus impedit motus Excentricitatis. Excentricitas enim maxima eſt (per Corol. 9. Prop. LXVI.) ubi Apogæum Lunæ in Syzygiis verſatur, & minima ubi idem in Quadraturis conſiſtit; & inde Luna in Perigæo velocior eſt & nobis propior, in Apogæo autem tardior & remotior in Syzygiis quàm in Quadraturis. Progreditur inſuper Apogæum, & regrediuntur Nodi, ſed motu inæquabili. Et Apogæum quidem (per Corol. 7 & 8 Prop. LXVI.) velocius progreditur in Syzygiis ſuis, tardius regreditur in Quadraturis, & exceſſu progreſſus ſupra regreſſum annuatim fertur in conſequentia. Nodi autem (per Corol. 11. Prop. LXVI.) quieſcunt in Syzygiis ſuis, & velociſſimè regrediuntur in Quadraturis. Sed & major eſt Lunæ latitudo maxima in ipſius Quadraturis (per Corol. 10. Prop. LXVI.) quàm in Syzygiis: & motus medius velocior in Perihelio Terræ (per Corol. 6. Prop. LXVI.) quàm in ipſius Aphelio. Atque hæ ſunt inæqualitates inſigniores ab Aſtronomis notatæ.

Sunt etiam aliæ quædam nondum obſervatæ inæqualitates, quibus motus Lunares adeò perturbantur, ut nulla hactenus lege ad Re-

gulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates enim ſeu motus horarii Apogæi & Nodorum Lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter excentricitatem maximam in Syzygiis & minimam in Quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicata ratione diametri apparentis Solaris. Et Variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicata ratione temporis inter quadraturas quam proximè (per Corol. 1 & 2. Lem. X. & Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) Sed hæc inæqualitas in calculo Aſtronomico, ad Proſtaphæreſin Lunæ referri ſolet, & cum ea confundi.

Prop. XXIII. Prob. IV.

Motus inæquales Satellitum Jovis & Saturni à motibus Lunaribus derivare.

Ex motibus Lunæ noſtræ motus analogi Lunarum ſeu Satellitum Jovis ſic derivantur. Motus medius Nodorum Satellitis extimi Jovialis eſt ad motum medium Nodorum Lunæ noſtræ, in ratione compoſita ex ratione duplicata temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione ſimplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione ſimplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram: (per Corol. 16. Prop. LXVI.) adeoque annis centum conficit Nodus iſte 9*gr.* 34'. in antecedentia. Motus medii Nodorum Satellitum interiorum ſunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus, per idem Corollarium, & inde dantur. Motus autem Augis Satellitis cujuſque in conſequentia eſt ad motum Nodorum ipſius in antecedentia ut motus Apogæi Lunæ noſtræ ad hujus motum Nodorum (per idem Corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus Augis ſic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob cauſam quam hic exponere non vacat.

Æqua-

Æquationes maximæ Nodorum & Augis Satellitis cujuſque fere ſunt ad æquationes maximas Nodorum & Augis Lunæ reſpectivè, ut motus Nodorum & Augis Satellitum, tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus Nodorum & Apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum poſteriorum. Variatio Satellitis è Jove ſpectati, eſt ad Variationem Lunæ ut ſunt toti motus Nodorum temporibus periodicis Satellitis & Lunæ ad invicem, per idem Corollarium, adeoque in Satellite extimo non ſuperat 6″. 22‴. Parvitate harum inæqualitatum & tarditate motuum fit ut motus Satellitum ſummè regulares reperiantur, utque Aſtronomi recentiores aut motum omnem Nodis denegent, aut afferant tardiſſimè retrogradum. Nam *Flamſtedius* collatis ſuis cum *Caſſini* Obſervationibus Nodos tarde regredi deprehendit.

Prop. XXIV. Theor. XX.

Fluxum & refluxum Maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri debere.

Mare ſingulis diebus tam Lunaribus quàm Solaribus bis intumeſcere debere ac bis defluere patet per Corol. 19. Prop. LXVI. Lib. I. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulſum Luminarium ad Meridianum loci minori quàm ſex horarum ſpatio ſequi, uti fit in Maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & Promontorium *Bonæ Spei*, ut & in Maris *Pacifici* littore *Chilenſi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æſtus in horam circiter tertiam incidit, niſi ubi motus per loca vadoſa propagatus aliquantulum retardatur. Horas numero ab appulſu Luminaris utriuſque ad Meridianum loci, tam infra Horizontem quàm ſupra, & per horas diei Lunaris intelligo vigeſimas quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad Meridianum loci revolvitur.

Motus autem bini, quos Luminaria duo excitant, non cernentur diſtinctè, ſed motum quendam mixtum efficient. In Luminarium

Con-

Conjunctione vel Oppoſitione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In Quadraturis Sol attollet aquam ubi Luna deprimit, deprimetque ubi Sol attollit; & ex effectuum differentia æſtus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientia teſte, major eſt effectus Lunæ quàm Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra Syzygias & Quadraturas, æſtus maximus qui ſola vi Lunari incidere ſemper deberet in horam tertiam Lunarem, & ſola Solari in tertiam Solarem, compoſitis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ Lunari propinquius eſt; adeoque in tranſitu Lunæ à Syzygiis ad Quadraturas, ubi hora tertia Solaris præcedit tertiam Lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam Lunarem, idque maximo intervallo paulo poſt Octantes Lunæ; & paribus intervallis æſtus maximus ſequetur horam tertiam Lunarem in tranſitu Lunæ à Quadraturis ad Syzygias. Hæc ita ſunt in mari aperto. Nam in oſtiis Fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀκμὴν venient.

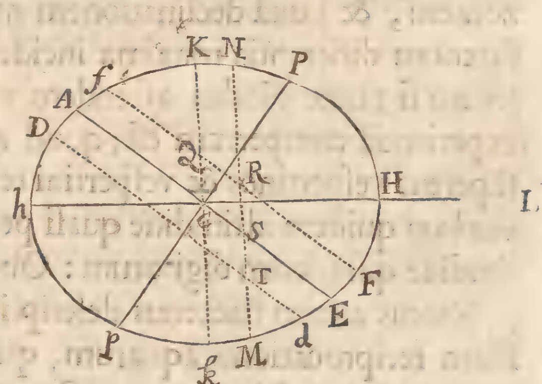
Pendent autem effectus Luminarium ex eorum diſtantiis à Terra. In minoribus enim diſtantiis majores ſunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in Perigæo exiſtens, majores edit effectus, efficitque ut æſtus in Syzygiis paulo majores ſint, & in Quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quàm tempore æſtivo; & Luna in Perigæo ſingulis menſibus majores ciet æſtus quàm ante vel poſt dies quindecim, ubi in Apogæo verſatur. Unde fit ut æſtus duo omnino maximi in Syzygiis continuis ſe mutuo non ſequantur.

Pendet etiam effectus utriuſque Luminaris ex ipſius Declinatione ſeu diſtantia ab Æquatore. Nam ſi Luminare in polo conſtitueretur, traheret illud ſingulas aquæ partes conſtanter, abſque actionis intenſione & remiſſione, adeoque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur Luminaria recedendo ab æquatore polum verſus effectus ſuos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æſtus

in

in Syzygiis Solſtitialibus quàm in Æquinoctialibus. In Quadraturis autem Solſtitialibus majores ciebunt æſtus quàm in Quadraturis Æquinoctialibus; eò quod Lunæ jam in æquatore conſtitutæ effectus maximè ſuperat effectum Solis. Incidunt igitur æſtus maximi in Syzygias & minimi in Quadraturas Luminarium, circa tempora Æquinoctii utriuſque. Et æſtum maximum in Syzygiis comitatur ſemper minimus in Quadraturis, ut experientiâ compertum eſt. Per minorem autem diſtantiam Solis à Terra, tempore hyberno quàm tempore æſtivo, fit ut æſtus maximi & minimi ſæpius præcedant Æquinoctium vernum quàm ſequantur, & ſæpius ſequantur autumnale quàm præcedant.

Pendent etiam effectus Luminarium ex locorum latitudine. Deſignet *ApEP* Tellurem aquis profundis undique coopertam; *C* centrum ejus; *P p*, polos; *AE* Æquatorem; *F* locum quemvis extra Æquatorem; *Ff* parallelum loci; *Dd* parallelum ei reſpondentem ex altera parte æquatoris; *L* locum quem Luna tribus ante horis occupabat; *H* locum Telluris ei perpendiculariter ſubjectum; *h* locum huic oppoſitum; *K*, *k* loca inde gradibus 90 diſtantia, *CH*, *Ch* Maris altitudines maximas menſuratas à centro Telluris; & *CK*, *Ck* altitudines minimas: & ſi axibus *Hh*, *Kk* deſcribatur Ellipſis, deinde Ellipſeos hujus revolutione circa axem majorem *Hh* deſcribatur Sphærois *HPKhpk*; deſignabit hæc figuram Maris quam proximè, & erunt *CF*, *Cf*, *CD*, *Cd* altitudines Maris in locis *F*, *f*, *D*, *d*. Quinetiam ſi in præfata Ellipſeos revolutione punctum quodvis *N* deſcribat circulum *NM*, ſecantem parallelos *Ff*, *Dd* in locis quibuſvis *R*, *T*, & æquatorem *AE* in *S*; erit *CN* altitudo Maris in locis omnibus *R*, *S*, *T*, ſitis in hoc circulo. Hinc in



revo-

revolutione diurna loci cujuſvis *F*, affluxus erit maximus in *F*, hora tertia poſt appulſum Lunæ ad Meridianum ſupra Horizontem; poſtea defluxus maximus in *Q* hora tertia poſt occaſum Lunæ; dein affluxus maximus in *f* hora tertia poſt appulſum Lunæ ad Meridianum infra Horizontem; ultimò defluxus maximus in *Q* hora tertia poſt ortum Lunæ; & affluxus poſterior in *f* erit minor quàm affluxus prior in *F*. Diſtinguitur enim Mare totum in duos omnino fluctus Hemiſphæricos, unum in Hemiſphærio *KHkC* ad Boream vergentem, alterum in Hæmiſphærio oppoſito *KhkC*; quos igitur fluctum Borealem & fluctum Auſtralem nominare licet. Hi fluctus ſemper ſibi mutuò oppoſiti veniunt per vices ad Meridianos locorum ſingulorum, interpoſito intervallo horarum Lunarium duodecim. Cumque regiones Boreales magis participant fluctum Borealem, & Auſtrales magis Auſtralem, inde oriuntur æſtus alternis vicibus majores & minores, in locis ſingulis extra æquatorem. Æſtus autem major, Lunâ in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam poſt appulſum Lunæ ad Meridianum ſupra Horizontem, & Lunâ declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora Solſtitiorum; præſertim ſi Lunæ Nodus aſcendens verſatur in principio Arietis. Sic experientiâ compertum eſt, quod æſtus matutini tempore hyberno ſuperent veſpertinos & veſpertini tempore æſtivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quaſi pedis unius, ad *Briſtoliam* verò altitudine quindecim digitorum: Obſervantibus *Colepreſſio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus deſcripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua Maris æſtus, etiam ceſſantibus Luminarium actionibus, poſſet aliquamdiu perſeverare. Conſervatio hæcce motus impreſſi minuit differentiam æſtuum alternorum; & æſtus proximè poſt Syzygias majores reddit, eoſque proximè poſt Quadraturas minuit. Unde fit ut æſtus alterni ad *Plymuthum* & *Briſtoliam* non multo magis differant ab invicem quàm altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æſtus omnium maximi in iiſdem portubus non ſint primi à Syzygiis ſed tertii. Retardantur

tur etiam motus omnes in tranſitu per vada, adeò ut æſtus omnium maximi, in fretis quibuſdam & Fluviorum oſtiis, ſint quarti vel etiam quinti à Syzygiis.

Porrò fieri poteſt ut æſtus propagetur ab Oceano per freta diverſa ad eundem portum, & citius tranſeat per aliqua freta quàm per alia, quo in caſu æſtus idem, in duos vel plures ſucceſſive advenientes diviſus, componere poſſit motus novos diverſorum generum. Fingamus æſtus duos æquales à diverſis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum ſpatio horarum ſex, incidatque in horam tertiam ab appulſu Lunæ ad Meridianum portus. Si Luna in hocce ſuo ad Meridianum appulſu verſabatur in æquatore, venient ſingulis horis ſenis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eoſdem affluxibus æquabunt, & ſic ſpatio diei illius efficient ut aqua tranquillè ſtagnet. Si Luna tunc declinabat ab Æquatore, fient æſtus in Oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum eſt; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altiſſimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua aſcendat ad mediocrem altitudinem in Medio ipſorum, & inter affluxus binos minores aqua aſcendet ad altitudinem minimam. Sic ſpatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri ſolet, ſed ſemel tantum perveniet ad maximam altitudinem & ſemel ad minimam; & altitudo maxima, ſi Luna declinat in polum ſupra Horizontem loci, incidet in horam vel ſextam vel triceſimam ab appulſu Lunæ ad Meridianum, atque Lunâ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum, in portu regni *Tunquini* ad *Batſham*, ſub latitudine Boreali 20 *gr.* 50 *min.* *Halleius* ex Nautarum Obſervationibus patefecit. Ibi aqua die tranſitum Lunæ per Æquatorem ſequente ſtagnat, dein Lunâ ad Boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portubus, ſed ſemel ſingulis diebus; & æſtus incidit in occaſum Lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum Lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad

 diem

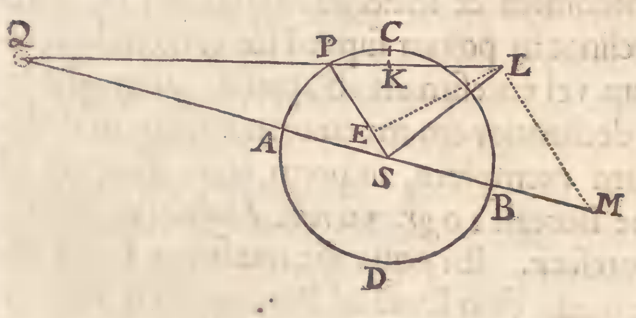
diem ſeptimum vel octavum, dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; & Lunâ declinationem mutante ceſſat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum Lunæ & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab Oceano *Sinenſi* inter Continentem & Inſulam *Luconiam*, alter à Mari *Indico* inter Continentem & Inſulam *Borneo*. An æſtus ſpatio horarum duodecim à Mari *Indico*, & ſpatio horarum ſex à Mari *Sinenſi* per freta illa venientes, & ſic in horam tertiam & nonam Lunarem incidentes, componant hujuſmodi motus; ſitne alia Marium illorum conditio, obſervationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus cauſas motuum Lunæ & Marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua ſubjungere.

Prop. XXV. Prob. V.

Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.

Deſignet *Q* Solem, *S* Terram, *P* Lunam, *PADB* orbem Lunæ. In *QP* capiatur *QK* æqualis *QS*; ſitque *QL* ad *QK* in duplicata ratione *QK* ad *QP*, & ipſi *PS* agatur parallela *LM*; & ſi gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per diſtantiam *QS* vel *QK*, erit *QL* gravitas acceleratrix Lunæ in Solem. Ea componitur ex partibus *QM*, *LM*, quarum *LM* & ipſius *QM* pars *SM* perturbat motum Lunæ, ut in Libri primi Prop. LXVI. & ejus Corollariis expoſitum eſt.



Qua-

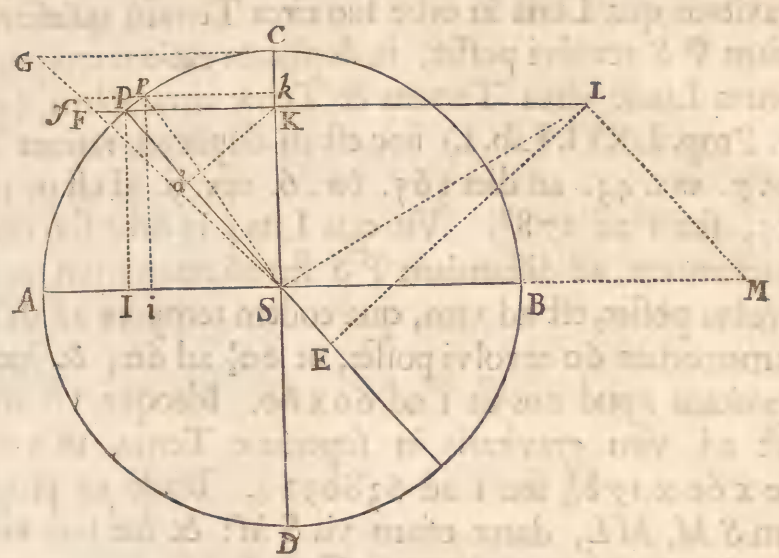
Quatenus Terra & Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur motus Terræ circa centrum illud à viribus conſimilibus; ſed ſummas tam virium quàm motuum referre licet ad Lunam, & ſummas virium per lineas ipſis analogas *S M* & *M L* deſignare. Vis *M L* (in mediocri ſua quantitate) eſt ad vim gravitatis, qua Luna in orbe ſuo circa Terram quieſcentem ad diſtantiam *P S* revolvi poſſet, in duplicata ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem, (per Corol. 17. Prop. LXVI. Lib. I.) hoc eſt in duplicata ratione dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. ad dies 365. *hor.* 6. *min.* 9. id eſt ut 1000 ad 178725, ſeu 1 ad $178\frac{8}{11}$. Vis qua Luna in orbe ſuo circa Terram quieſcentem, ad diſtantiam *P S* ſemidiametrorum terreſtrium $60\frac{1}{2}$ revolvi poſſet, eſt ad vim, qua eodem tempore ad diſtantiam ſemidiametrorum 60 revolvi poſſet, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60 x 60. Ideoque vis mediocris *M L* eſt ad vim gravitatis in ſuperficie Terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{8}{11}$ ſeu 1 ad 638092,6. Unde ex proportione linearum *S M*, *M L*, datur etiam vis *S M*: & hæ ſunt vires Solis quibus motus Lunæ perturbantur. *Q. E. I.*

Prop. XXVI. Prob. VI.

Invenire incrementum areæ quam Luna radio ad Terram ducto deſcribit.

Diximus aream, quam Luna radio ad Terram ducto deſcribit, eſſe tempori proportionalem, niſi quatenus motus Lunaris ab actione Solis turbatur. Inæqualitatem momenti (vel incrementi horarii) hic inveſtigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem Lunæ circularem eſſe, & inæqualitates omnes negligamus, ea ſola excepta, de qua hic agitur. Ob ingentem verò Solis diſtantiam ponamus etiam lineas *Q P*, *Q S* ſibi invicem parallelas eſſe. Hoc pacto vis *L M* reducetur ſemper ad mediocrem

ſuam quantitatem SP, ut & vis SM ad mediocrem ſuam quantitatem $3PK$. Hæ vires, per Legum Corol. 2. componunt vim SL; & hæc vis, ſi in radium SP demittatur perpendiculum LE, reſolvitur in vires SE, EL, quarum SE, agendo ſemper ſecundum radium SP, nec accelerat nec retardat deſcriptionem areæ QSP



radio illo SP factam; & EL agendo ſecundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipſam, quantum accelerat vel retardat Lunam. Acceleratio illa Lunæ, in tranſitu ipſius à Quadratura C ad conjunctionem A, ſingulis temporis momentis facta, eſt ut ipſa vis accelerans EL, hoc eſt ut $\frac{3PK \times SK}{SP}$. Exponatur tempus per motum medium Lunarem, vel (quod eodem fere recidit) per angulum CSP, vel etiam per arcum CP. Ad CS erigatur Normalis CG ipſi CS æqualis. Et diviſo arcu quadrantali AC in particulas innumeras æquales Pp &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi poſſint, ductâque pk perpendiculari ad CS, jungatur SG ipſis KP, kp productis occurrens in F & f; & erit Kk ad PK ut Pp ad Sp, hoc eſt in data ratione, adeoque $FK \times Kk$ ſeu area $FKkf$ ut $\frac{3PK \times SK}{SP}$ id eſt ut EL; & compoſitè, area tota $GCKF$ ut ſum-

ſumma omnium virium *E L* tempore toto *C P* impreſſarum in Lunam, atque adeò etiam ut velocitas hac ſummâ genita, id eſt, ut acceleratio deſcriptionis areæ *C S P*, ſeu incrementum momenti. Vis qua Luna circa Terram quieſcentem ad diſtantiam *S P*, tempore ſuo periodico *C A D B C* dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi poſſet, efficeret ut corpus, tempore *C S* cadendo, deſcriberet longitudinem $\frac{1}{2}$ *C S*, & velocitatem ſimul acquireret æqualem velocitati, qua Luna in orbe ſuo movetur. Patet hoc per Schol. Prop. IV. Lib. I. Cum autem perpendiculum *K d* in *S P* demiſſum ſit ipſius *E L* pars tertia, & ipſius *S P* ſeu *M L* in octantibus pars dimidia, vis *E L* in Octantibus, ubi maxima eſt, ſuperabit vim *M L* in ratione 3 ad 2, adeoque erit ad vim illam, qua Luna tempore ſuo periodico circa Terram quieſcentem revolvi poſſet, ut 100 ad $\frac{2}{3}$ x $17872\frac{1}{2}$ ſeu 11915, & tempore *C S* velocitatem generare deberet quæ eſſet pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunaris, tempore autem *C P A* velocitatem majorem generaret in ratione *C A* ad *C S* ſeu *S P*. Exponatur vis maxima *E L* in Octantibus per aream *F K* x *K k* rectangulo $\frac{1}{2}$ *S P* x *P p* æqualem. Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis *C P* generare poſſet, erit ad velocitatem quam vis omnis minor *E L* eodem tempore generat ut rectangulum $\frac{1}{2}$ *S P* x *C P* ad aream *K C G F*: tempore autem toto *C P A*, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2}$ *S P* x *C A* & triangulum *S C G*, ſive ut arcus quadrantalis *C A* ad radium *S P*. Ideoque (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) velocitas poſterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunæ. Huic Lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga eſt, addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & ſi momentum mediocre exponatur per numerum 11915 ſumma 11915 + 50 ſeu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in Syzygia *A*, ac differentia 11915 — 50 ſeu 11865 ejuſdem momentum minimum in Quadraturis. Igitur areæ temporibus æqualibus in Syzygiis & Quadraturis deſcriptæ, ſunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod ſit ad momentorum differentiam 100 ut trapezium *F K C G* ad triangulum

S C G.

SCG (vel quod perinde eſt, ut quadratum Sinus *PK* ad quadratum Radii *SP*, id eſt ut *Pd* ad *SP*) & ſumma exhibebit momentum areæ, ubi Luna eſt in loco quovis intermedio *P*.

Hæc omnia ita ſe habent, ex Hypotheſi quod Sol & Terra quieſcunt, & Luna tempore Synodico dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. revolvitur. Cum autem periodus Synodica Lunaris verè ſit dierum 29. *hor.* 12. & *min.* 44. augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11915}$ momenti mediocris, jam fiet ejuſdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in Quadratura Lunæ erit ad ejus momentum in Syzygia ut $11023 - 50$ ad $11023 + 50$, ſeu 10973 ad 11073, & ad ejus momentum, ubi Luna in alio quovis loco intermedio *P* verſatur, ut 10973 ad $10973 + Pd$, exiſtente videlicet *SP* æquali 100.

Area igitur, quam Luna radio ad Terram ducto ſingulis temporis particulis æqualibus deſcribit, eſt quam proximè ut ſumma numeri $219\frac{46}{100}$ & Sinus verſi duplicatæ diſtantiæ Lunæ à Quadratura proxima, in circulo cujus radius eſt unitas. Hæc ita ſe habent ubi Variatio in Octantibus eſt magnitudinis mediocris. Sin Variatio ibi major ſit vel minor, augeri debet vel minui Sinus ille verſus in eadem ratione.

Prop. XXVII. Prob. VII.

Ex motu horario Lunæ invenire ipſius diſtantiam à Terra.

Area, quam Luna radio ad Terram ducto, ſingulis temporis momentis, deſcribit, eſt ut motus horarius Lunæ & quadratum diſtantiæ Lunæ à Terrâ conjunctim; & propterea diſtantia Lunæ à Terrâ eſt in ratione compoſitâ ex dimidiatâ ratione Areæ directè & dimidiatâ ratione motus horarii inversè. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc datur Lunæ diameter apparens: quippe quæ ſit reciprocè ut ipſius diſtantia à Terra. Tentent Aſtronomi quàm probè hæc Regula cum Phænomenis congruat.

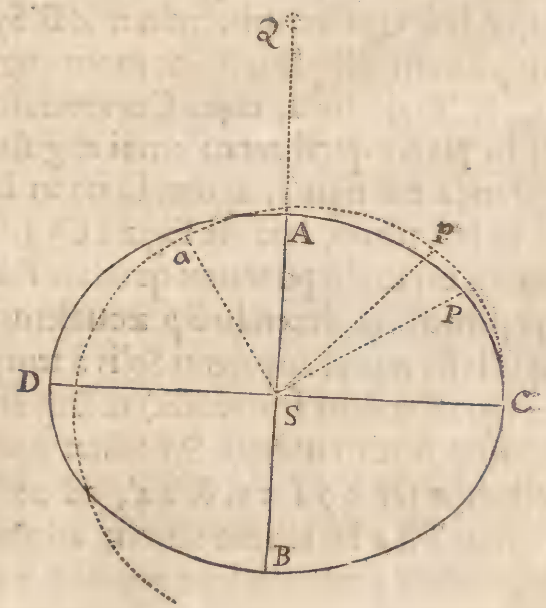
Corol.

Corol. 2. Hinc etiam Orbis Lunaris accuratiùs ex Phænomenis quàm antehac definiri poteſt.

Prop. XXVIII. Prob. VIII.

Invenire diametros Orbis in quo Luna abſque excentricitate moveri deberet.

Curvatura Trajectoriæ, quam mobile, ſi ſecundum Trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, deſcribit, eſt ut attractio directè & quadratum velocitatis inversè. Curvaturas linearum pono eſſe inter ſe in ultima proportione Sinuum vel Tangentium angulorum contactuum ad radios æquales, ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem Lunæ in Terram in Syzygiis eſt exceſſus gravitatis ipſius in Terram ſupra vim Solarem 2 *PK* (Vide *Figur. pag.* 434.) qua gravitas acceleratrix Lunæ in Solem ſuperat gravitatem acceleratricem Terræ in Solem. In Quadraturis autem attractio illa eſt ſumma gravitatis Lunæ in Terram & vis Solaris *KS*, qua Luna in Terram trahitur. Et hæ attractiones, ſi $\frac{AS+CS}{2}$ dicatur *N*, ſunt ut $\frac{178725}{ASq.} - \frac{2000}{CS \times N}$ & $\frac{178725}{CSq.} + \frac{1000}{AS \times N}$ quam proxime; ſeu ut 178725 *N* in *CS q.* — 2000 *AS q.* in *CS*, & 178725 *N* in *AS q.* + 1000 *CS q.* x *AS*. Nam ſi gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per numerum 178725, vis mediocris *ML*, quæ in Quadraturis eſt *PS*



vel

vel *SK* & Lunam trahit in Terram, erit 1000, & vis mediocris *SM* in Syzygiis erit 3000; de qua, ſi vis mediocris *ML* ſubducatur, manebit vis 2000 qua Luna in Syzygiis diſtrahitur à Terra, quamque jam ante nominavi 2 *PK*. Velocitas autem Lunæ in Syzygiis *A* & *B* eſt ad ipſius velocitatem in Quadraturis *C* & *D* ut *CS*, ad *AS* & momentum areæ quam Luna radio ad Terram ducto deſcribit in Syzygiis ad momentum ejuſdem areæ in Quadraturis conjunctim; id eſt ut 11073 *CS* ad 10973 *AS*. Sumatur hæc ratio bis inversè & ratio prior ſemel directè, & fiet Curvatura Orbis Lunaris in Syzygiis ad ejuſdem Curvaturam in Quadraturis ut 120407 x 178725 *ASq.* x *CSq.* x *N* — 120407 x 2000 *ASqq.* x *CS* ad 122611 x 178725 *ASq.* x *CSq.* x *N* + 122611 x 1000 *CSqq.* x *AS*, id eſt ut 2151969 *AS* x *CS* x *N* — 24081 *AS cub.* ad 2191371 *AS* x *CS* x *N* + 12261 *CS cub.*

Quoniam figura orbis Lunaris ignoratur, hujus vice aſſumamus Ellipſin *DBCA*, in cujus centro *S* Terra collocetur, & cujus axis major *DC* Quadraturis, minor *AB* Syzygiis interjaceat. Cum autem planum Ellipſeos hujus motu angulari circa Terram revolvatur, & Trajectoria, cujus Curvaturam conſideramus, deſcribi debet in plano quod motu omni angulari omnino deſtituitur: conſideranda erit figura, quam Luna in Ellipſi illa revolvendo deſcribit in hoc plano, hoc eſt Figura *Cpa*, cujus puncta ſingula *p* inveniuntur capiendo punctum quodvis *P* in Ellipſi, quod locum Lunæ repreſentet, & ducendo *Sp* æqualem *SP*, ea lege ut angulus *PSp* æqualis ſit motui apparenti Solis à tempore Quadraturæ *C* confecto; vel (quod eodem fere recidit) ut angulus *CSp* ſit ad angulum *CSP* ut tempus revolutionis Synodicæ Lunaris ad tempus revolutionis Periodicæ ſeu 29 *d.* 12. *h.* 44′, ad 27 *d.* 7 *h.* 43′. Capiatur igitur angulus *CSa* in eadem ratione ad angulum rectum *CSA*, & ſit longitudo *Sa* æqualis longitudini *SA*; & erit *a* Apſis ima & *C* Apſis ſumma orbis hujus *Cpa*. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam orbis *Cpa* in vertice *a*, & curvaturam circuli centro *S* intervallo *SA* deſcripti, ſit ad differentiam inter

curva-

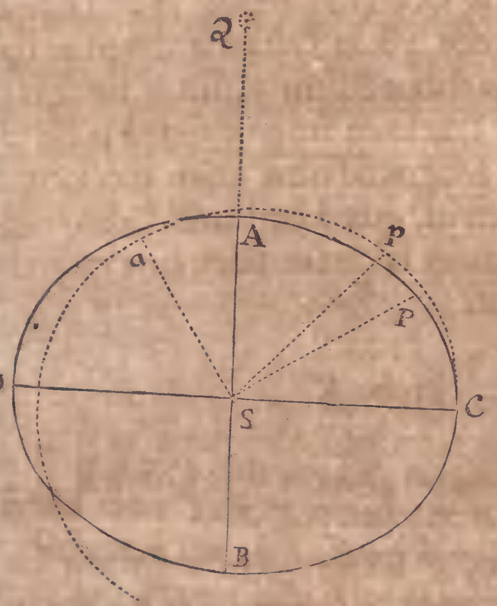
curvaturam Ellipſeos in vertice *A* & curvaturam ejuſdem circuli, in duplicata ratione anguli *CSP* ad angulum *CSp*; & quod curvatura Ellipſeos in *A* ſit ad curvaturam circuli illius in duplicata ratione *SA* ad *SC*; & curvatura circuli illius ad curvaturam circuli centro *S* intervallo *SC* deſcripti ut *SC* ad *SA*; hujus autem curvatura ad curvaturam Ellipſeos in *C* in duplicata ratione *SA* ad *SC*; & differentia inter curvaturam Ellipſeos in vertice *C* & curvaturam circuli noviſſimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ *Spa* in vertice *C* & curvaturam ejuſdem circuli, in duplicata ratione anguli *CSP* ad angulum *CSp*. Quæ quidem rationes ex Sinubus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facilè colliguntur. Collatis autem his rationibus inter ſe, prodit curvatura figuræ *Cpa* in *a* ad ipſius curvaturam in *C*, ut $AS\ cub. + \frac{16824}{100000} CS\ q. \times AS$ ad $CS\ cub. + \frac{16824}{100000} AS\ q. \times CS$. Ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ deſignat differentiam quadratorum angulorum *CSP* & *CSp* applicatam ad Quadratum anguli minoris *CSP*, ſeu (quod perinde eſt) differentiam Quadratorum temporum 27 *d.* 7 *h.* 43′, & 29 *d.* 12 *h.* 44′, applicatam ad Quadratum temporis 27 *d.* 7 *h.* 43′.

Igitur cum *a* deſignet Syzygiam Lunæ, & *C* ipſius Quadraturam, proportio jam inventa eadem eſſe debet cum proportione curvaturæ Orbis Lunæ in Syzygiis ad ejuſdem curvaturam in Quadraturis, quam ſupra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio *CS* ad *AS*, duco extrema & media in ſe invicem. Et termini prodeuntes ad $AS \times CS$ applicati, fiunt $2062{,}79\ CS\ qq. - 2151969\ N \times CS\ cub. + 368682\ N \times AS \times CS\ q. + 36342\ AS\ q. \times CS\ q. - 362046\ N \times AS\ q. \times CS + 2191371\ N \times AS\ cub. + 4051{,}4\ AS\ qq. = 0.$ Hic pro terminorum *AS* & *CS* ſemiſummâ *N* ſcribo 1, & pro eorundem ſemidifferentia ponendo *x*, fit $CS = 1 + x$, & $AS = 1 - x$: quibus in æquatione ſcriptis, & æquatione prodeunte reſolutâ, obtinetur *x* æqualis 0,0072036, & inde ſemidiameter *CS* fit 1,0072, & ſemidiameter *AS* 0,9928, qui numeri ſunt ut $69\frac{11}{12}$ & $68\frac{11}{12}$ quam proximè. Eſt igitur diſtantia Lunæ à Terra in Syzygiis ad ipſius diſtantiam in Quadraturis (ſepoſita ſcilicet excentricitatis conſideratione) ut $68\frac{11}{12}$ ad $69\frac{1}{12}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.

Prop. XXIX. Prob. IX.

Invenire Variationem Lunæ.

Oritur hæc inæqualitas partim ex forma Elliptica orbis Lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam Luna radio ad Terram ducto deſcribit. Si Luna *P* in Ellipſi *DBCA* circa Terram in centro Ellipſeos quieſcentem moveretur, & radio *SP* ad Terram ducto deſcriberet aream *CSP* tempori proportionalem; eſſet autem Ellipſeos ſemidiameter maxima *CS* ad ſemidiametrum minimam *SA* ut $69\frac{10}{11}$ ad $68\frac{10}{11}$: foret Tangens anguli *CSP* ad Tangentem anguli motus medii à quadratura *C* computati, ut Ellipſeos ſemidiameter *SA* ad ejuſdem ſemidiametrum *SC* ſeu $68\frac{10}{11}$ ad $69\frac{10}{11}$. Debet autem deſcriptio areæ *CSP*, in progreſſu Lunæ à Quadratura ad Syzygiam, ea ratione accelerari, ut ejus momentum in Syzygia Lunæ ſit ad ejus momentum in Quadratura ut 11073 ad 10973, utq; exceſſus momenti in loco quovis intermedio *P* ſupra momentum in Quadratura ſit ut quadratum Sinus anguli *CSP*. Id quod ſatis accuratè fiet, ſi tangens anguli *CSP* diminuatur in dimidiata ratione numeri 10973 ad numerum 11073, id eſt in ratione numeri $68\frac{5958}{10000}$ ad numerum $68\frac{11}{12}$. Quo pacto tangens anguli *CSP* jam erit ad tangentem motus medii ut $68\frac{5958}{10000}$ ad $69\frac{11}{12}$, & angulus *CSP*



in

in Octantibus,ubi motus medius eſt 45 *gr.* invenietur 44 *gr.* 27′. 29″: qui ſubductus de angulo motus medii 45 *gr.* relinquit Variationem 32′. 31″. Hæc ita ſe haberent ſi Luna, pergendo à Quadratura ad Syzygiam, deſcriberet angulum *CSA* graduum tantum nonaginta. Verum ob motum Terræ, quo Sol in antecedentia motu apparente transfertur, Luna, priuſquam Solem aſſequitur, deſcribit angulum *CSa* angulo recto majorem in ratione revolutionis Lunaris Synodicæ ad revolutionem periodicam, id eſt in ratione 29 *d.* 12 *h.* 44′. ad 27 *d.* 7 *h.* 43′. Et hoc pacto anguli omnes circa centrum S dilatantur in eadem ratione, & Variatio quæ ſecus eſſet 32′. 31″. jam aucta in eadem ratione, fit 35′. 9″. Hæc ab Aſtronomis conſtituitur 40′, & ex recentioribus Obſervationibus 38′. *Halleius* autem recentiſſimè deprehendit eſſe 38′ in Octantibus verſus oppoſitionem Solis, & 32′ in Octantibus Solem verſus. Unde mediocris ejus magnitudo erit 35′: quæ cum magnitudine à nobis inventa 35′. 9″ probe congruit. Magnitudinem enim mediocrem computavimus, neglectis differentiis, quæ à curvaturâ Orbis magni, majorique Solis actione in Lunam falcatam & novam quam in Gibboſam & plenam, oriri poſſint.

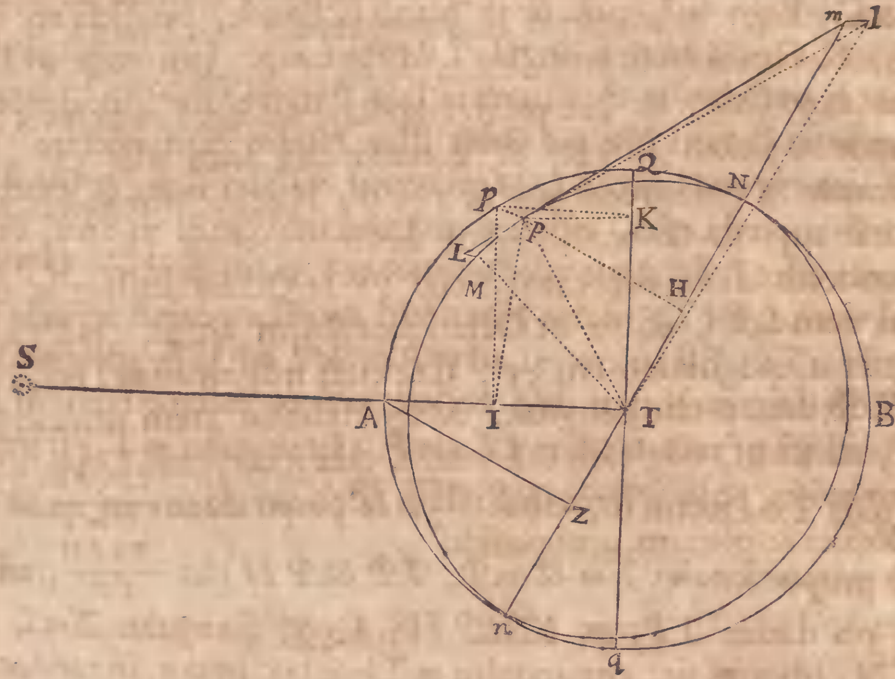
Prop. XXX. Prob. X.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe circulari.

Deſignet *S* Solem, *T* Terram, *P* Lunam, *NPn* Orbem Lunæ, *Npn* veſtigium Orbis in plano Eclipticæ; *N*, *n*, Nodos, *nTNm* lineam Nodorum infinitè productam, *PI*, *PK*; perpendicula demiſſa in lineas *ST*, *Qq*; *Pp* perpendiculum demiſſum in planum Eclipticæ; *Q*, *q* Quadraturas Lunæ in plano Eclipticæ & *pK* perpendiculum in lineam *Qq* Quadraturis intrajacentem. Et vis Solis ad perturbandum motum Lunæ (per Prop. XXV.) duplex erit, altera lineæ 2 *IT* vel 2 *Kp*, altera lineæ *PI* proportionalis. Et Luna vi priore in Solem, poſteriore in lineam *ST* trahitur.

 Com-

Componitur autem vis poſterior *P I* ex viribus *IT* & *P T*, quarum *P T* agit ſecundum planum orbis Lunaris, & propterea ſitum plani nil mutat. Hæc igitur negligenda eſt. Vis autem *IT* cum vi 2 *IT* componit vim totam 3 *IT*, qua planum Orbis Lunaris perturbatur. Et hæc vis per Prop. XXV. eſt ad vim qua Luna in



circulo circa Terram quieſcentem tempore ſuo periodico revolvi poſſet, ut 3 *IT* ad Radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, ſive ut *IT* ad Radium multiplicatum per 59,575. Cæterum in hoc calculo & eo omni qui ſequitur, conſidero lineas omnes à Luna ad Solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ à Terra ad Solem ducitur, propterea quod inclinatio tantum ferè minuit effectus omnes in aliquibus caſibus, quantum auget in aliis; & Nodorum motus mediocres quærimus, neglectis iſtiuſmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

De-

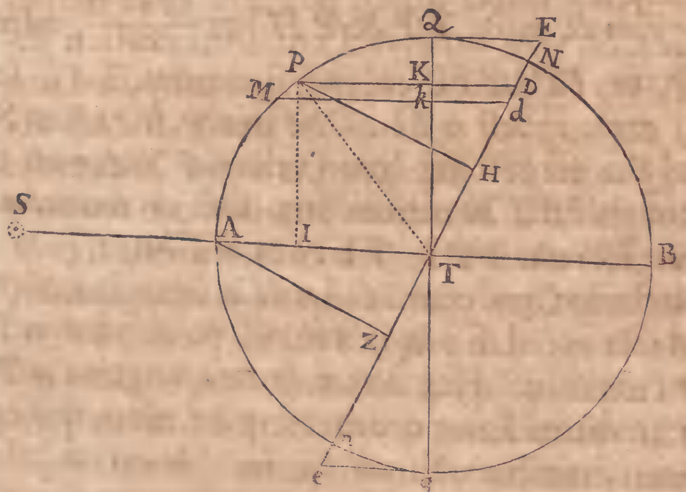
Deſignet jam *P M* arcum, quem Luna dato tempore quam minimo deſcribit, & *M L* lineolam quam Luna, impellente vi præfata 3 *I T*, eodem tempore deſcribere poſſet. Jungantur *P L*, *M P*, & producantur eæ ad *m* & *l*, ubi ſecent planum Eclipticæ; inque *T m* demittatur perpendiculum *P H*. Et quoniam *M L* parallela eſt ipſi *S T*, ſi *m l* parallela ſit ipſi *M L*, erit *m l* in plano Eclipticæ, & contra. Ergo *m l*, cum ſit in plano Eclipticæ, parallela erit ipſi *M L*, & ſimilia erunt triangula *L M P*, *L m p*. Jam cum *M P m* ſit in plano Orbis, in quo Luna in loco *P* movebatur, incidet punctum *m* in lineam *N n* per Orbis illius Nodos *N*, *n*, ductam. Et quoniam vis qua lineola *L M* generatur, ſi tota ſimul & ſemel in loco *P* impreſſa eſſet, efficeret ut Luna moveretur in arcu, cujus Chorda eſſet *L P*, atque adeò transferret Lunam de plano *M P m T* in planum *L P l T*; motus Nodorum à vi illa genitus æqualis erit angulo *m T l*. Eſt autem *m l* ad *m P* ut *M L* ad *M P*, adeoque cum *M P* ob datum tempus data ſit, eſt *m l* ut rectangulum *M L* x *m P*, id eſt ut rectangulum *I T* x *m P*. Et angulus *m T l*, ſi modo angulus *T m l* rectus ſit, eſt ut $\frac{ml}{Tm}$, & propterea ut $\frac{IT \times Pm}{Tm}$ id eſt (ob proportionales *T m* & *m P*, *T P* & *P H*) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, adeoque ob datam *T P*, ut *I T* x *P H*. Quod ſi angulus *T m l*, ſeu *S T N* obliquus ſit, erit angulus *m T l* adhuc minor, in ratione Sinus anguli *S T N* ad Radium. Eſt igitur velocitas Nodorum ut *I T* x *P H* & Sinus anguli *S T N* conjunctim, ſive ut contentum ſub ſinubus trium angulorum *T P I*, *P T N* & *S T N*.

Si anguli illi, Nodis in Quadraturis & Luna in Syzygia exiſtentibus, recti ſint, lineola *m l* abibit in infinitum, & angulus *m T l* evadet angulo *m P l* æqualis. Hoc autem in caſu, angulus *m P l* eſt ad angulum *P T M*, quem Luna eodem tempore motu ſuo apparente circa Terram deſcribit ut 1 ad 59,575. Nam angulus *m P l* æqualis eſt angulo *L P M*, id eſt angulo deflexionis Lunæ à recto tramite, quam præfata vis Solaris 3 *I T* dato illo tempore generare poſſit; & angulus *P T M* æqualis eſt angulo deflexionis

Lunæ

Lunæ à recto tramite, quem vis illa, qua Luna in Orbe ſuo retinetur, eodem tempore generat. Et hæ vires, uti ſupra diximus, ſunt ad invicem ut 1 ad 59,575. Ergo cum motus medius horarius Lunæ (reſpectu fixarum) ſit $32'.\ 56''.\ 27'''.\ 12^{iv}\frac{1}{2}$, motus horarius Nodi in hoc caſu erit $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$. Aliis autem in caſibus motus iſte horarius erit ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$. ut contentum ſub ſinibus angulorum trium *TPI*, *PTN*, & *STN* (ſeu diſtantiarum Lunæ à Quadratura, Lunæ à Nodo & Nodi à Sole) ad cubum Radii. Et quoties ſignum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regreſſivus in progreſſivum & progreſſivus in regreſſivum mutari. Unde fit ut Nodi progrediantur quoties Luna inter Quadraturam alterutram & Nodum Quadraturæ proximum verſatur. Aliis in caſibus regrediuntur, & per exceſſum regreſſus ſupra progreſſum, ſingulis menſibus feruntur in antecedentia.

Corol. 1. Hinc ſi a dati arcus quam minimi *PM* terminis *P* & *M* ad lineam Quadraturas jungentem *Qq* demittantur perpendicula *PK*, *Mk*, eademque producantur donec ſecent lineam Nodorum *Nn* in *D* & *d*; erit motus horarius Nodorum ut area *MPDd* & quadratum lineæ *AZ* conjunctim. Sunto enim *PK*, *PH* & *AZ* prædicti tres Sinus. Nempe *PK* Sinus diſtantiæ Lunæ à Quadratura,



PH Sinus diſtantiæ Lunæ à Nodo, & *AZ* Sinus diſtantiæ Nodi à Sole: & erit velocitas Nodi ut contentum *PK* x *PH* x *AZ*. Eſt

autem

autem *PT* ad *PK* ut *PM* ad *Kk*, adeoque ob datas *PT* & *PM* eſt *Kk* ipſi *PK* proportionalis. Eſt & *AT* ad *PD* ut *AZ* ad *PH*, & propterea *PH* rectangulo *PD* x *AZ* proportionalis, & conjunctis rationibus, *PK* x *PH* eſt ut contentum *Kk* x *PD* x *AZ*, & *PK* x *PH* x *AZ* ut *Kk* x *PD* x *AZ qu.* id eſt ut area *PDdM*, & *AZ qu.* conjunctim. *Q. E. D.*

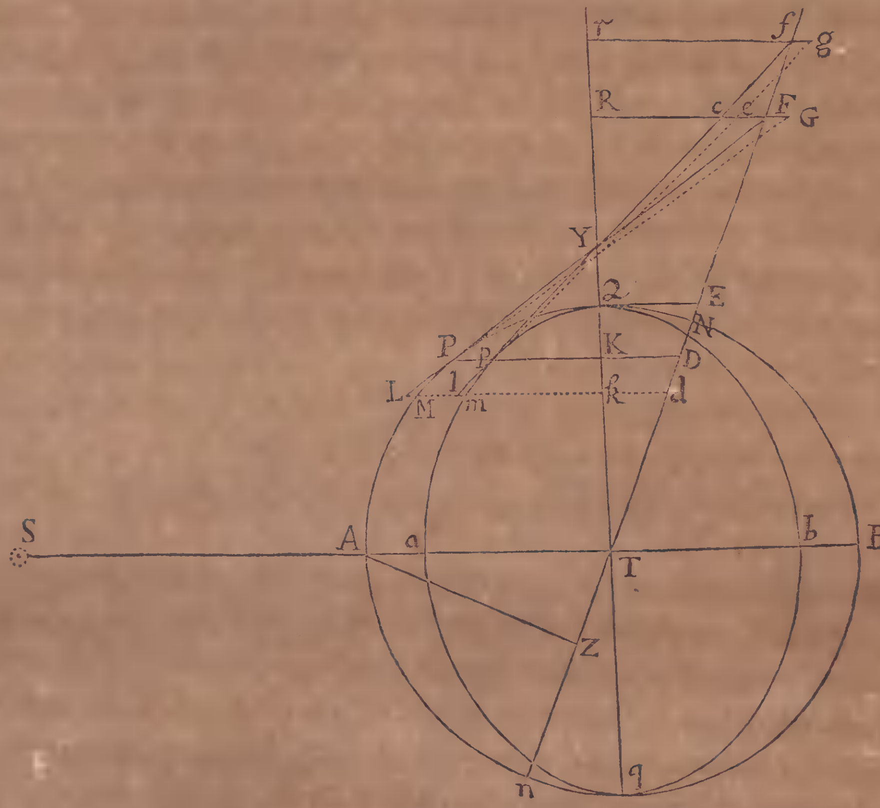
Corol. 2. In data quavis Nodorum poſitione, motus horarius mediocris eſt ſemiſſis motus horarii in Syzygiis Lunæ, ideoque eſt ad $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut quadratum Sinus diſtantiæ Nodorum à Syzygiis ad quadratum Radii, ſive ut *AZ qu.* ad *AT qu.* Nam ſi Luna uniformi cum motu perambulet ſemicirculum *QAq*, ſumma omnium arearum *PDdM*, quo tempore Luna pergit à *Q* ad *M*, erit area *QMdE* quæ ad circuli tangentem *QE* terminatur; & quo tempore Luna attingit punctum *n*, ſumma illa erit area tota *EQAn* quam linea *PD* deſcribit; dein Luna pergente ab *n* ad *q*, linea *PD* cadet extra circulum, & aream *nqe* ad circuli tangentem *qe* terminatam deſcribet; quæ, quoniam Nodi prius regrediebantur, jam verò progrediuntur, ſubduci debet de area priore, & cum æqualis ſit areæ *QEN*, relinquet ſemicirculum *NQAn*. Igitur ſumma omnium arearum *PDdM*, quo tempore Luna ſemicirculum deſcribit, eſt area ſemicirculi; & ſumma omnium quo tempore Luna circulum deſcribit eſt area circuli totius. At area *PDdM*, ubi Luna verſatur in Syzygiis, eſt rectangulum ſub arcu *PM* & radio *MT*; & ſumma omnium huic æqualium arearum, quo tempore Luna circulum deſcribit, eſt rectangulum ſub circumferentia tota & radio circuli; & hoc rectangulum, cum ſit æquale duobus circulis, duplo majus eſt quàm rectangulum prius. Proinde Nodi, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ quam habent in Syzygiis Lunaribus, ſpatium duplo majus deſcriberent quàm revera deſcribunt; & propterea motus mediocris quocum, ſi uniformiter continuaretur, ſpatium à ſe inæquabili cum motu revera confectum deſcribere poſſent, eſt ſemiſſis motus quem habent in Syzygiis Lunæ. Unde cum motus horarius maximus, ſi Nodi in Quadraturis verſantur, ſit $33''. 10'''. 33^{v}. 12^{v}$, motus mediocris horarius in hoc caſu erit

16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. Et cum motus horarius Nodorum ſemper ſit ut *AZ qu.* & area *PDdM* conjunctim, & propterea motus horarius Nodorum in Syzygiis Lunæ ut *AZ qu.* & area *PDdM* conjunctim, id eſt (ob datam aream *PDdM* in Syzygiis deſcriptam) ut *AZ qu.* erit etiam motus mediocris ut *AZ qu.* atque adeo hic motus, ubi Nodi extra Quadraturas verſantur, erit ad 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut *AZ qu.* ad *AT qu.* *Q.E.D.*

Prop. XXXI. Prob. XI.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe Elliptico.

Deſignet *Qpmaq* Ellipſim, axe majore *Qq*, minore *ab* deſcriptam, *QAq* circulum circumſcriptum, *T* Terram in utriuſque



centro communi, *S* Solem, *p* Lunam in Ellipſi moventem, & *pm* arcum quem data temporis particula quam minima deſcribit, *N* & *n* Nodos

Nodos linea *Nn* junctos, *pK* & *mk* perpendicula in axem *Qq* demiſſa & hinc inde producta, donec occurrant circulo in *P* & *M*, & lineæ Nodorum in *D* & *d*. Et ſi Luna, radio ad Terram ducto, aream deſcribat tempori proportionalem, erit motus Nodi in Ellipſi ut area *pKkm*.

Nam ſi *PF* tangat circulum in *P*, & producta occurrat *TN* in *F*, & *pf* tangat Ellipſin in *p* & producta occurrat eidem *TN* in *f*, conveniant autem hæ Tangentes in axe *TQ* ad *Y*; & ſi *ML* deſignet ſpatium quod Luna in circulo revolvens, interea dum deſcribit arcum *PM*, urgente & impellente vi prædicta 3 *IT*, motu tranſverſo deſcribere poſſet, & *ml* deſignet ſpatium quod Luna in Ellipſi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi 3 *IT*, deſcribere poſſet; & producantur *LP* & *lp* donec occurrant plano Eclipticæ in *G* & *g*; & jungantur *FG* & *fg*, quarum *FG* producta ſecet *pf*, *pg* & *TQ* in *c*, *e* & *R* reſpectivè, & *fg* producta ſecet *TQ* in *r*: Quoniam vis 3 *IT* ſeu 3 *PK* in circulo eſt ad vim 3 *IT* ſeu 3 *pK* in Ellipſi, ut *PK* ad *pK*, ſeu *AT* ad *aT*; erit ſpatium *ML* vi priore genitum, ad ſpatium *ml* vi poſteriore genitum, ut *PK* ad *pK*, id eſt ob ſimiles figuras *PYKp* & *FYRc*, ut *FR* ad *cR*. Eſt autem *ML* ad *FG* (ob ſimilia triangula *PLM*, *PGF*) ut *PL* ad *PG*, hoc eſt (ob parallelas *Lk*, *PK*, *GR*) ut *pl* ad *pe*, id eſt (ob ſimilia triangula *plm*, *cpe*) ut *lm* ad *ce*; & inversè ut *LM* eſt ad *lm*, ſeu *FR* ad *cR*, ita eſt *FG* ad *ce*. Et propterea ſi *fg* eſſet ad *ce* ut *fY* ad *cY*, id eſt ut *fr* ad *cR*, (hoc eſt ut *fr* ad *FR* & *FR* ad *cR* conjunctim, id eſt ut *fT* ad *FT* & *FG* ad *ce* conjunctim,) quoniam ratio *FG* ad *ce* utrinque ablata relinquit rationes *fg* ad *FG* & *fT* ad *FT*, foret *fg* ad *FG* ut *fT* ad *FT*; propterea quod anguli, quos *FG* & *fg* ſubtenderent ad Terram *T*, æquarentur inter ſe. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente Propoſitione expoſuimus) ſunt motus Nodorum, quo tempore Luna in circulo arcum *PM*, in Ellipſi arcum *pm* percurrit: & propterea motus Nodorum in Circulo & Ellipſi æquarentur inter ſe. Hæc ita ſe haberent, ſi modo *fg* eſſet ad *ce* ut *fY* ad *cY*,

id eſt ſi fg æqualis eſſet $\frac{ce \times f\Upsilon}{c\Upsilon}$. Verum ob ſimilia triangula fgp, cep, eſt fg ad ce ut fp ad cp; ideoque fg æqualis eſt $\frac{ce \times fp}{cp}$, & propterea angulus, quem fg revera ſubtendit, eſt ad angulum priorem, quem FG ſubtendit, hoc eſt motus Nodorum in Ellipſi ad motum Nodorum in Circulo, ut hæc fg ſeu $\frac{ce \times fp}{cp}$ ad priorem fg ſeu $\frac{ce \times f\Upsilon}{c\Upsilon}$, id eſt ut $fp \times c\Upsilon$ ad $cp \times f\Upsilon$, ſeu fp ad $f\Upsilon$ & $c\Upsilon$ ad cp; hoc eſt, ſi pb ipſi TN parallela occurrat FP in b, ut Fb ad $F\Upsilon$ & $F\Upsilon$ ad FP; hoc eſt ut Fb ad FP ſeu Dp ad DP, adeoque ut area $Dpmd$ ad aream $DPmd$. Et propterea, cum area poſterior proportionalis ſit motui Nodorum in Circulo, erit area prior proportionalis motui Nodorum in Ellipſi. *Q. E. D.*

Corol. Igitur cum, in data Nodorum poſitione, ſumma omnium arearum $pDdm$, quo tempore Luna pergit à Quadratura ad locum quemvis m, ſit area $mpQEd$, quæ ad Ellipſeos Tangentem QE terminatur; & ſumma omnium arearum illarum, in revolutione integra, ſit area Ellipſeos totius: motus mediocris Nodorum in Ellipſi erit ad motum mediocrem Nodorum in circulo, ut Ellipſis ad circulum, id eſt ut Ta ad TA, ſeu $68\frac{11}{12}$ ad $69\frac{11}{12}$. Et propterea, cum motus mediocris horarius Nodorum in circulo ſit ad $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut $AZ\,qu.$ ad $AT\,qu.$ ſi capiatur angulus $16''. 21'''. 2^{iv}. 36^{v}$. ad angulum $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut $68\frac{11}{12}$ ad $69\frac{11}{12}$, erit motus mediocris horarius Nodorum in Ellipſi ad $16''. 21'''. 2^{iv}. 36^{v}$. ut $AZq.$ ad $ATq.$; hoc eſt ut quadratum Sinus diſtantiæ Nodi à Sole ad quadratum Radii.

Cæterum Luna, radio ad Terram ducto, aream velocius deſcribit in Syzygiis quàm in Quadraturis, & eo nomine tempus in Syzygiis contrahitur, in Quadraturis producitur; & una cum tempore motus Nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in Quadraturis Lunæ ad ejus momentum in Syzygiis ut 10973 ad 11073; & propterea momentum mediocre in Octantibus eſt ad exceſſum in Syzygiis, defectumque in Quadraturis, ut numerorum ſemiſumma 11023 ad eorundem ſemidifferentiam 50.

Unde

Unde cum tempus Lunæ in ſingulis Orbis particulis æqualibus ſit reciprocè ut ipſius velocitas, erit tempus mediocre in Octantibus ad exceſſum temporis in Quadrantibus, ac defectum in Syzygiis, ab hac cauſa oriundum, ut 11023 ad 50 quam proxime. Pergendo autem à Quadraturis ad Syzygias, invenio quod exceſſus momentorum areæ in locis ſingulis, ſupra momentum minimum in Quadraturis, ſit ut quadratum Sinus diſtantiæ Lunæ à Quadrantibus quam proximè; & propterea differentia inter momentum in loco quocunque & momentum mediocre in Octantibus, eſt ut differentia inter quadratum Sinus diſtantiæ Lunæ à Quadraturis & quadratum Sinus graduum 45, ſeu ſemiſſem quadrati Radii; & incrementum temporis in locis ſingulis inter Octantes & Quadraturas, & decrementum ejus inter Octantes & Syzygias eſt in eadem ratione. Motus autem Nodorum, quo tempore Luna percurrit ſingulas Orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicata ratione temporis. Eſt enim motus iſte, dum Luna percurrit *PM*, (cæteris paribus) ut *ML*, & *ML* eſt in duplicata ratione temporis. Quare motus Nodorum in Syzygiis, eo tempore confectus quo Luna datas Orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicata ratione numeri 11073 ad numerum 11023; eſtque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum verò totum ut 100 ad 11073 quam proximè. Decrementum autem in locis inter Octantes & Syzygias, & incrementum in locis inter Octantes & Quadraturas, eſt quam proxime ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in Syzygiis & differentia inter quadratum Sinus diſtantiæ Lunæ à Quadratura & ſemiſſem quadrati Radii ad ſemiſſem quadrati Radii, conjunctim. Unde ſi Nodi in Quadraturis verſentur, & capiantur loca duo æqualiter ab Octante hinc inde diſtantia, & alia duo à Syzygiâ & Quadraturâ iiſdem intervallis diſtantia, deque decrementis motuum in locis duabus inter Syzygiam & Octantem, ſubducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ ſunt inter Octantem & Quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in Syzygia: uti ratio-

nem ineunti facilè conſtabit. Proindeque decrementum mediocre, quod de Nodorum motu mediocri ſubduci debet, eſt pars quarta decrementi in Syzygia. Motus totus horarius Nodorum in Syzygiis (ubi Luna radio ad Terram ducto aream tempori proportionalem deſcribere ſupponebatur) erat $32''. 42'''. 5^{iv}. 12^{v}$. Et decrementum motus Nodorum, quo tempore Luna jam velocior deſcribit idem ſpatium, diximus eſſe ad hunc motum ut 100 ad 11073; adeoque decrementum illud eſt $17'''. 43^{iv}. 10^{v}$, cujus pars quarta $4'''. 25^{iv}. 48^{v}$, motui horario mediocri ſuperius invento $16''. 21'''. 2^{iv}. 36^{v}$. ſubducta, relinquit $16''. 16'''. 36^{iv}. 48^{v}$. motum mediocrem horarium correctum.

Si Nodi verſantur extra Quadraturas, & ſpectentur loca bina à Syzygiis hinc inde æqualiter diſtantia; ſumma motuum Nodorum, ubi Luna verſatur in his locis, erit ad ſummam motuum, ubi Luna in iiſdem locis & Nodi in Quadraturis verſantur, ut *AZ qu.* ad *AT qu.* Et decrementa motuum, à cauſis jam expoſitis oriunda, erunt ad invicem ut ipſi motus, adeoque motus reliqui erunt ad invicem ut *AZ qu.* ad *AT qu.* & motus mediocres ut motus reliqui. Eſt itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque Nodorum ſitu, ad $16''. 16'''. 36^{iv}. 48^{v}$. ut *AZ qu.* ad *AT qu.*; id eſt ut quadratum Sinus diſtantiæ Nodorum à Syzygiis ad quadratum Radii.

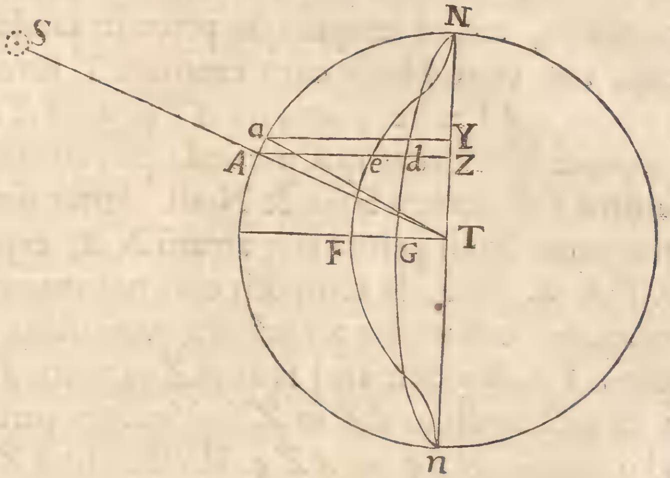
Prop. XXXII. Prob. XII.

Invenire motum medium Nodorum Lunæ.

Motus medius annuus eſt ſumma motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe Nodum verſari in *N*, & ſingulis horis completis retrahi in locum ſuum priorem, ut non obſtante motu ſuo proprio, datum ſemper ſervet ſitum ad Stellas Fixas. Interea verò Solem *S*, per motum Terræ, progredi à Nodo, & curſum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem *Aa* arcus datus quam minimus, quem recta *TS* ad Solem ſemper ducta,

inter-

interſectione ſua & circuli *NAn*, dato tempore quam minimo deſcribit: & motus horarius mediocris (per jam oſtenſa) erit ut *AZq*. id eſt (ob proportionales *AZ*, *ZY*) ut rectangulum ſub *AZ* & *ZY*, hoc eſt ut area *AZYa*. Et ſumma omnium horariorum motuum mediocrium ab initio, ut ſumma omnium arearum *aYZA*, id eſt ut area *NAZ*. Eſt autem maxima *AZYa* æqualis rectangulo ſub arcu *Aa* & radio circuli; & propterea ſumma omnium rectangulorum in circulo toto ad ſummam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum ſub circumferentia tota & radio; id eſt ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo reſpondens, erat 16″. 16‴. 36iv. 48v. Et hic motus, anno toto ſidereo dierum 365. 6 *hor.* 9 *min.* fit 39 *gr.* 38′. 5″. 39‴. Ideoque hujus dimidium 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴½ eſt motus medius Nodorum circulo toti reſpondens. Et motus Nodorum, quo tempore Sol pergit ab *N* ad *A*, eſt ad 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴½ ut area *NAZ* ad circulum totum.



Hæc ita ſe habent, ex Hypotheſi quod Nodus horis ſingulis in locum priorem retrahitur, ſic ut Sol anno toto completo ad Nodum eundem redeat à quo ſub initio digreſſus fuerat. Verum per motum Nodi fit ut Sol citius ad Nodum revertatur, & computanda jam eſt abbreviatio temporis. Cum Sol anno toto conficiat 360 gradus, & Nodus motu maximo eodem tempore conficeret 39 *gr.* 38′. 5″. 39‴ ſeu 39,6349 gradus; & motus mediocris Nodi

in

in loco quovis *N* ſit ad ipſius motum mediocrem in Quadraturis ſuis, ut *AZq.* ad *ATq.* erit motus Solis ad motum Nodi in *N*, ut 360 *ATq.* ad 39,6349 *AZq.*; id eſt ut 9,0829032 *ATq.* ad *AZq.* Unde ſi circuli totius circumferentia *NAn* dividatur in particulas æquales *Aa*, tempus quo Sol percurrat particulam *Aa*, ſi circulus quieſceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, ſi circulus una cum Nodis circa centrum *T* revolvatur, reciprocè ut 9,0829032 *ATq.* ad 9,0829032 *ATq.* + *AZq.* Nam tempus eſt reciprocè ut velocitas qua particula percurritur, & hæc velocitas eſt ſumma velocitatum Solis & Nodi. Igitur ſi tempus, quo Sol abſque motu Nodi percurreret arcum *NA*, exponatur per Sectorem *NTA*, & particula temporis quo percurreret arcum quam minimum *Aa*, exponatur per Sectoris particulam *ATa*; & (perpendiculo *aY* in *Nn* demiſſo) ſi in *AZ* capiatur *dZ*, ejus longitudinis ut ſit rectangulum *dZ* in *ZY* ad Sectoris particulam *ATa* ut *AZq.* ad 9,0829032 *ATq.* + *AZq.* id eſt ut ſit *dZ* ad $\frac{1}{2}$*AZ* ut *ATq.* ad 9,0829032 *ATq.* + *AZq.*; rectangulum *dZ* in *ZY* deſignabit decrementum temporis ex motu Nodi oriundum, tempore toto quo arcus *Aa* percurritur. Et ſi punctum *d* tangit curvam *NdGn*, area curvilinea *NdZ* erit decrementum totum, quo tempore arcus totus *NA* percurritur; & propterea exceſſus Sectoris *NAT* ſupra aream *NdZ* erit tempus illud totum. Et quoniam motus Nodi tempore minore minor eſt in ratione temporis, debebit etiam area *AaYZ* diminui in eadem ratione. Id quod fiet ſi capiatur in *AZ* longitudo *eZ*, quæ ſit ad longitudinem *AZ* ut *AZq.* ad 9,0829032 *ATq.* + *AZq.* Sic enim rectangulum *eZ* in *ZY* erit ad aream *AZYa* ut decrementum temporis, quo arcus *Aa* percurritur, ad tempus totum, quo percurreretur ſi Nodus quieſceret: Et propterea rectangulum illud reſpondebit decremento motus Nodi. Et ſi punctum *e* tangat curvam *NeFn*, area tota *NeZ*, quæ ſumma eſt omnium decrementorum, reſpondebit decremento toti, quo tempore arcus *AN* percurritur; & area reliqua *NAe* reſpondebit motui reliquo, qui verus eſt Nodi motus quo tempore arcus

totus

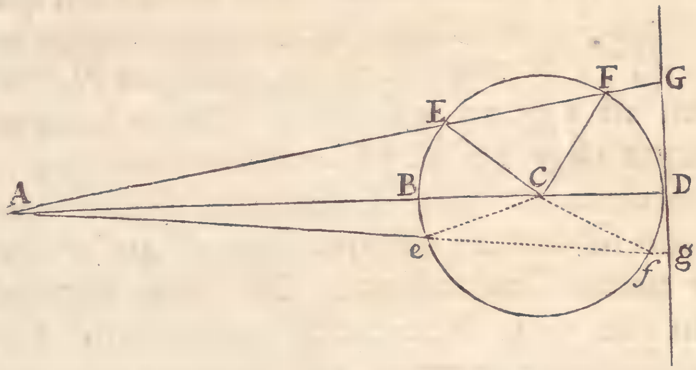
totus *NA*, per Solis & Nodi conjunctos motus, percurritur. Jam verò ſi circuli radius *AT* ponatur 1, erit area ſemicirculi 1,570796; & area figuræ *NeFnT*, per methodum Serierum infinitarum quæſita, prodibit 0,1188478. Motus autem qui reſpondet circulo toti erat 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴$\frac{1}{2}$; & propterea motus, qui figuræ *NeFnT* duplicatæ reſpondet, eſt 1 *gr.* 29′. 57″. 51‴$\frac{1}{2}$. Qui de motu priore ſubductus relinquit 18 *gr.* 19′. 4″. 58‴. motum totum Nodi inter ſui ipſius Conjunctiones cum Sole; & hic motus de Solis motu annuo graduum 360 ſubductus, relinquit 341 *gr.* 40′. 55″. 2‴. motum Solis inter eaſdem Conjunctiones. Iſte autem motus eſt ad motum annuum 360 *gr.* ut Nodi motus jam inventus 18 *gr.* 19′. 4″. 58‴. ad ipſius motum annuum, qui propterea erit 19 *gr.* 18′. 0″. 22‴. Hic eſt motus medius Nodorum in anno ſidereo. Idem per Tabulas Aſtronomicas eſt 19 *gr.* 20′. 31″. 1‴. Differentia minor eſt parte quadringenteſima motus totius, & ab Orbis Lunaris Excentricitate & Inclinatione ad planum Eclipticæ oriri videtur. Per Excentricitatem Orbis motus Nodorum nimis acceleratur, & per ejus Inclinationem viciſſim retardatur aliquantulum, & ad juſtam velocitatem reducitur.

Prop. XXXIII. Prob. XIII.

Invenire motum verum Nodorum Lunæ.

In tempore quod eſt ut area *NTA* — *NdZ*, (*in Fig. præced.*) motus iſte eſt ut area *NAeN*, & inde datur. Verum ob nimiam calculi difficultatem, præſtat ſequentem Problematis conſtructionem adhibere. Centro *C*, intervallo quovis *CD*, deſcribatur circulus *BEFD*. Producatur *DC* ad *A*, ut ſit *AB* ad *AC* ut motus medius ad ſemiſſem motus veri mediocris, ubi Nodi ſunt in Quadraturis: (id eſt ut 19 *gr.* 18′. 0″. 22‴. ad 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴$\frac{1}{2}$, atque adeo *BC* ad *AC* ut motuum differentia 0 *gr.* 31′. 2″. 27‴$\frac{1}{2}$, ad motum ſuperiorem 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴$\frac{1}{2}$, hoc eſt, ut 1 ad

ad 38⅓) dein per punctum D ducatur infinita Gg, quæ tangat circulum in D; & ſi capiatur angulus BCE vel BCF æqualis ſemiſſi diſtantiæ Solis à loco Nodi, per motum medium invento; & agatur AE vel AF ſecans perpendiculum DG in G; & capiatur angulus qui ſit ad motum Nodi



inter ipſius Syzygias (id eſt ad 9 *gr.* 10′. 40″.) ut tangens DG ad circuli BED circumferentiam totam, atque angulus iſte ad motum medium Nodorum addatur; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus ſic inventus congruet quam proximè cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream $NTA - NdZ$, & motum Nodi per aream $NAeN$; ut rem perpendenti conſtabit. Hæc eſt æquatio annua motus Nodorum. Eſt & æquatio menſtrua, ſed quæ ad inventionem Latitudinis Lunæ minimè neceſſaria eſt. Nam cum Variatio inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia ſit, alteri annuæ, alteri autem menſtruæ; hujus menſtrua inæqualitas & æquatio menſtrua Nodorum ita ſe mutuò contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda Latitudine Lunæ negligi poſſint.

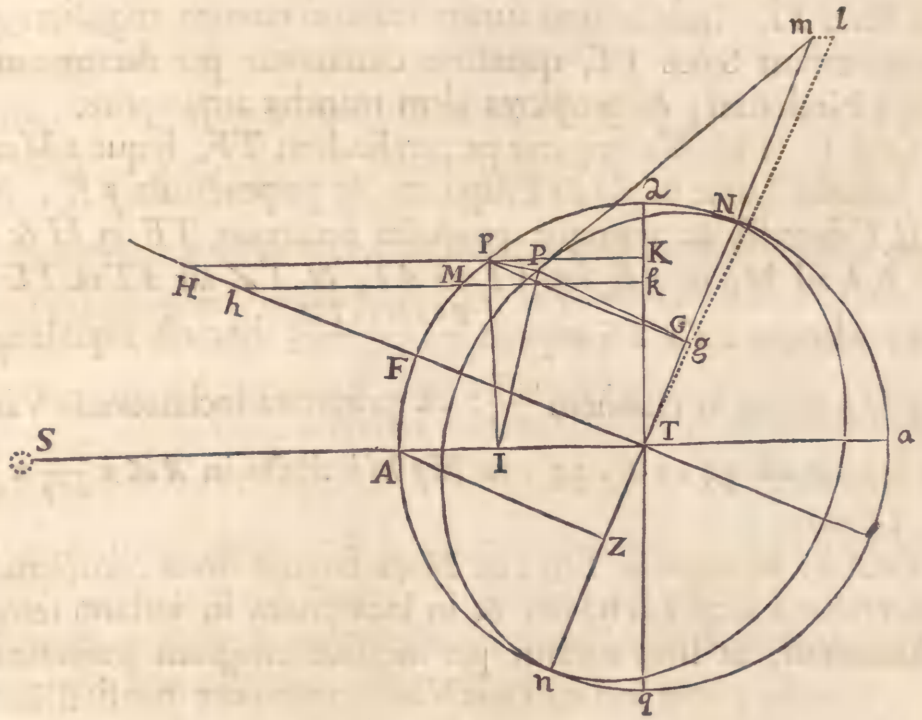
Corol. Ex hac & præcedente Propoſitione liquet quod Nodi in Syzygiis ſuis quieſcunt, in Quadraturis autem regrediuntur motu horario 16″. 18‴. 41$^{iv}\frac{1}{2}$. Et quod æquatio motus Nodorum in Octantibus ſit 1 *gr.* 30′. Quæ omnia cum Phænomenis cœleſtibus probè quadrant.

Prop.

Prop. XXXIV. Prob. XIV.

Invenire Variationem horariam inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.

Deſignent *A* & *a* Syzygias; *Q* & *q* Quadraturas; *N* & *n* Nodos; *P* locum Lunæ in Orbe ſuo; *p* veſtigium loci illius in plano Eclipticæ, & *m T l* motum momentaneum Nodorum ut ſupra. Et ſi ad lineam *T m* demittatur perpendiculum *P G*, jungatur *p G*,



& producatur ea donec occurrat *T l* in *g*, & jungatur etiam *P g*: erit angulus *P G p* inclinatio orbis Lunaris ad planum Eclipticæ, ubi Luna verſatur in *P*; & angulus *P g p* inclinatio ejuſdem poſt momentum temporis completum, adeoque angulus *G P g* Variatio

momentanea inclinationis. Eſt autem hic angulus $G\mathfrak{P}g$ ad angulum GTg ut TG ad $\mathfrak{P}G$ & $\mathfrak{P}p$ ad $\mathfrak{P}G$ conjunctim. Et propterea ſi pro momento temporis ſubſtituatur hora; cum angulus GTg (per Prop. XXX.) ſit ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $IT \times \mathfrak{P}G \times AZ$ ad AT *cub.* erit angulus $G\mathfrak{P}g$ (ſeu inclinationis horaria Variatio) ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{\mathfrak{P}p}{\mathfrak{P}G}$ ad AT *cub.* *Q. E. I.*

Hæc ita ſe habent ex Hypotheſi quod Luna in Orbe circulari uniformiter gyratur. Quod ſi orbis ille Ellipticus ſit, motus mediocris Nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti ſupra expoſitum eſt. Et in eadem ratione minuetur etiam Sinus IT. Inclinationis autem Variatio tantum augebitur per decrementum Sinus IT, quantum diminuitur per decrementum motus Nodorum; & propterea idem manebit atque prius.

Corol. 1. Si ad Nn erigatur perpendiculum TF, ſitque pM motus horarius Lunæ in plano Eclipticæ; & perpendicula pK, Mk in QT demiſſa & utrinque producta occurrant TF in H & h: erit Kk ad Mp ut pK ſeu IT ad AT, & TZ ad AT ut TG ad Hp; ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc eſt æquale areæ $HpMh$ ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$: & propterea inclinationis Variatio horaria ad $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $HpMh$ ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{\mathfrak{P}p}{\mathfrak{P}G}$ ad AT *cub.*

Corol. 2. Ideoque ſi Terra & Nodi ſingulis horis completis retraherentur à locis ſuis novis, & in loca priora in inſtanti ſemper reducerentur, ut ſitus eorum, per menſem integrum periodicum, datus maneret; tota Inclinationis Variatio tempore menſis illius foret ad $33''. 10'''. 33^{iv}$, ut aggregatum omnium arearum $HpMh$, in revolutione puncti p genetarum, & ſub ſignis propriis $+$ & $-$ conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{\mathfrak{P}p}{\mathfrak{P}G}$, ad $Mp \times AT$ *cub.* id eſt ut circulus totus $QAqa$ ductus in $AZ \times TZ \times \frac{\mathfrak{P}p}{\mathfrak{P}G}$ ad $Mp \times AT$

cub.

cub. hoc eſt ut circumferentia *QAqa* ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,Mp \times PT$ *quad.*

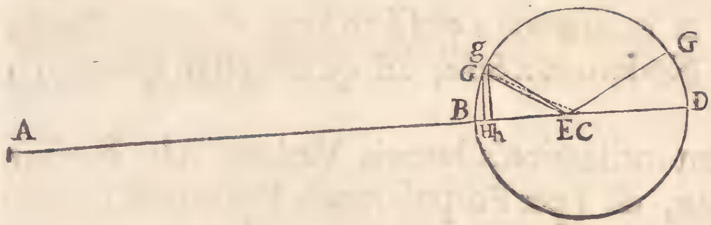
Corol. 3. Proinde in dato Nodorum ſitu, Variatio mediocris horaria, ex quâ per menſem uniformiter continuatâ Variatio illa menſtrua generari poſſet, eſt ad 33″. 10‴. 33^{iv}. ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,ATq.$ id eſt (cum Pp ſit ad PG ut Sinus Inclinationis prædictæ ad Radium, & $\frac{AZ \times TZ}{AT}$ ſit ad $\frac{1}{2}AT$ ut ſinus duplicati anguli ATn ad Radium) ut inclinationis ejuſdem Sinus ductus in Sinum duplicatæ diſtantiæ Nodorum à Sole, ad quadruplum quadratum Radii.

Corol. 4. Quoniam inclinationis horaria Variatio, ubi Nodi in Quadraturis verſantur, eſt (per Propoſitionem ſuperiorem) ad angulum 33″. 10‴. 33^{iv}. ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* id eſt ut $\frac{IT \times TG}{AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT; hoc eſt ut Sinus duplicatæ diſtantiæ Lunæ à Quadraturis ductus in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: ſumma omnium Variationum horariarum, quo tempore Luna in hoc ſitu Nodorum tranſit à Quadratura ad Syzygiam, (id eſt ſpatio horarum $177\frac{1}{6}$,) erit ad ſummam totidem angulorum 33″. 10‴. 33^{iv}. ſeu $5878''\frac{1}{2}$, ut ſumma omnium ſinuum duplicatæ diſtantiæ Lunæ à Quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad ſummam totidem diametrorum; hoc eſt ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$, ad circumferentiam; id eſt ſi inclinatio ſit 5 *gr.* 2′, ut $7 \times \frac{876}{10000}$ ad 22, ſeu 279 ad 10000. Proindeque Variatio tota, ex ſumma omnium horariarum Variationum tempore prædicto conflata, eſt 164″, ſeu 2′. 44″.

Prop. XXXV. Prob. XV.

Dato tempore invenire Inclinationem Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.

Sit *AD* Sinus inclinationis maximæ, & *AB* Sinus Inclinationis minimæ. Biſecetur *BD* in *C*, & centro *C*, intervallo *BC*, deſcribatur Circulus *BGD*. In *AC* capiatur *CE* in ea ratione ad *EB* quam *EB* habet ad 2*BA*: Et ſi dato tempore conſtituatur angulus *AEG* æqualis duplicatæ diſtantiæ Nodorum à Quadraturis, & ad *AD* demittatur perpendiculum *GH*: erit *AH* Sinus inclinationis quæſitæ.



Nam $GEq.$ æquale eſt $GHq. + HEq. = BHD + HEq. = HBD + HEq. - BHq. = HBD + BEq. - 2BH \times BE = BEq. + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$. Ideoque cum $2EC$ detur, eſt $GEq.$ ut AH. Deſignet jam AEg diſtantiam Nodorum à Quadraturis poſt datum aliquod momentum temporis completum, & arcus Gg, ob datum angulum GEg, erit ut diſtantia GE. Eſt autem Hh ad Gg ut GH ad GC, & propterea Hh eſt ut contentum $GH \times Gg$ ſeu $GH \times GE$; id eſt ut $\frac{GH}{GE} \times GE\,qu.$ ſeu $\frac{GH}{GE} \times AH$, id eſt ut AH & ſinus anguli AEG conjunctim. Igitur ſi AH in caſu aliquo ſit Sinus inclinationis, augebitur ea iiſdem incrementis cum ſinu inclinationis, per Corol. 3. Propoſitionis ſuperioris, & propterea ſinui illi æqualis ſemper manebit. Sed AH ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D huic Sinui æqualis eſt, & propterea eidem ſemper æqualis manet. *Q. E. D.*

In

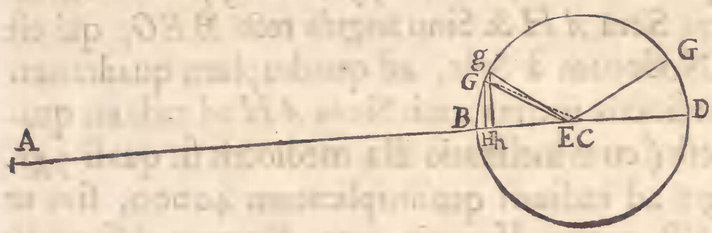
In hac demonſtratione ſuppoſui angulum *BEG*, qui diſtantia eſt Nodorum à Quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum *BEG* rectum eſſe, & *Gg* eſſe augmentum horarium diſtantiæ Nodorum & Solis ab invicem; & inclinationis Variatio horaria (per Corol. 3. Prop. noviſſimæ) erit ad 33″. 10‴. 33^iv. ut contentum ſub inclinationis Sinu *AH* & Sinu anguli recti *BEG*, qui eſt duplicata diſtantia Nodorum à Sole, ad quadruplum quadratum Radii; id eſt ut mediocris inclinationis Sinus *AH* ad radium quadruplicatum; hoc eſt (cum inclinatio illa mediocris ſit quaſi 5 *gr.* 8′$\frac{1}{2}$) ut ejus Sinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, ſive ut 224 ad 10000. Eſt autem Variatio tota, Sinuum differentiæ *BD* reſpondens, ad variationem illam horariam ut diameter *BD* ad arcum *Gg*; id eſt ut diameter *BD* ad ſemicircumferentiam *BGD* & tempus horarum 2080, quo Nodus pergit à Quadraturis ad Syzygias, ad horam unam conjunctim; hoc eſt ut 7 ad 11 & 2080 ad 1. Quare ſi rationes omnes conjungantur, fiet Variatio tota *BD* ad 33″. 10‴. 33^iv. ut 224 x 7 x 2080 ad 110000, id eſt ut 2965 ad 100, & inde Variatio illa *BD* prodibit 16′. 24″.

Hæc eſt inclinationis Variatio maxima quatenus locus Lunæ in Orbe ſuo non conſideratur. Nam inclinatio, ſi Nodi in Syzygiis verſantur, nil mutatur ex vario ſitu Lunæ. At ſi Nodi in Quadraturis conſiſtunt, inclinatio major eſt ubi Luna verſatur in Syzygiis, quàm ubi ea verſatur in Quadraturis, exceſſu 2′. 44″; uti in Propoſitionis ſuperioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus exceſſus dimidio 1′. 22″ Variatio tota mediocris *BD* in Quadraturis Lunaribus diminuta fit 15′. 2″, in ipſius autem Syzygiis aucta fit 17′. 46″. Si Luna igitur in Syzygiis conſtituatur, Variatio tota, in tranſitu Nodorum à Quadraturis ad Syzygias, erit 17′. 46″. adeoque ſi Inclinatio, ubi Nodi in Syzygiis verſantur, ſit 5 *gr.* 17′. 46″. eadem, ubi Nodi ſunt in Quadraturis, & Luna in Syzygiis, erit 5 *gr.* Atque hæc ita ſe habere confirmatur ex Obſervationibus. Nam ſtatuunt Aſtronomi Inclinationem Orbis Lunaris ad planum Eclip-

ticæ,

ticæ, ubi Nodi ſunt in Quadraturis & Luna in oppoſitione Solis, eſſe quaſi 5 *gr.* Ubi verò Nodi ſunt in Syzygiis, eandem docent eſſe 5 *gr.* $17\frac{1}{2}'$ vel 5 *gr.* 18′.

Si jam deſideretur Orbis Inclinatio illa, ubi Luna in Syzygiis & Nodi ubivis verſantur; fiat *AB* ad *AD* ut Sinus 5 *gr.* ad Sinum 5 *gr.* 17′. 46″, & capiatur angulus *AEG* æqualis duplicatæ diſtantiæ Nodorum à Quadraturis; & erit *AH* Sinus Inclinationis quæſitæ. Huic Orbis Inclinationi æqualis eſt ejuſdem Inclinatio, ubi Luna diſtat 90 *gr.* à Nodis. Aliis in Lunæ locis inæqualitas menſtrua, quam Inclinationis variatio admittit, in calculo Latitudinis Lunæ compenſatur & quodammodo tollitur per inæqualitatem menſtruam motus Nodorum, (ut ſupra diximus) adeoque in calculo Latitudinis illius negligi poteſt.



Scholium.

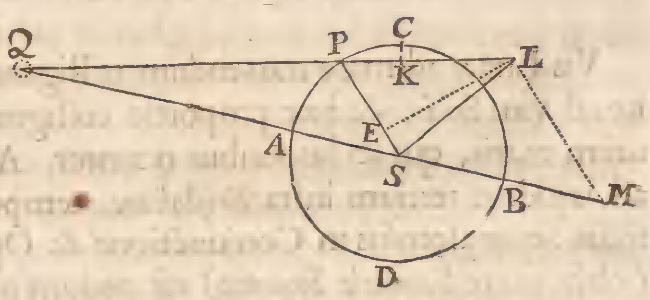
Hactenus de motibus Lunæ quatenus Excentricitas Orbis non conſideratur. Similibus computationibus inveni, quod Apogæum, ubi in Conjunctione vel Oppoſitione Solis verſatur, progreditur ſingulis diebus 23′ reſpectu Fixarum; ubi verò in Quadraturis eſt, regreditur ſingulis diebus $16\frac{1}{3}$ circiter: quodque ipſius motus medius annuus ſit quaſi 40 *gr.* Per Tabulas Aſtronomicas à *Cl.Flamſtedio* ad Hypotheſin *Horroxii* accommodatas, Apogæum in ipſius Syzygiis progreditur cum motu diurno 24′. 28″, in Quadraturis autem regreditur cum motu diurno 20′. 12″, & motu medio annuo 40 *gr.* 41′ fertur in conſequentia. Quod differentia inter motum diurnum progreſſivum Apogæi in ipſius Syzygiis, & motum diurnum regreſſivum in ipſius Quadraturis, per Tabulas ſit 4′. 16″, per computationem verò noſtram $6\frac{2}{3}'$, vitio Tabularum tribuendum eſſe ſuſpi-

ſuſpicamur. Sed neque computationem noſtram ſatis accuratam eſſe putamus. Nam rationem quandam ineundo prodiere Apogæi motus diurnus progreſſivus in ipſius Syzygiis, & motus diurnus regreſſivus in ipſius Quadraturis, paulo majores. Computationes autem, ut nimis perplexas & approximationibus impeditas, neque ſatis accuratas, apponere non lubet.

Prop. XXXVI. Prob. XVI.

Invenire vim Solis ad Mare movendum.

Solis vis *ML* ſeu *PS*, in Quadraturis Lunaribus, ad perturbandos motus Lunares, erat (per Prop. XXV. hujus) ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 638092,6. Et vis *SM—LM* ſeu 2*PK* in Syzygiis Lunaribus eſt duplo major. Hæ autem vires, ſi deſcendatur ad ſuperficiem Terræ, diminuuntur in ratione diſtantiarum à centro Terræ, id eſt in ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; adeoque vis prior in ſuperficie Terræ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hac vi Mare deprimitur in locis quæ 90 *gr.* diſtant à Sole. Vi alterâ quæ duplo major eſt Mare elevatur, & ſub Sole & in regione Soli oppoſita. Summa virium eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, ſive ea deprimat Aquam in regionibus quæ 90 *gr.* diſtant à Sole, ſive elevet eandem in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis, hæc ſumma erit tota Solis vis ad Mare agitandum; & eundem habebit effectum ac ſi tota in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 *gr.* diſtant à Sole nil ageret.



Corol.

Corol. Hinc cum vis centrifuga partium Terræ à diurno Terræ motu oriunda, quæ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 291, efficiat ut altitudo Aquæ ſub Æquatore ſuperet ejus altitudinem ſub polis menſura pedum Pariſienſium 85200, vis Solaris, de qua egimus, cum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque adeo ad vim illam centrifugam ut 291 ad 12868200 ſeu 1 ad 44221, efficiet ut altitudo aquæ in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis ſuperet altitudinem ejus in locis quæ 90 gradibus diſtant à Sole, menſura tantum pedis unius Pariſienſis & digitorum undecim. Eſt enim hæc menſura ad menſuram pedum 85200 ut 1 ad 44221.

Prop. XXXVII. Prob. XVII.

Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.

Vis Lunæ ad mare movendum colligenda eſt ex ejus proportione ad vim Solis, & hæc proportio colligenda ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante oſtium fluvii *Avonæ*, ad lapidem tertium infra *Briſtoliam*, tempore verno & autumnali totus aquæ aſcenſus in Conjunctione & Oppoſitione Luminarium (obſervante *Samuele Sturmio*) eſt pedum plus minus 45, in Quadraturis autem eſt pedum tantum 25: Altitudo prior ex ſumma virium, poſterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & Lunæ in Æquatore verſantium & mediocriter à Terra diſtantium, ſunto vires S & L. Et quoniam Luna in Quadraturis, tempore verno & autumnali extra Æquatorem in declinatione graduum plus minus $23\frac{1}{2}$ verſatur, & Luminaris ab Æquatore declinantis vis ad mare movendum minor ſit, idque (quantum ſentio) in duplicata ratione Sinus complementi declinationis quam proximè, vis Lunæ in Quadraturis, (cum ſinus ille ſit ad radium ut 91706 ad 100000) erit $\frac{841}{1000} L$, & ſumma virium in Syzygiis erit $L + S$, ac differentia in Quadraturis $\frac{841}{1000} L - S$, adeoque $L + S$ erit ad $\frac{841}{1000} L - S$ ut 45 ad 25 ſeu 9 ad 5, & inde $5 L + 5 S$ æqualis erit $\frac{7569}{1000} L - 9 S$, &

14 S æqualis $\frac{2569}{1000}L$, & propterea L ad S ut 14000 ad 2569 ſeu $5\frac{7}{15}$ ad 1. In Portu *Plymuthi* æſtus maris (ex obſervatione *Samuelis Colepreſſi*) ad pedes plus minus ſexdecim, altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo æſtus in Syzygiis Lunæ ſuperare poteſt altitudinem ejus in Quadraturis pedibus ſeptem vel octo. Si exceſſus mediocris his temporibus ſit pedum ſeptem cum dimidio; æſtus in Syzygiis aſcendet ad pedes $19\frac{3}{4}$, in Quadraturis ad pedes $12\frac{1}{4}$, & ſic $L+S$ erit ad $\frac{841}{1000}L-S$ ut $19\frac{3}{4}$ ad $12\frac{1}{4}$, & inde L ad S ut 734 ad 100 ſeu $7\frac{1}{3}$ ad 1. Eſt igitur vis Lunæ ad vim Solis per computationem priorem ut $5\frac{7}{15}$ ad 1, per poſteriorem ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Donec aliquid certius ex Obſervationibus accuratius inſtitutis conſtiterit, uſurpabimus proportionem mediocrem $6\frac{1}{3}$ ad 1. Unde cum vis Solis ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis Lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2031821.

Corol. 1. Igitur cum aqua vi Solis agitata ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum aſcendat, eadem vi Lunæ aſcendet ad altitudinem pedum duodecim. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abunde ſufficit, & quantitati motuum probe reſpondet. Nam in maribus quæ ab Oriente in Occidentem latè patent, uti in Mari *Pacifico*, & Maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra Tropicos, aqua attolli ſolet ad altitudinem pedum ſex, novem duodecim vel quindecim. In mari autem *Pacifico*, quod profundius eſt & latius patet, æſtus dicuntur eſſe majores quàm in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut plenus ſit æſtus, latitudo Maris ab Oriente in Occidentem non minor eſſe debet quàm graduum nonaginta. In Mari *Æthiopico*, aſcenſus aquæ intra Tropicos minor eſt quàm in Zonis temperatis, propter anguſtiam Maris inter *Africam* & Auſtralem partem *Americæ*. In medio Mari aqua nequit aſcendere niſi ad littus utrumque & orientale & occidentale ſimul deſcendat: cum tamen vicibus alternis ad littora illa in Maribus noſtris anguſtis deſcendere debeat. Ea de cauſa fluxus & refluxus in Inſulis, quæ à littoribus longiſſimè abſunt, perexiguus eſſe ſolet. In Portubus quibuſdam, ubi aqua cum impetu magno per loca

vadoſa, ad Sinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus ſunt ſolito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepſtowæ* in *Anglia*; ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Auranches*) in *Normania*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magna cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa Milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi poteſt, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40 vel 50 & amplius. Et par eſt ratio fretorum oblongorum & vadoſorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circundatur. Æſtus in hujuſmodi portubus & fretis per impetum curſus & recurſus ſupra modum augetur. Ad littora verò quæ deſcenſu præcipiti ad mare profundum & apertum ſpectant, ubi aqua ſine impetu effluendi & remeandi attolli & ſubſidere poteſt, magnitudo æſtus reſpondet viribus Solis & Lunæ.

Corol. 2. Cum vis Lunæ ad mare movendum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 2031821, perſpicuum eſt quod vis illa ſit longè minor quàm quæ vel in experimentis Pendulorum, vel in Staticis aut Hydroſtaticis quibuſcunque ſentiri poſſit. In æſtu ſolo marino hæc vis ſenſibilem edit effectum.

Corol. 3. Quoniam vis Lunæ ad mare movendum eſt ad Solis vim conſimilem ut $6\frac{1}{3}$ ad 1, & vires illæ ſunt ut denſitates corporum Lunæ & Solis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; erit denſitas Lunæ ad denſitatem Solis ut $6\frac{1}{3}$ ad 1 directè & cubus diametri Solis ad cubum diametri Lunæ inversè, id eſt (cum diametri mediocres apparentes Solis & Lunæ ſint 31′. 27″. & 32′. 12″.) ut 34 ad 5. Denſitas autem Solis erat ad denſitatem Terræ ut 100 ad 387, & propterea denſitas Lunæ eſt ad denſitatem Terræ ut 680 ad 387, ſeu 9 ad 5 quam proximè. Eſt igitur corpus Lunæ denſius & magis terreſtre quàm Terra noſtra.

Corol. 4. Unde cum vera diameter Lunæ ſit ad veram diametrum Terræ ut 1 ad $3{,}6\frac{1}{2}$, erit maſſa Lunæ ad maſſam Terræ ut 1 ad 26 quam proximè.

Corol.

Corol. 5. Et gravitas acceleratrix in ſuperficie Lunæ, erit quaſi duplo minor quàm gravitas acceleratrix in ſuperficie Terræ.

Prop. XXXVIII. Prob. XVIII.

Invenire figuram corporis Lunæ.

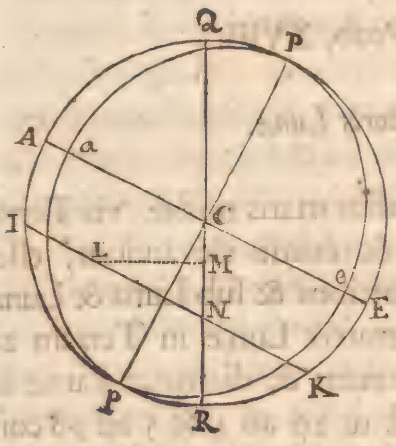
Si corpus Lunare fluidum eſſet ad inſtar maris noſtri, vis Terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum, eſſet ad vim Lunæ, qua mare noſtrum in partibus & ſub Luna & Lunæ oppoſitis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam & diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim; id eſt ut 26 ad 1 & 5 ad 18 conjunctim ſeu 65 ad 9. Unde cum mare noſtrum vi Lunæ attollatur ad pedes duodecim, fluidum Lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes fere nonaginta. Eaque de cauſa figura Lunæ Sphærois eſſet, cujus maxima diameter producta tranſiret per centrum Terræ, & ſuperaret diametros perpendiculares exceſſu pedum 180. Talem igitur figuram Luna affectat, eamque ſub initio induere debuit. *Q. E. I.*

Corol. Inde verò fit ut eadem ſemper Lunæ facies in Terram obvertatur. In alio enim ſitu corpus Lunare quieſcere non poteſt, ſed ad hunc ſitum oſcillando ſemper redibit. Attamen oſcillationes ob parvitatem virium agitantium eſſent longè tardiſſimæ: adeò ut facies illa, quæ Terram ſemper reſpicere deberet, poſſit alterum orbis Lunaris umbilicum, ob rationem ſuperius allatam reſpicere, neque ſtatim abinde retrahi & in Terram converti.

Lemma I.

Si A P E p *Terram deſignet uniformiter denſam, centroque* C *&* *polis* P, p *&* *æquatore* A E *delineatam; &* *ſi centro* C *radio* C P *deſcribi intelligatur ſphæra* Pape; *ſit autem* Q R *planum, cui recta à centro*

tro Solis ad centrum Terræ ducta normaliter inſiſtit; & Terræ totius exterioris PapAPepE, *quæ Sphærâ modò deſcriptâ altior eſt, particulæ ſingulæ conantur recedere hinc inde à plano* QR, *ſitque conatus particulæ cujuſque ut ejuſdem diſtantia à plano: erit vis & efficacia tota particularum omnium, ad Terram circulariter movendam, quadruplo minor quàm vis tota particularum totidem in Æquatoris circulo* AE, *uniformiter per totum circuitum in morem annuli diſpoſitarum, ad Terram conſimili motu circulari movendam. Et motus iſte circularis circa axem in plano* QR *jacentem, & axi* Pp *perpendiculariter inſiſtentem, peragetur.*



Sit enim *IK* circulus minor Æquatori *AE* parallelus, ſitque *L* particula Terræ in circulo illo extra globum *Pape* ſita. Et ſi in planum *QR* demittatur perpendiculum *LM*, vis tota particulæ illius ad Terram circa ipſius centrum convertendum proportionalis erit eidem *LM*: & ſi hæc vis *LM* (per Legum Corol. 2.) diſtinguatur in vires *LN*, *NM*; efficacia virium *MN* particularum omnium *L*, in circuitu Terræ totius extra globum *Pape* conſiſtentium, ad Terram circa ipſius centrum ſecundum ordinem literarum *ApEP* convertendam, erit ad efficaciam virium *LN* particularum omnium *L*, ad Terram circa ipſius centrum ſecundum ordinem contrarium earundem literarum convertendam, ut tria ad duo. Ideoque efficacia virium omnium *MN* erit ad exceſſum efficaciæ hujus ſupra efficaciam virium omnium *LN* ut tria ad unum. Et ſi particulæ illæ omnes locarentur in Æquatore, efficacia virium omnium *LN* evaneſceret, & efficacia virium omnium *MN* augeretur in ratione quatuor ad tria. Quare exceſſus ille, qui eſt efficacia abſoluta particularum in locis propriis, eſt pars quarta efficaciæ particularum earundem in Æquatore. Motus autem æquino-

ctiorum

ctiorum eſt ut hæc efficacia. Singula examinet qui volet. Brevitati conſulo.

Lemma II.

Motus autem Terræ totius circa axem illum, ex motibus particularum omnium compoſitus, erit ad motum annuli circa axem eundem, in ratione compoſita ex ratione materiæ in Terra ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuſcunque, ad duo quadrata ex diametro; id eſt in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 *&* 1000000.

Eſt enim motus Cylindri circa axem ſuum immotum revolventis, ad motum Sphæræ inſcriptæ & ſimul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis ſibi inſcriptis: & motus Cylindri ad motum annuli tenuiſſimi, Sphæram & Cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiæ in Cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iſte circa axem Cylindri uniformiter continuatus, ad ejuſdem motum uniformem circa diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

Lemma III.

Si annulus, Terra omni reliqua ſublata, ſolus in orbe Terræ motu annuo circa Solem ferretur, & interea circa axem ſuum, ad planum Eclipticæ in angulo graduum $23\frac{1}{2}$ *inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus Punctorum Æquinoctialium ſive annulus iſte fluidus eſſet, ſive is ex materia rigida & firma conſtaret.*

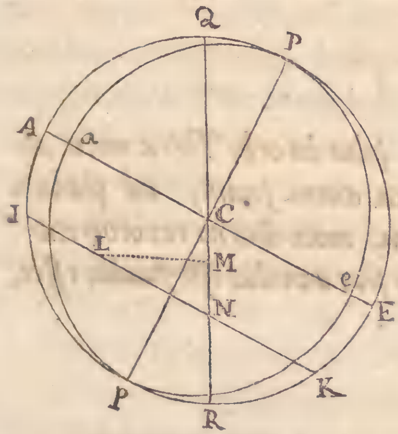
Prop.

Prop. XXXIX. Prob. XIX.

Invenire Præceſſionem Æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius Nodorum Lunæ in Orbe circulari, ubi Nodi ſunt in Quadraturis, erat $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. & hujus dimidium $8''. 17'''. 38^{iv}. 18^{v}$. (ob rationes ſupra explicatas) eſt motus medius horarius Nodorum in tali Orbe; fitque anno toto ſidereo 20 *gr.* 11′. 46″. Quoniam igitur Nodi Lunæ in tali Orbe conficerent annuatim 20 *gr.* 11′. 46″. in antecedentia; & ſi plures eſſent Lunæ motus Nodorum cujuſque, per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I. forent reciprocè ut tempora periodica; & propterea ſi Luna ſpatio diei ſiderei juxta ſuperficiem Terræ revolveretur, motus annuus Nodorum foret ad 20 *gr.* 11′. 46″. ut dies ſidereus horarum 23. 56′. ad tempus periodicum Lunæ dierum 27. 7 hor. 43′; id eſt ut 1436 ad 39343. Et par eſt ratio Nodorum annuli Lunarum Terram ambientis; ſive Lunæ illæ ſe mutuò non contingant, ſive liqueſcant & in annulum continuum formentur, ſive denique annulus ille rigeſcat & inflexibilis reddatur.

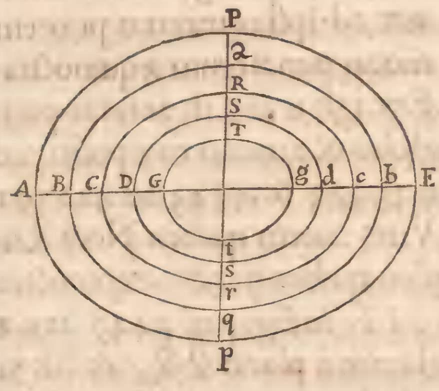
Fingamus igitur quod annulus iſte quoad quantitatem materiæ æqualis ſit Terræ omni *PapAPepE*, quæ globo *PapE* ſuperior eſt; & quoniam globus iſte eſt ad Terram illam ſuperiorem ut *aC qu.* ad *AC qu.* — *aC qu.* id eſt (cum Terræ diameter minor *PC* vel *aC* ſit ad diametrum majorem *AC* ut 689 ad 692) ut 4143 ad 474721 ſeu 1000 ad 114584; ſi annulus iſte Terram ſecundum æquatorem cingeret, & uterque ſimul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli eſſet ad motum globi interioris (per hu-



hujus Lem. II.) ut 4143 ad 474721 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc eſt ut 4143 ad 439248: ideoque motus annuli eſſet ad ſummam motuum annuli & globi, ut 4143 ad 443391. Unde ſi annulus globo adhæreat, & motum ſuum, quo ipſius Nodi ſeu puncta æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: motus qui reſtabit in annulo erit ad ipſius motum priorem ut 4143 ad 443391; & propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in eadem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis ex globo & annulo compoſiti, ad motum 20*gr.* 11′. 46″, ut 1436 ad 39343 & 4143 ad 443391 conjunctim, id eſt ut 1 ad 2932. Vires autem quibus Nodi Lunarum (ut ſupra explicui) atque adeò quibus puncta æquinoctialia annuli regrediuntur (id eſt vires 3 *IT*, *in Fig. pag.* 444.) ſunt in ſingulis particulis ut diſtantiæ particularum à plano *QR*, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per Lem. I.) ſi materia annuli per totam globi ſuperficiem, in morem figuræ *PapAPepE*, ad ſuperiorem illam Terræ partem conſtituendam ſpargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad Terram circa quamvis Æquatoris diametrum rotandam, atque adeo ad movenda puncta æquinoctialia, evaderet quadruplo minor quàm prius. Ideoque annuus æquinoctiorum regreſſus jam eſſet ad 20*gr.* 11′. 46″. ut 1 ad 11728, ac proinde fieret 6″. 12‴. 2^{iv}. Hæc eſt præceſſio Æquinoctiorum à vi Solis oriunda. Vis autem Lunæ ad mare movendum erat ad vim Solis ut $6\frac{1}{3}$ ad 1, & hæc vis pro quantitate ſua augebit etiam præceſſionem Æquinoctiorum. Ideoque præceſſio illa ex utraque cauſa oriunda jam fiet major in ratione $7\frac{1}{3}$ ad 1, & ſic erit 45″. 24‴. 15^{iv}. Hic eſt motus punctorum æquinoctialium ab actionibus Solis & Lunæ in partes Terræ, quæ globo *Pape* incumbunt, oriundus. Nam Terra ab actionibus illis in globum ipſum exercitis nullam in partem inclinari poteſt.

Deſignet jam *APEp* corpus Terræ figurâ Ellipticâ præditum, & ex uniformi materiâ conſtans. Et ſi diſtinguatur idem in figuras innumeras Ellipticas concentricas & conſimiles, *APEp*, *BQbq*, *CRcr*,

CRcr, *DSds*, *&c.* quarum diametri ſint in progreſſione Geometrica: quoniam figuræ conſimiles ſunt, vires Solis & Lunæ, quibus puncta æquinoctialia regrediuntur, efficerent ut figurarum reliquarum ſeorſim ſpectatarum puncta eadem æquinoctialia eadem cum velocitate regrederentur. Et par eſt ratio motus orbium ſingulorum *AQEq*, *BRbr*, *CScs*, *&c.* qui ſunt figurarum illarum differentiæ. Orbis uniuſcujuſque, ſi ſolus eſſet, puncta æquinoctialia eadem cum velocitate regredi deberent. Nec refert utrum orbis quilibet denſior ſit an rarior, ſi modò ex materia uniformiter denſa conſtetur. Unde etiam ſi orbes ad centrum denſiores ſint quàm ad circumferentiam, idem erit motus æquinoctiorum Terræ totius ac prius; ſi modo orbis unuſquiſque ſeorſim ſpectatus ex materia uniformiter denſa conſtet, & figura orbis non mutetur. Quod ſi figuræ orbium mutentur, Terraque ad æquatorem *AE*, ob denſitatem materiæ ad centrum, jam altius aſcendat quàm prius; regreſſus æquinoctiorum ex aucta altitudine augebitur, idque in orbibus ſingulis ſeorſim exiſtentibus, in ratione majoris altitudinis materiæ juxta orbis illius æquatorem; in Terra autem tota in ratione majoris altitudinis materiæ juxta æquatorem orbis non extimi *AQEq*, non intimi *Gg*, ſed mediocris alicujus *CScs*. Terram autem ad centrum denſiorem eſſe, & propterea ſub Æquatore altiorem eſſe quàm ad polos in majore ratione quàm 692 ad 689, in ſuperioribus inſinuavimus. Et ratio majoris altitudinis colligi ferè poteſt ex majore diminutione gravitatis ſub æquatore, quàm quæ ex ratione 692 ad 689 conſequi debeat. Exceſſus longitudinis penduli, quod in Inſula *Goree* & in illâ *Cayennæ* minutis ſingulis ſecundis oſcillatur, ſupra longitudinem Penduli quod *Pariſiis* eodem tempore oſcillatur, à



Gallis

Gallis inventi ſunt pars decima & pars octava digiti, qui tamen ex proportione 692 ad 689 prodiere $\frac{81}{1000}$ & $\frac{89}{1000}$. Major eſt itaque longitudo Penduli *Cayennæ* quàm oportet, in ratione $\frac{1}{8}$ ad $\frac{89}{1000}$, ſeu 1000 ad 712; & in Inſula *Goree* in ratione $\frac{1}{10}$ ad $\frac{81}{1000}$ ſeu 1000 ad 810. Si ſumamus rationem mediocrem 1000 ad 760; minuenda erit gravitas Terræ ad æquatorem, & ibidem augenda ejus altitudo, in ratione 1000 ad 760 quam proximè. Unde motus æquinoctiorum (ut ſupra dictum eſt) auctus in ratione altitudinis Terræ, non ad orbem extimum, non ad intimum, ſed ad intermedium aliquem, id eſt, non in ratione maxima 1000 ad 760, non in minima 1000 ad 1000, ſed in mediocri aliqua, puta 10 ad $8\frac{1}{2}$ vel 6 ad 5, evadet annuatim $54''.\ 29'''.\ 6^{iv}$.

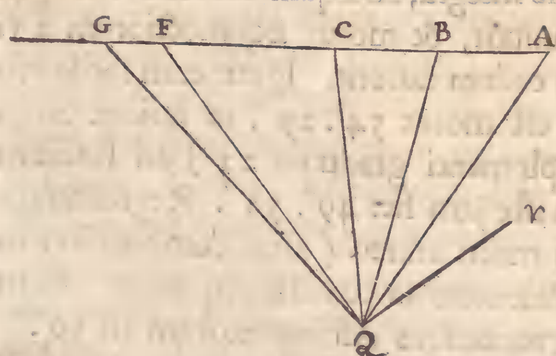
Rurſus hic motus, ob inclinationem plani Æquatoris ad planum Eclipticæ, minuendus eſt, idque in ratione Sinus complementi inclinationis ad Radium. Nam diſtantia particulæ cujuſque terreſtris à plano *QR*, quo tempore particula illa à plano Eclipticæ longiſſimè diſtat, in Tropico ſuo (ut ita dicam) conſiſtens, diminuitur, per inclinationem planorum Eclipticæ & Æquatoris ad invicem, in ratione Sinus complementi inclinationis ad Radium. Et in ratione diſtantiæ illius diminuitur etiam vis particulæ ad æquinoctia movenda. In eadem quoque ratione diminuitur ſumma virium particulæ ejuſdem, in locis hinc inde à Tropico æqualiter diſtantibus: uti ex prædemonſtratis facilè oſtendi poſſit: & propterea vis tota particulæ illius, in revolutione integrâ, ad æquinoctia movenda, ut & vis tota particularum omnium, & motus æquinoctiorum à vi illa oriundus, diminuitur in eadem ratione. Igitur cum inclinatio illa ſit $23\frac{1}{2}$ *gr.* diminuendus eſt motus $54''.\ 29'''$. in ratione Sinus 91706 (qui ſinus eſt complementi graduum $23\frac{1}{2}$) ad Radium 100000. Qua ratione motus iſte jam fiet $49''.\ 58'''$. Regrediuntur igitur puncta æquinoctiorum motu annuo (juxta computationem noſtram) $49''.\ 58'''$, fere ut Phænomena cœleſtia requirunt. Nam regreſſus ille annuus ex obſervationibus Aſtronomorum eſt $50''$.

Deſcripſimus jam Syſtema Solis, Terræ & Planetarum; ſupereſt ut de Cometis nonnulla adjiciantur.

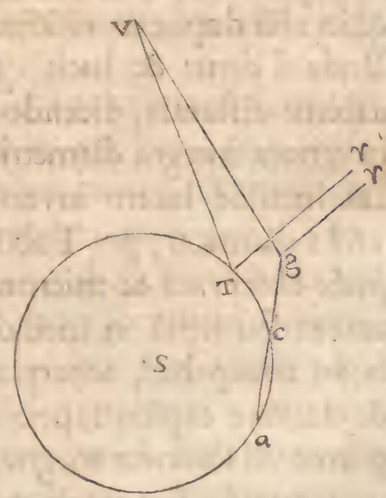
Lemma IV.

Cometas eſſe Lunâ ſuperiores & in regione Planetarum verſari.

Ut defectus Parallaxeos diurnæ extulit Cometas ſupra regiones ſublunares, ſic ex Parallaxi annua convincitur eorum deſcenſus in regiones Planetarum. Nam Cometæ qui progrediuntur ſecundum ordinem ſignorum ſunt omnes, ſub exitu apparitionis, aut ſolito tardiores aut retrogradi, ſi Terra eſt inter ipſos & Solem; at juſto celeriores ſi Terra vergit ad oppoſitionem. Et è contra, qui pergunt contra ordinem ſignorum ſunt juſto celeriores in fine apparitionis, ſi Terra verſatur inter ipſos & Solem; & juſto tardiores vel retrogradi ſi Terra ſita eſt ad contrarias partes. Contingit hoc maximè ex motu Terræ in vario ipſius ſitu, perinde ut fit in Planetis, qui, pro motu Terræ vel conſpirante vel contrario, nunc retrogradi ſunt, nunc tardiùs moveri videntur, nunc verò celeriùs. Si Terra pergit ad eandem partem cum Cometa, & motu angulari circa Solem celerius fertur, Cometa è Terra ſpectatus, ob motum ſuum tardiorem, apparet eſſe retrogradus; ſin Terra tardiùs fertur, motus Cometæ, (detracto motu Terræ) fit ſaltem tardior. At ſi Terra pergit in contrarias partes, Cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado diſtantia Cometæ in hunc modum colligitur. Sunto ♈ *QA*, ♈ *QB*, ♈ *QC* obſervatæ tres longitudines Cometæ, ſub initio motus, ſitque ♈ *QF* longitudo ultimò obſervata, ubi Cometa videri deſinit. Agatur recta *ABC*, cujus partes *AB*, *BC* rectis *QA* & *QB*,



QB, *QB* & *QC* interjectæ, ſint ad invicem ut tempora inter obſervationes tres primas. Producatur *AC* ad *G*, ut ſit *AG* ad *AB* ut tempus inter obſervationem primam & ultimam, ad tempus inter obſervationem primam & ſecundam, & jungatur *QG*. Et ſi Cometa moveretur uniformiter in linea recta, atque Terra vel quieſceret, vel etiam in linea recta, uniformi cum motu, progrederetur; foret angulus ♈*QG* longitudo Cometæ tempore Obſervationis ultimæ. Angulus igitur *FQG*, qui longitudinum differentia eſt, oritur ab inæqualitate motuum Cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, ſi Terra & Cometa in contrarias partes moventur, additur angulo *AQG*, & ſic motum apparentem Cometæ velociorem reddit: Sin Cometa pergit in eaſdem partes cum Terra, eidem ſubducitur, motumque Cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti modò expoſui. Oritur igitur hic angulus præcipuè ex motu Terræ, & idcirco pro parallaxi Cometæ meritò habendus eſt, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod à Cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri poſſit. Diſtantia verò Cometæ ex hac parallaxi ſic colligitur. Deſignet *S* Solem, *acT* orbem magnum, *a* locum Terræ in obſervatione prima, *c* locum Terræ in obſervatione ſecunda, *T* locum Terræ in obſervatione ultima, & *T*♈ lineam rectam verſus principium Arietis ductam. Sumatur angulus ♈*TV* æqualis angulo ♈*QF*, hoc eſt æqualis longitudini Cometæ ubi Terra verſatur in *T*. Jungatur *ac*, & producatur ea ad *g*, ut ſit *ag* ad *ac* ut *AG* ad *AC*, & erit *g* locus quem Terra tempore obſervationis ultimæ, motu in recta *ac* uniformiter continuato, attingeret.



Ideoque ſi ducatur *g*♈ ipſi *T*♈ parallela, & capiatur angulus ♈*gV* angulo ♈*QG* æqualis, erit hic angulus ♈*gV*

 æqua-

æqualis longitudini Cometæ è loco *g* ſpectati; & angulus *TVg* parallaxis erit, quæ oritur à tranſlatione Terræ de loco *g* in locum *T*: ac proinde *V* locus erit Cometæ in plano Eclipticæ. Hic autem locus *V* orbe Jovis inferior eſſe ſolet.

Idem colligitur ex curvatura viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine curſus, ubi motus apparentis pars illa quæ à parallaxi oritur majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere ſolent ab his circulis, & quoties Terra movetur in unam partem abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex Parallaxi, propterea quod reſpondet motui Terræ; & inſignis ejus quantitas meo computo collocavit diſparentes Cometas ſatis longè infra Jovem. Unde conſequens eſt quòd in Perigæis & Periheliis, ubi propius adſunt, deſcendunt ſæpius infra orbes Martis & inferiorum Planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœleſtis à Sole illuſtrati & in regiones longinquas abeuntis diminuitur ſplendor in quadruplicata ratione diſtantiæ: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis diſtantiam à Sole, & in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde ſi detur & lucis quantitas & apparens diameter Cometæ, dabitur diſtantia, dicendo quod diſtantia ſit ad diſtantiam Planetæ in ratione integra diametri ad diametrum directè & ratione dimidiata lucis ad lucem inversè. Sic minima Capillitii Cometæ anni 1682 diameter, per Tubum opticum ſexdecim pedum à *Cl. Flamſtedio* obſervata & micrometro menſurata, æquabat 2′. 0″. Nucleus autem ſeu ſtella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, adeoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce verò & claritate capitis ſuperabit caput Cometæ anni 1680, ſtellaſque primæ vel ſecundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo ſuo quaſi quadruplo lucidiorem fuiſſe: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi ſit quaſi 21″, adeoque lux globi & annuli con-

conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter eſſet 30″: erit diſtantiæ Cometæ ad diſtantiam Saturni ut 1 ad √4 inversè, & 12″ ad 30″ directè, id eſt ut 24 ad 30 ſeu 4 ad 5. Rurſus Cometa anni 1665 menſe *Aprili*, ut Author eſt *Hevelius*, claritate ſua pene fixas omnes ſuperabat, quinetiam ipſum Saturnum, ratione coloris videlicet longè vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat & cum ſtellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quaſi 6′, at nucleus cum Planetis ope Tubi optici collatus, plane minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipſi æqualis judicabatur. Porrò cum diameter Capillitii Cometarum rarò ſuperet 8′ vel 12′, diameter verò Nuclei ſeu ſtellæ centralis ſit quaſi decima vel fortè decima quinta pars diametri capillitii, patet Stellas haſce ut plurimum ejuſdem eſſe apparentis magnitudinis cum Planetis. Unde cum lux eorum cum luce Saturni non rarò conferri poſſit, eamque aliquando ſuperet; manifeſtum eſt quod Cometæ omnes in Periheliis vel infra Saturnum collocandi ſint, vel non longe ſupra. Errant igitur toto cœlo qui Cometas in regionem Fixarum prope ablegant: qua certè ratione non magis illuſtrari deberent à Sole noſtro, quàm Planetæ, qui hic ſunt, illuſtrantur à Stellis fixis.

Hæc diſputavimus non conſiderando obſcurationem Cometarum per fumum illum maximè copioſum & craſſum, quo caput circundatur, quaſi per nubem obtusè ſemper lucens. Nam quanto obſcurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad Solem accedat neceſſe eſt, ut copia lucis à ſe reflexa Planetas æmuletur. Inde veriſimile fit Cometas longe infra Sphæram Saturni deſcendere, uti ex Parallaxi probavimus. Idem verò quam maximè confirmatur ex Caudis. Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore caſu minuenda eſt diſtantia Cometarum, ne fumus à Capite ſemper ortus per ſpatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expanſione propagetur. In poſteriore referenda eſt lux omnis tam caudæ quàm capillitii ad

Nu-

Nucleum capitis. Igitur ſi imaginemur lucem hanc omnem congregari & intra diſcum Nuclei coarctari, Nucleus ille jam certè, quoties caudam maximam & fulgentiſſimam emittit, Jovem ipſum ſplendore ſuo multum ſuperabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multò magis illuſtrabitur à Sole, adeoque erit Soli multò proprior. Quinetiam capita ſub Sole deliteſcentia, & caudas cum maximas tum fulgentiſſimas inſtar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis ſi in ſtellam congregari ſupponatur, ipſam Venerem ne dicam Veneres plures conjunctas quandoque ſuperaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum creſcente in receſſu Cometarum à Terra Solem verſus, ac decreſcente in eorum receſſu à Sole verſus Terram. Sic enim Cometa poſterior Anni 1665 (obſervante *Hevelio*,) ex quo conſpici cæpit, remittebat ſemper de motu ſuo, adeoque præterierat Perigæum; Splendor verò capitis nihilominus indies creſcebat, uſque dum Cometa radiis Solaribus obtectus deſiit apparere. Cometa Anni 1683, obſervante eodem *Hevelio*, in fine Menſis *Julii* ubi primum conſpectus eſt, tardiſſimè movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter ſingulis diebus in orbe ſuo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur uſque ad *Sept.* 4. quando evaſit graduum quaſi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro menſurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6. eſſe tantum 6′. 5″ incluſâ comâ, at *Sept.* 2. eſſe 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quàm in fine motus, at initio tamen in vicinia Solis longe lucidius extitit quàm circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob receſſum ipſius à Sole, quoad lumen decrevit, non obſtante acceſſu ad Terram. Cometa Anni 1618 circa medium Menſis *Decembris*, & iſte Anni 1680 circa finem ejuſdem Menſis, celerrimè movebantur, adeoque tunc erant in Perigæis. Verum ſplendor maximus capitum contigit ante duas fere

ſep-

ſeptimanas, ubi modò exierant de radiis Solaribus; & ſplendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate Solis. Caput Cometæ prioris, juxta obſervationes *Cyſati*, *Decem.* 1. majus videbatur ſtellis primæ magnitudinis, & *Decem.* 16. (jam in Perigæo exiſtens) magnitudine parùm, ſplendore ſeu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit obſervandi. Die 12 menſis *Decemb.* conſpectum & à *Flamſtedio* obſervatum eſt caput Cometæ poſterioris, in diſtantia novem graduum à Sole; id quod ſtellæ tertiæ magnitudinis vix conceſſum fuiſſet. *Decem.* 15 & 17 apparuit idem ut ſtella tertiæ magnitudinis, diminutum utique ſplendore Nubium juxta Solem occidentem. *Decem.* 26. velociſſimè motus, inque Perigæo propemodum exiſtens, cedebat ori Pegaſi, Stellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut Stella quartæ, *Jan.* 9. ut Stella quintæ, *Jan.* 13. ob ſplendorem Lunæ creſcentis diſparuit. *Jan.* 25. vix æquabat Stellas magnitudinis ſeptimæ. Si ſumantur æqualia à Perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus poſita, ob æquales à Terra diſtantias, æqualiter lucere debuiſſent, in plaga Solis maximè ſplenduere, ex altera Perigæi parte evanuere. Igitur ex magna lucis in utroque ſitu differentia concluditur magna Solis & Cometæ vicinitas in ſitu priore. Nam lux Cometarum regularis eſſe ſolet, & maxima apparere ubi capita velociſſimè moventur, atque adeo ſunt in Perigæis; niſi quatenus ea major eſt in vicinia Solis.

Corol. 1. Splendent igitur Cometæ luce Solis à ſe reflexa.

Corol. 2. Ex dictis etiam intelligitur cur Cometæ tantopere frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longè ultra Saturnum deberent ſæpius apparere in partibus Soli oppoſitis. Forent enim Terræ viciniores qui in his partibus verſarentur, & Sol interpoſitus obſcuraret cæteros. Verum percurrendo hiſtorias Cometarum reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti ſunt in Hemiſphærio Solem verſus, quàm in Hemiſphærio oppoſito, præter alios procul dubio non paucos quos lux Solaris obtexit. Nimirum

mirum in deſcenſu ad regiones noſtras neque caudas emittunt, neque adeo illuſtrantur à Sole, ut nudis oculis ſe prius detegendos exhibeant, quàm ſint ipſo Jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa Solem deſcripti pars longè major ſita eſt à latere Terræ quod Solem reſpicit; inque parte illa majore Cometæ Soli ut plurimum viciniores magis illuminari ſolent.

Corol. 3. Hinc etiam manifeſtum eſt, quod cœli reſiſtentia deſtituuntur. Nam Cometæ vias obliquas & nonnunquam curſui Planetarum contrarias ſecuti, moventur omnifariam liberrimè, & motus ſuos etiam contra curſum Planetarum diutiſſimè conſervant. Fallor ni genus Planetarum ſint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod Scriptores aliqui Meteora eſſe volunt, argumentum à capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita Cometarum Atmoſphæris ingentibus cinguntur; & Atmoſphæræ infernè denſiores eſſe debent. Unde nubes ſunt non ipſa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ viſuntur. Sic Terra ſi è Planetis ſpectaretur, luce nubium ſuarum proculdubio ſplenderet, & corpus firmum ſub nubibus prope deliteſceret. Sic cingula Jovis in nubibus Planetæ illius formata, ſitum mutant inter ſe, & firmum Jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora Cometarum ſub Atmoſphæris & profundioribus & craſſioribus abſcondi debent.

Prop. XL. Theor. XXI.

Cometas in Sectionibus conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad ſolem ductis areas temporibus proportionales deſcribere.

Patet per Corol. 1. Prop. XIII. Libri primi, collatum cum Prop. VIII, XII & XIII. Libri tertii.

Corol. 1. Hinc ſi Cometæ in orbem redeunt, orbes erunt Ellipſes, & tempora periodica erunt ad tempora periodica Planetarum in ratione ſeſquialtera tranſverſorum axium. Ideoque Cometæ maxima

xima ex parte ſupra Planetas verſantes, & eo nomine orbes axibus majoribus deſcribentes, tardius revolventur. Ut ſi axis orbis Cometæ ſit quadruplo major axe orbis Saturni, tempus revolutionis Cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id eſt ad annos 30, ut 4 $\sqrt{4}$ (ſeu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. Orbes autem erunt Parabolis adeo finitimi, ut eorum vice Parabolæ abſque erroribus ſenſibilibus adhiberi poſſunt.

Corol. 3. Et propterea, per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I. velocitas Cometæ omnis erit ſemper ad velocitatem Planetæ cujuſvis circa Solem in circulo revolventis, in dimidiata ratione duplicatæ diſtantiæ Cometæ à centro Solis ad diſtantiam Planetæ à centro Solis quamproximè. Ponamus radium orbis magni, ſeu Ellipſeos in qua Terra revolvitur ſemidiametrum tranſverſam, eſſe partium 100000000, & Terra motu ſuo diurno mediocri deſcribet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque Cometa in eadem Telluris à Sole diſtantia mediocri, ea cum velocitate quæ ſit ad velocitatem Telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, deſcribet motu ſuo diurno partes 2432747, & motu horario partes $101364\frac{1}{2}$. In majoribus autem vel minoribus diſtantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in dimidiata ratione diſtantiarum reſpectivè, ideoque datur.

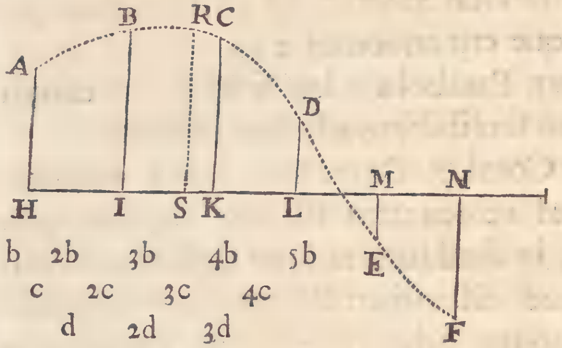
Lemma V.

Invenire lineam curvam generis Parabolici, quæ per data quotcunque puncta tranſibit.

Sunto puncta illa *A, B, C, D, E, F*, &c. & ab iiſdem ad rectam quamvis poſitione datam *HN* demitte perpendicula quotcunque *AH, BI, CK, DL, EM, FN*.

Caſ. 1. Si punctorum *H, I, K, L, M, N* æqualia ſunt intervalla *HI, IK, KL*, &c. collige perpendiculorum *AH, BI, CK* &c. differentias primas *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, 5*b*, *&c.* ſecundas *c*,

2 c, 3 c, 4 c, &c. tertias d, 2 d, 3 d, &c. id eſt, ita ut ſit $HA - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $-EM + FN = 5b$, &c. dein $b - 2b = c$ &c. Deinde erecta quacunque perpendiculari RS, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæſitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla HI, IK, KL, LM, &c. unitates eſſe, & dic $AH = a$, $-HS = p$, $\frac{1}{2}p$ in $-IS = q$, $\frac{1}{3}q$ in $+SK = r$, $\frac{1}{4}r$ in $+SL = s$, $\frac{1}{5}s$ in $+SM = t$; pergendo videlicet ad uſque penultimum perpendiculum ME, & præponendo ſigna negativa terminis HS, IS, &c. qui jacent ad partes puncti S verſus A, & ſigna affirmativa terminis SK, SL, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S. Et ſignis probe obſervatis erit $RS = a + bp, + cq + dr + es + ft$ &c.



Caſ. 2. Quod ſi punctorum H, I, K, L, &c. inæqualia ſint intervalla HI, IK, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum diviſas b, 2 b, 3 b, 4 b, 5 b; ſecundas per intervalla bina diviſas c, 2 c, 3 c, 4 c, &c. tertias per intervalla terna diviſas d, 2 d, 3 d, &c. quartas per intervalla quaterna diviſas e, 2 e, &c. & ſic deinceps; id eſt ita ut ſit $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$ &c. dein $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$ &c. Poſtea $d = \frac{c - 2c}{HL}$ $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$ &c. Inventis differentiis, dic $AH = a$, $-HS = p$, p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = S$, S in $+SM = t$; pergendo ſcilicet ad uſque perpendiculum penultimum ME, & erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri poſſunt quamproximè. Nam ſi curvæ cujuſvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot,

quot, & Parabola per eadem duci intelligatur: erit area Parabolæ hujus eadem quam proximè cum area curvæ illius quadrandæ. Poteſt autem Parabola per Methodos notiſſimas ſemper quadrari Geometricè.

Lemma VI.

Ex obſervatis aliquot locis Cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

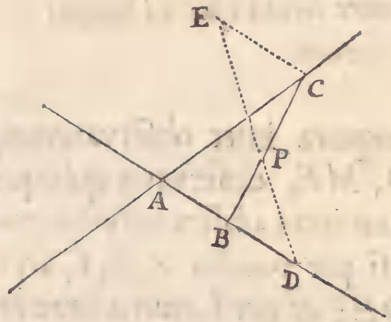
Deſignent *HI*, *IK*, *KL*, *LM* tempora inter obſervationes, (*in Fig. præced.*) *HA*, *IB*, *KC*, *LD*, *ME*, obſervatas quinque longitudines Cometæ, *HS* tempus datum inter obſervationem primam & longitudinem quæſitam. Et ſi per puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *E* duci intelligatur curva regularis *ABCDE*; & per Lemma ſuperius inveniatur ejus ordinatim applicata *RS*, erit *RS* longitudo quæſita.

Eadem methodo ex obſervatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

Si longitudinum obſervatarum parvæ ſint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; ſuffecerint obſervationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores ſint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt obſervationes quinque adhiberi.

Lemma VII.

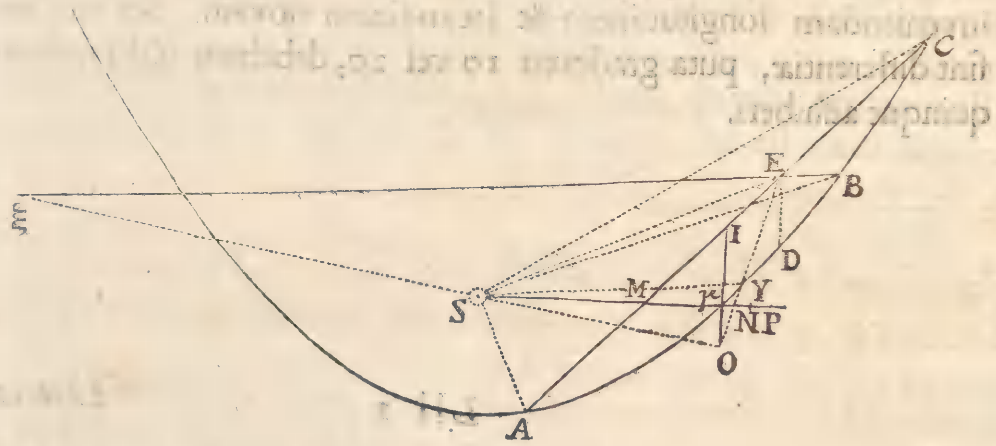
Per datum punctum P *ducere rectam lineam* BC, *cujus partes* PB, PC, *rectis duabus poſitione datis* AB, AC *abſciſſæ, datam habeant rationem ad invicem.*



A puncto illo *P* ad rectarum alterutram *AB* ducatur recta quævis *PD*, & producatur eadem verſus rectam alteram *AC* uſque ad *E*, ut ſit *PE* ad *PD* in data illa ratione. Ipſi *AD* parallela ſit *EC*; & ſi agatur *CPB*, erit *PC* ad *PB* ut *PE* ad *PD*. *Q.E.F.*

Lemma VIII.

Sit ABC *Parabola umbilicum habens* S. *Chordâ* AC *biſectâ in* I *abſcindatur ſegmentum* ABCI, *cujus diameter ſit* Iμ *& vertex* μ. *In* Iμ *productâ capiatur* μO *æqualis dimidio ipſius* Iμ. *Jungatur* OS, *&*



producatur ea ad ξ, *ut ſit* Sξ *æqualis* 2SO. *Et ſi Cometa* B *moveatur in arcu* CBA, *& agatur* ξB *ſecans* AC *in* E: *dico quod punctum* E *abſcindet*

ſcindet de chorda AC *ſegmentum* AE *tempori proportionale quamproximè.*

Jungatur enim *EO* ſecans arcum Parabolicum *ABC* in *Y*, & erit area curvilinea *AEY* ad aream curvilineam *ACY* ut *AE* ad *AC* quamproximè. Ideoque cum triangulum *ASE* ſit ad triangulum *ASC* in eadem ratione, erit area tota *ASEY* ad aream totam *ASCY* ut *AE* ad *AC* quamproximè. Cum autem *ξO* ſit ad *SO* ut 3 ad 1 & *EO* ad *YO* prope in eadem ratione, erit *SY* ipſi *EB* parallela quamproximè, & propterea triangulum *SEB*, triangulo *YEB* quamproximè æquale. Unde ſi ad aream *ASEY* addatur triangulum *EYB*, & de ſumma auferatur triangulum *SEB*, manebit area *ASBY* areæ *ASEY* æqualis quamproximè, atque adeo ad aream *ASCY* ut *AE* ad *AC*. Sed area *ASBY* eſt ad aream *ASCY* ut tempus deſcripti arcus *AB* ad tempus deſcripti arcus totius. Ideoque *AE* eſt ad *AC* in ratione temporum quamproximè. *Q.E.D.*

Lemma IX.

Rectæ Iμ *&* μM *& longitudo* $\frac{AIC}{4S\mu}$ *æquantur inter ſe. Nam* 4Sμ *eſt latus rectum Parabolæ pertinens ad verticem* B.

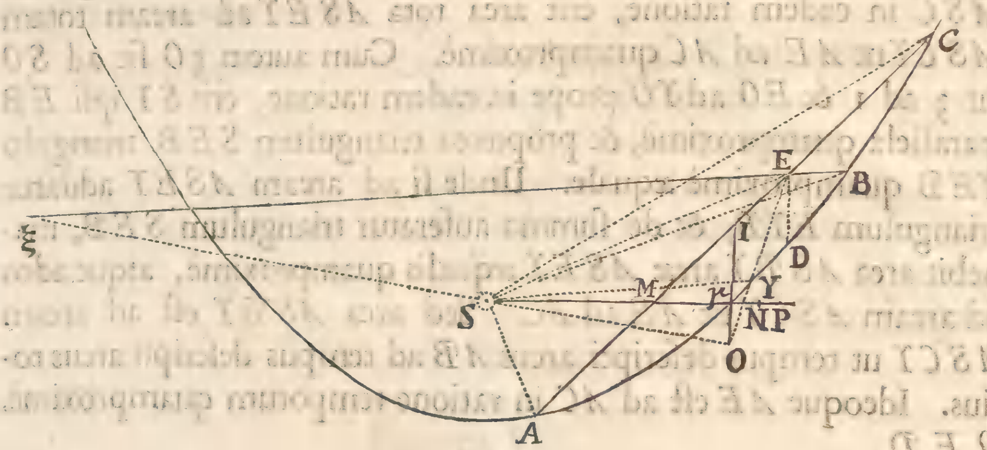
Lemma X.

Si producatur Sμ *ad* N *&* P, *ut* μN *ſit pars tertia ipſius* μI, *&* SP *ſit ad* SN *ut* SN *ad* Sμ. *Cometa quo tempore deſcribit arcum* AμC, *ſi progrederetur ea ſemper cum velocitate quam habet in altitudine ipſi* SP *æquali, deſcriberet longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam ſi velocitate quam habet in μ, eodem tempore progrediatur uniformiter in recta quæ Parabolam tangit in μ; area quam Radio ad punctum *S* ducto deſcriberet, æqualis eſſet areæ Parabolicæ *ASC*μ. Ideoque contentum ſub longitudine in Tangente de-

ſcripta

ſcripta & longitudine $S\mu$, eſſet ad contentum ſub longitudinibus *AC* & *SM*, ut area *ASC*μ ad triangulum *ASCM*, id eſt ut *SN* ad *SM*. Quare *AC* eſt ad longitudinem in tangente deſcriptam ut $S\mu$ ad *SN*. Cum autem velocitas Cometæ in altitudine *SP* ſit ad velocitatem in altitudine $S\mu$ in dimidiata ratione *SP* ad $S\mu$



inversè, id eſt in ratione $S\mu$ ad *SN*, longitudo hac velocitate eodem tempore deſcripta, erit ad longitudinem in Tangente deſcriptam ut $S\mu$ ad *SN*. Igitur *AC* & longitudo hac nova velocitate deſcripta, cùm ſint ad longitudinem in Tangente deſcriptam in eadem ratione, æquantur inter ſe. *Q. E. D.*

Corol. Cometa igitur ea cum velocitate, quam habet in altitudine $S\mu + \frac{2}{3} I\mu$, eodem tempore deſcriberet chordam *AC* quamproximè.

Lemma XI.

Si Cometa motu omni privatus de altitudine SN *ſeu* $S\mu + \frac{1}{3} I\mu$ *demitteretur, ut caderet in Solem, & ea ſemper vi uniformiter continuata urgeretur in Solem qua urgetur ſub initio; idem quo tempore in orbe ſuo deſcribat arcum* AC, *deſcenſu ſuo deſcriberet ſpatium longitudini* $I\mu$ *æquale.*

Nam Cometa quo tempore deſcribat arcum Parabolicum *AC*, eodem tempore ea cum velocitate quam habet in altitudine *SP* (per

Lemma

Lemma noviſſimum) deſcribet chordam AC, adeoque eodem tempore in circulo cujus ſemidiameter eſſet SP revolvendo, deſcriberet arcum cujus longitudo eſſet ad arcus Parabolici chordam AC in dimidiata ratione unius ad duo. Et propterea eo cum pondere quod habet in Solem in altitudine SP, cadendo de altitudine illa in Solem, deſcriberet eodem tempore (per Scholium Prop. IV. Lib. I.) ſpatium æquale quadrato ſemiſſis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis SP, id eſt ſpatium $\frac{AIq.}{4SP}$. Unde cum pondus Cometæ in Solem in altitudine SN ſit ad ipſius pondus in Solem in altitudine SP, ut SP ad $S\mu$: Cometa pondere quod habet in altitudine SN eodem tempore, in Solem cadendo, deſcribet ſpatium $\frac{AIq.}{4S\mu}$, id eſt ſpatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. *Q. E. D.*

Prop. XLI. Prob. XX.

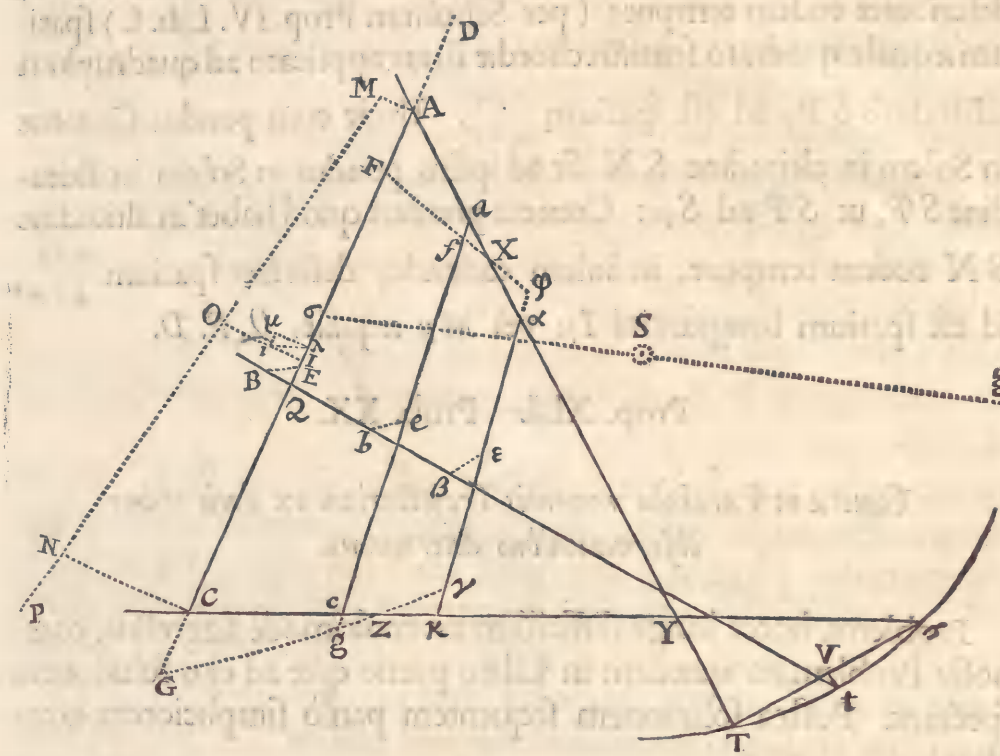
Cometæ in Parabola moventis Trajectoriam ex datis tribus obſervationibus determinare.

Problema hocce longe difficillimum multimodè aggreſſus, compoſui Problemata quædam in Libro primo quæ ad ejus ſolutionem ſpectant. Poſtea ſolutionem ſequentem paulò ſimpliciorem excogitavi.

Seligantur tres obſervationes æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproximè diſtantes. Sit autem temporis intervallum illud ubi Cometa tardius movetur paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia ſit ad ſummam temporum ut ſumma temporum ad dies plus minus ſexcentos. Si tales obſervationes non præſto ſint, inveniendus eſt novus Cometæ locus per Lemma ſextum.

Deſignent S Solem, T, t, τ tria loca Terræ in orbe magno, TA, tB, τC obſervatas tres longitudines Cometæ, V tempus inter obſervationem primam & ſecundam, W tempus inter ſecundam ac ter-

tertiam, X longitudinem quam Cometa toto illo tempore ea cum velocitate quam habet in mediocri Telluris à Sole diſtantia, deſcribere poſſet, & tV perpendiculum in chordam $T\tau$. In longitudine media tB ſumatur utcunque punctum B, & inde verſus Solem S



ducatur linea BE, quæ ſit ad Sagittam tV ut contentum ſub SB & St quadrato ad cubum hypotenuſæ trianguli rectanguli, cujus latera ſunt SB & tangens latitudinis Cometæ in obſervatione ſecunda ad radium tB. Et per punctum E agatur recta AEC, cujus partes AE, EC ad rectas TA & τC terminatæ, ſint ad invicem ut tempora V & W: Tum per puncta A, B, C, duc circumferentiam circuli, eamque biſeca in i, ut & chordam AC in I. Age occultam Si ſecantem AC in λ, & comple parallelogrammum $iI\lambda\mu$. Cape $I\sigma$ æqualem $3I\lambda$, & per Solem S age occultam $\sigma\xi$ æqualem $3S\sigma + 3i\lambda$. Et deletis jam literis A, E, C, I, à puncto B verſus punctum ξ duc occultam

cultam novam *BE*, quæ ſit ad priorem *BE* in duplicata ratione diſtantiæ *BS* ad quantitatem $S\mu + \frac{1}{3} i\lambda$. Et per punctum *E* iterum duc rectam *AEC* eadem lege ac prius, id eſt, ita ut ejus partes *AE* & *EC* ſint ad invicem ut tempora inter obſervationes, *V* & *W*.

Ad *AC* biſectam in *I* erigantur perpendicula *AM*, *CN*, *IO*, quarum *AM* & *CN* ſint tangentes latitudinum in obſervatione prima ac tertia ad radios *TA* & $\tau\alpha$. Jungatur *MN* ſecans *IO* in *O*. Conſtituatur rectangulum $iI\lambda\mu$ ut prius. In *IA* producta capiatur *ID* æqualis $S\mu + \frac{2}{3} i\lambda$, & agatur occulta *OD*. Deinde in *MN* verſus *N* capiatur *MP*, quæ ſit ad longitudinem ſupra inventam *X* in dimidiata ratione mediocris diſtantiæ Telluris à Sole (ſeu ſemidiametri orbis magni) ad diſtantiam *OD*. Et in *AC* capiatur *CG* ipſi *NP* æqualis, ita ut puncta *G* & *P* ad eaſdem partes rectæ *NC* jaceant.

Eadem methodo qua puncta *E*, *A*, *C*, *G*, ex aſſumpto puncto *B* inventa ſunt, inveniantur ex aſſumptis utcunque punctis aliis *b* & β puncta nova *e*, *a*, *c*, *g*, & $\varepsilon, \alpha, \varkappa, \gamma$. Deinde ſi per *G*, *g*, γ ducatur circumferentia circuli $Gg\gamma$ ſecans rectam τC in *Z*: erit *Z* locus Cometæ in plano Eclipticæ. Et ſi in *AC*, *ac*, $\alpha\varkappa$ capiantur *AF*, *af*, $\alpha\varphi$ ipſis *CG*, *cg*, $\varkappa\gamma$ reſpectivè æquales, & per puncta *F*, *f*, φ ducatur circumferentia circuli $Ff\varphi$ ſecans rectam *AT* in *X*; erit punctum *X* alius Cometæ locus in plano Eclipticæ. Ad puncta *X* & *Z* erigantur tangentes latitudinum Cometæ ad radios *TX* & τZ; & habebuntur loca duo Cometæ in orbe proprio. Denique (per Prop. XIX. Lib. I.) umbilico *S*, per loca illa duo deſcribatur Parabola, & hæc erit Trajectoria Cometæ. *Q. E. I.*

Conſtructionis hujus demonſtratio ex Lemmatibus conſequitur: quippe cum recta *AC* ſecetur in *E* in ratione temporum, per Lemma VIII: & *BE* per Lem. XI. ſit pars rectæ *BS* in plano Eclipticæ arcui *ABC* & chordæ *AEG* interjecta; & *MP* (per Lem. VIII.) longitudo ſit chordæ arcus, quem Cometa in orbe proprio inter obſervationem primam ac tertiam deſcribere debet, ideoque ipſi *MN* æqualis fuerit, ſi modò *B* ſit verus Cometæ locus in plano Eclipticæ.

Cæ-

Cæterum puncta *B*, *b*, *β* non quælibet, ſed vero proxima eligere convenit. Si angulus *AQt* in quo veſtigium orbis in plano Eclipticæ deſcriptum ſecabit rectam *t B* præterpropter innoteſcat, in angulo illo ducenda erit recta occulta *AC*, quæ ſit ad $\frac{4}{3}$ *T t* in dimidiata ratione *S t* ad *S Q*. Et agendo rectam *S E B* cujus pars *E B* æquetur longitudini *V t*, determinabitur punctum *B* quod prima vice uſurpare licet. Tum rectâ *AC* deletâ & ſecundum præcedentem conſtructionem iterum ductâ, & inventâ inſuper longitudine *MP*; in *t B* capiatur punctum *b*, ea lege, ut ſi *TA*, *TC* ſe mutuò ſecuerint in *Y*, ſit diſtantia *Y b* ad diſtantiam *Y B* in ratione compoſita ex ratione *MN* ad *MP* & ratione dimidiata *S B* ad *S b*. Et eadem methodo inveniendum erit punctum tertium *β*; ſi modò operationem tertiò repetere lubet. Sed hac methodo operationes duæ ut plurimum ſuffecerint. Nam ſi diſtantia *B b* perexigua obvenerit, poſtquam inventa ſunt puncta *F*, *f* & *G*, *g*, actæ rectæ *F f* & *G g* ſecabunt *T A* & *τ C* in punctis quæſitis *X* & *Z*.

Exemplum.

Proponatur Cometa anni 1680. Hujus motum à *Flamſtedio* obſervatum Tabula ſequens exhibet.

		Tem. appar.	Temp. verū	Long. Solis	Long. Cometæ	Lat. Cometæ
1680 *December*	12	4.46	4.46.00	♑ 1.53. 2	♑ 6.33. 0	8.26. 0
	21	6.32½	6.36.59	11. 8.10	♒ 5. 7.38	21.45.30
	24	6.12	6.17.52	14.10.49	18.49.10	25.23.24
	26	5.14	5.20.44	16.10.38	28.24. 6	27.00.57
	29	7.55	8.03. 2	19.20.56	♓ 13.11.45	28.10.05
	30	8. 2	8.10.26	20.22.20	17.37. 5	28.11.12
1681 *January*	5	5.51	6. 1.38	26.23.19	♈ 8.49.10	26.15.26
	9	6.49	7. 0.53	♒ 0.29.54	18.43.18	24.12.42
	10	5.54	6. 6.10	1.28.34	20.40.57	23.44.00
	13	6.56	7. 8.55	4.34. 6	25.59.34	22.17.36
	25	7.44	7.58.42	16.45.58	♉ 9.55.48	17.56.54
	30	8.07	8.21.53	21.50. 9	♉ 13.19.36	16.40.57
February	2	6.20	6.34.51	24.47. 4	15.13.48	16.02.02
	5	6.50	7. 4.41	27.49.51	16.59.52	15.27.23

In

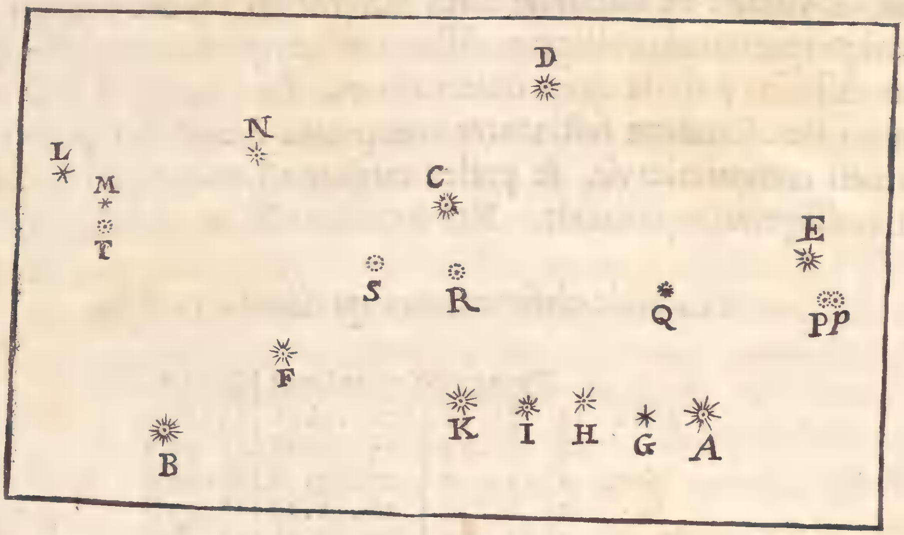
In his obſervationibus *Flamſtedius* eâ uſus eſt diligentiâ, ut poſtquam bis obſervaſſet diſtantiam Cometæ à Stella aliqua fixa, deinde etiam diſtantiam bis ab alia ſtella fixa, rediret ad ſtellam priorem & diſtantiam Cometæ ab eadem iterum obſervaret, idque bis, ac deinde ex diſtantiæ illius incremento vel decremento tempori proportionali colligeret diſtantiam tempore intermedio, quando diſtantia à ſtella altera obſervabatur. Ex hujuſmodi obſervationibus loca Cometæ feſtinanter computata *Flamſtedius* primò cum amicis communicavit, & poſtea eaſdem ad examen revocatas calculo diligentiore correxit. Nos loca correcta hic deſcripſimus.

His adde obſervationes quaſdam è noſtris.

		Temp.appar.	Cometæ Longit.	Com. Lat.
Febru.	25	$8^h.30'$	♉ $26.19'.22''$	$12.46\frac{7}{8}$
	27	8 .15	27. 4.28	12.36
Mart.	1	11 . 0	27.53. 8	$12.24\frac{3}{7}$
	2	8 . 0	28.12.29	$12.19\frac{1}{2}$
	5	11 .30	29.20.51	$12. 2\frac{2}{3}$
	9	8 .30	♊ 0.43. 2	$11.44\frac{3}{5}$

Hæ obſervationes Teleſcopio ſeptupedali, & Micrometro filiſque in foco Teleſcopii locatis paractæ ſunt: quibus inſtrumentis & poſitiones fixarum inter ſe & poſitiones Cometæ ad fixas determinavimus. Deſignet *A* ſtellam in ſiniſtro calcaneo Perſei (*Bayero* ο) *B* ſtellam ſequentem in ſiniſtro pede (*Bayero* ζ) & *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N* ſtellas alias minores in eodem pede. Sintque *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* loca Cometæ in obſervationibus ſupra deſcriptis: & exiſtente diſtantiâ *AB* partium $80\frac{7}{12}$, erat *AC* partium $52\frac{1}{4}$, *BC* $58\frac{5}{6}$, *AD* $57\frac{5}{12}$, *BD* $82\frac{6}{11}$, *CD* $23\frac{2}{3}$, *AE* $29\frac{4}{7}$, *CE* $57\frac{1}{2}$, *DE* $49\frac{11}{12}$, *AK* $38\frac{2}{3}$, *BK* 43, *CK* $31\frac{5}{9}$, *FK* 29, *FB* 23, *FC* $36\frac{1}{4}$, *AH* $18\frac{6}{7}$, *DH* $53\frac{5}{11}$, *BN* $46\frac{5}{12}$, *CN* $31\frac{1}{3}$, *BL* $45\frac{5}{12}$, *NL* $31\frac{5}{7}$. *LM* erat ad *LB* ut 2 ad 9 & producta tranſibat per ſtellam *H*. His determinabantur poſitiones fixarum inter ſe.

Die Veneris *Feb.* 25. St. vet. Hor. $8\frac{1}{2}$ P. M. Cometæ in *p* exiſtentis diſtantia à ſtella *E* erat major quàm $\frac{3}{13}$ *AE*, minor quàm $\frac{1}{5}$ *AE*, adeoque æqualis $\frac{3}{14}$ *AE* proximè; & angulus *ApE* nonnihil



obtuſus erat, ſed fere rectus. Nempe ſi demitteretur ad *pE* perpendiculum ab *A*, diſtantia Cometæ à perpendiculo illo erat $\frac{1}{5}$ *pE*.

Eadem nocte, horâ $9\frac{1}{2}$, Cometæ in *P* exiſtentis diſtantia à ſtella *E* erat major quàm $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ *AE*, minor quàm $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ *AE*, adeoque æqualis $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ *AE*, ſeu $\frac{8}{39}$ *AE* quamproximè. A perpendiculo autem à Stella *A* ad rectam *PE* demiſſo diſtantia Cometæ erat $\frac{4}{5}$ *PE*.

Die ♂tis, *Mart.* 1, hor. 11. P. M. Cometa in *R* exiſtens, ſtellis *K* & *C* accuratè interjacebat, & rectæ *CRK* pars *CR* paulo major erat quàm $\frac{1}{3}$ *CK*, & paulo minor quam $\frac{1}{3}$ *CK* + $\frac{1}{8}$ *CR*, adeoque æqualis $\frac{1}{3}$ *CK* + $\frac{1}{16}$ *CR* ſeu $\frac{16}{45}$ *CK*.

Die ☿ii, *Mart.* 2. hor. 8. P. M. Cometæ exiſtentis in *S*, diſtantia à ſtella *C* erat $\frac{4}{9}$ *FC* quamproximè. Diſtantia ſtellæ *F* à recta *CS* producta erat $\frac{1}{24}$ *FC*; & diſtantia ſtellæ *B* ab eadem recta erat quintuplo major quàm diſtantia ſtellæ *F*. Item recta *NS* producta tran-

tranſibat inter ſtellas *H* & *I*, quintuplo vel ſextuplo propior exiſtens ſtellæ *H* quàm ſtellæ *I*.

Die ♄^{ni}, *Mart.* 5. hor. 11$\frac{1}{2}$. P. M. Cometa exiſtente in *T*, recta *MT* æqualis erat $\frac{1}{2}$ *ML*, & recta *LT* producta tranſibat inter *B* & *F*, quadruplo vel quintuplo propior *F* quàm *B*, auferens à *BF* quintam vel ſextam ejus partem verſus *F*. Et *MT* producta tranſibat extra ſpatium *BF* ad partes ſtellæ *B*, quadruplo propior exiſtens ſtellæ *B* quam ſtellæ *F*. Erat *M* ſtella perexigua quæ per Teleſcopium videri vix potuit, & *L* ſtella major quaſi magnitudinis octavæ.

Ex hujuſmodi obſervationibus per conſtructiones figurarum & computationes (poſito quod ſtellarum *A* & *B* diſtantia eſſet 2 *gr.* $6\frac{4}{5}$, & ſtellæ *A* longitudo ♉ 26 *gr.* 41′. 48″ & latitudo borealis 12 *gr.* $8'\frac{1}{2}$, ſtellæque *B* longitudo ♉ 28 *gr.* 40′. 16″. & latitudo borealis 11 *gr.* $17\frac{1}{5}$; quemadmodum à *Flamſtedio* obſervatas accepi) derivabam longitudines & latitudines Cometæ. Micrometro parum affabre conſtructâ uſus ſum, ſed Longitudinum tamen & Latitudinum errores (quatenus ab obſervationibus noſtris oriantur) dimidium minuti unius primi vix ſuperant, præterquam in obſervatione ultimâ *Mart.* 9. ubi poſitiones fixarum ad ſtellas *A* & *B* minus accuratè determinare potui. *Caſſinus* qui Cometam eodem tempore obſervavit, ſe declinationem ejus tanquam invariatam manentem parum diligenter definiviſſe faſſus eſt. Nam Cometa (juxta obſervationes noſtras) in fine motus ſui notabiliter deflectere cæpit boream verſus, à parallelo quem in fine Menſis *Februarii* tenuerat.

Jam ad orbem Cometæ determinandum; ſelegi ex obſervationibus hactenus deſcriptis tres, quas *Flamſtedius* habuit *Dec.* 21, *Jan.* 5, & *Jan.* 25. Ex his inveni *St* partium 9842,1 & *Vt* partium 455, quales 10000 ſunt ſemidiameter orbis magni. Tum ad operationem primam aſſumendo *tB* partium 5657, inveni *SB* 9747, *BE* prima vice 412, *Sμ* 9503, $i\lambda = 413$: *BE* ſecunda vice 421, *OD* 10186, *X* 8528,4, *MP* 8450, *MN* 8475, *NP* — 25. Unde ad operationem ſecundam collegi diſtantiam *tb* 5640. Et

per

per hanc operationem inveni tandem diſtantias *TX* 4775 & *τZ* 11322. Ex quibus orbem definiendo inveni Nodos ejus in ♋ & ♑ 1 *gr.* 53′; Inclinationem plani ejus ad planum Eclipticæ 61 *gr.* 20$\frac{1}{3}$; verticem ejus (ſeu perihelium Cometæ) in ♏ 27 *gr.* 43′ cum latitudine auſtrali 7 *gr.* 34′; & ejus latus rectum 236,8, areamq; radio ad Solem ducto ſingulis diebus deſcriptam 93585; Cometam verò *Decemb.* 8 *d.* 0 *h.* 4′. P. M. in vertice orbis ſeu perihelio fuiſſe. Hæc omnia per ſcalam partium æqualium & chordas angulorum ex Tabula Sinuum naturalium collectas determinavi graphicè; conſtruendo Schema ſatis amplum, in quo videlicet ſemidiameter orbis magni (partium 10000) æqualis eſſet digitis 16$\frac{1}{3}$ pedis Anglicani.

Tandem ut conſtaret an Cometa in Orbe ſic invento verè moveretur, collegi per operationes partim Arithmeticas partim Graphicas, loca Cometæ in hoc orbe ad obſervationum quarundam tempora: uti in Tabula ſequente videre licet.

COMETÆ

	Diſtant. Cometæ à Sole	Lon. Collect.	Lat. Collect.	Long. Obſ.	Lat. Obſ.	Differ. Long.	Differ. Lat.
Decemb. 12	2792	♑ 6.32	8.18$\frac{1}{2}$	♑ 6.33	8.26	− 2	− 7$\frac{1}{2}$
29	8403	♓ 13.13$_{3}$	28. 0	♓ 13.11$\frac{3}{4}$	28.10$\frac{1}{2}$	+ 2	− 10$\frac{1}{2}$
Febr. 5	16669	♉ 17. 0	15.29$\frac{2}{3}$	♉ 16.59$\frac{7}{8}$	15.27$\frac{2}{5}$	0	+ 2$\frac{1}{5}$
Mar. 5	21737	♉ 29.19$\frac{3}{4}$	12. 4	♉ 29.20$\frac{6}{7}$	12. 2$\frac{2}{3}$	− 1	+ 1$\frac{1}{3}$

Præterea cum *Cl. Flamſtedius* Cometam, qui Menſe *Novembri* apparuerat, eundem eſſe cum Cometa menſium ſubſequentium, literis ad me datis aliquando diſputaret, & Trajectoriam quandam ab orbe hocce Parabolico non longe aberrantem delinearet, viſum eſt loca Cometæ in hoc orbe Menſe *Novembri* computare, & cum Obſervationibus conferre. Obſervationes ita ſe habent.

Nov. 17. St. Vet. *Ponthæus* & alii hora ſexta matutina *Romæ*, (id eſt hora 5. 10′ *Londini*) Cometam obſervarunt in ♎ 8 *gr.* 30′ cum latitudine Auſtrali 0 *gr.* 40′. Extant autem eorum obſervationes in tractatu quem *Ponthæus* de hoc Cometa in lucem edidit. Eadem horâ *Galletius* etiam *Romæ*, Cometam vidit in ♎ 8 *gr.* ſine Latitudine.

Nov.

Nov. 18. *Ponthæus* & Socii horâ matutinâ 6, 30′ *Romæ* (*i. e.* hor. 5. 40′ *Londini*) Cometam viderunt in ♎ 13½, cum Lat. Auſtr. 1 *gr.* 20′. Eodem die *R. P. Ango* in Academia *Flechenſi* apud *Gallos*, horâ quintâ matutinâ, Cometam vidit in medio Stellarum duarum parvarum, quarum una media eſt trium in recta linea in Virginis Auſtrali manu, & altera eſt extrema alæ. Unde Cometa tunc fuit in ♎ 12 *gr.* 46′ cum Lat. Auſtr. 50′. Eodem die *Boſtoniæ* in *Nova Anglia* in Lat. 42⅓, horâ quintâ matutinâ (id eſt *Londini* hora Mat. 9⅔) Cometa viſus eſt in ♎ 14 circiter, cum Lat. Auſtr. 1 *gr.* 30′; uti à *Cl. Halleio* accepi.

Nov. 19. hora Mat. 4½ *Cantabrigiæ*, Cometa (obſervante juvene quodam) diſtabat à Spica ♍ quaſi 2 *gr.* Boreazephyrum verſus. Eodem die hor. 5. Mat. *Boſtoniæ* in *Nova-Anglia* Cometa diſtabat à Spica ♍ gradu uno, differentiâ latitudinum exiſtente 40′, atque adeo differentia Long. 44′ circiter. Unde Cometa erat in ♎ 18 *gr.* 40′. cum Lat. Auſtr. 1 *gr.* 19′. Eodem die D. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent* prope *Hunting-Creek* in *Mary-Land*, in Confinio *Virginiæ* in Lat. 38½ *gr.* horâ quintâ matutinâ (id eſt horâ 10ª *Londini*) Cometam vidit ſupra Spicam ♍, & cum Spica propemodum conjunctum, exiſtente diſtantia inter eoſdem quaſi ¾ *gr.* Obſervator idem, eadem horâ diei ſequentis, Cometam vidit quaſi 2 *gr.* inferiorem Spicâ. Congruent hæ obſervationes cum obſervationibus in *Nova Anglia* factis, ſi modò diſtantiæ (pro motu diurno Cometæ) nonnihil augeantur, ita ut Cometa die priore ſuperior eſſet Spica ♍ altitudine 52′ circiter, ac die poſteriore inferior eadem ſtellâ altitudine perpendiculari 2 *gr.* 40′.

Nov. 20. D. *Montenarus* Aſtronomiæ Profeſſor *Paduenſis*, hora ſexta Matutina, *Venetiis* (id eſt hora 5. 10′ *Londini*) Cometam vidit in ♎ 23 *gr.* cum Lat. Auſtr. 1 *gr.* 30′. Eodem die *Boſtoniæ* diſtabat Cometa à Spica ♍, 4 *gr.* longitudinis in orientem, adeoque erat in ♎ 23 *gr.* 24 circiter.

Nov. 21. *Ponthæus* & Socii hor. mat. 7¼ Cometam obſervarunt in ♎ 27 *gr.* 50′ cum Latitudine Auſtrali 1 *gr.* 16′. *Ango* horâ

quintâ

quintâ mat. in ♎ 27 *gr*. 45′. *Montenarus* in ♎ 27 *gr*. 51′. Eodem die in Inſulâ *Jamaicâ* viſus eſt prope principium Scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum Spica Virginis; id eſt 1 *gr*. 59′.

Novem. 22. Viſus eſt à *Montenaro* in ♏ 2°. 33′. *Boſtoniæ* autem in *Novâ Angliâ* apparuit in ♏ 3 *gr*. circiter, eadem fere cum latitudine ac prius.

Deinde viſus eſt à *Montenaro Novem*. 24. in ♏ 12 *gr*. 52′. & *Nov*. 25. in ♏ 17 *gr*. 45. Latitudinem *Galletius* jam ponit 2 *gr*. Eandem *Ponthæus* & *Galletius* decreviſſe, *Montenarus* & *Ango* ſemper creviſſe teſtantur. Craſſæ ſunt horum omnium obſervationes, ſed eæ *Montenari*, *Angonis* & obſervatoris in *Nova-Anglia* præferendæ videntur. Ex omnibus autem inter ſe collatis, & ad meridianum *Londini*, hora mat. 5. 10′ reductis, colligo Cometam hujuſmodi curſum quamproximè deſcripſiſſe.

		Long. Com	Latit. Com.
Nov.	17	♎ 8 . 0	0 . 45 Auſtr.
	18	12 . 52	1 . 2
	19	17 . 48	1 . 18
	20	22 . 45	1 . 32
	21	27 . 46	1 . 44
	22	♏ 2 . 48	1 . 55
	23	7 . 50	2 . 4
	24	12 . 52	2 . 12
	25	17 . 45	2 . 18

Loca autem Cometæ iiſdem horis in orbe Parabolico inventa ita ſe habent.

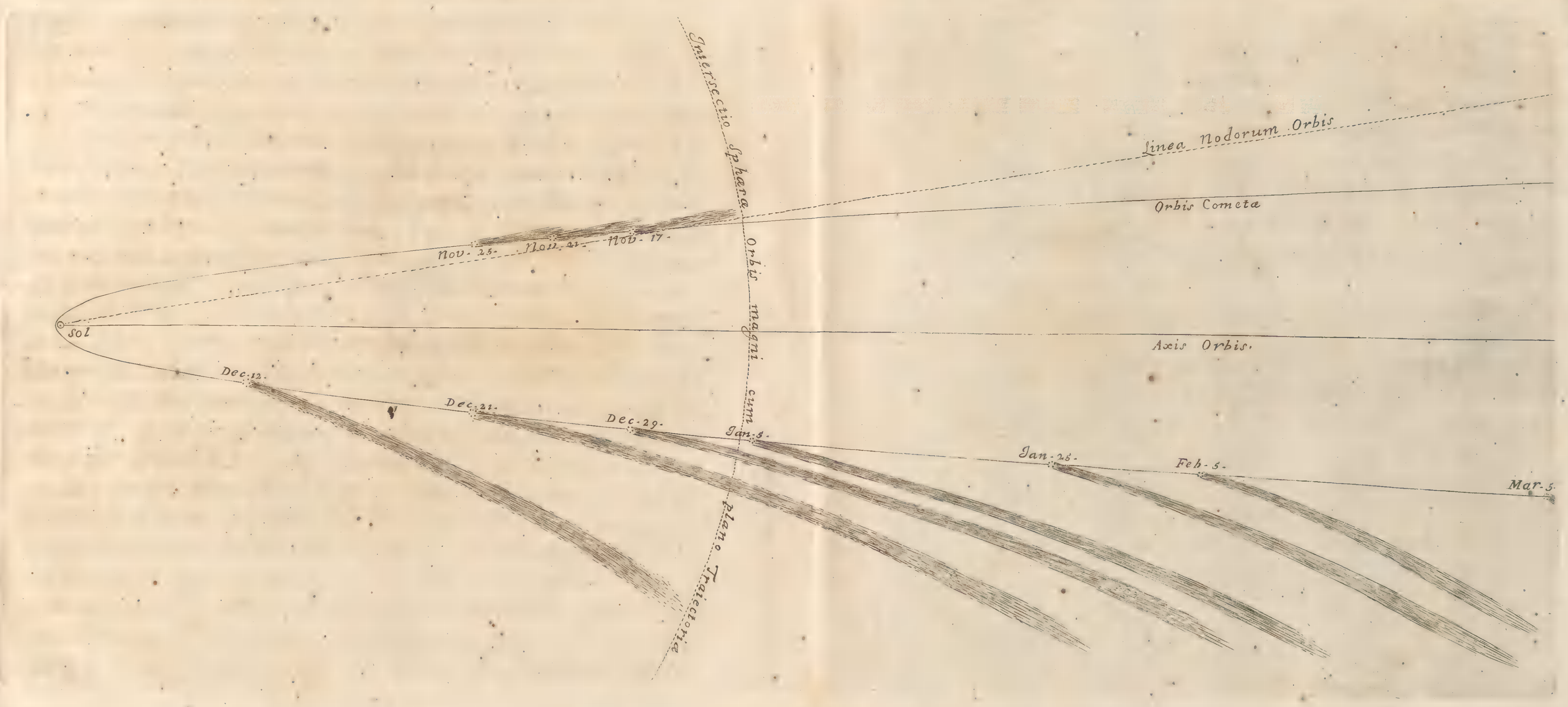
		Comet. Lon.	Com. Lat.
Nov.	17	♎ 8 . 3	0 . 23 *A*
	21	♎ 28 . 0	1 . 22 *A*
	25	♏ 18 . 17	2 . 6 *A*

Congruunt igitur obſervationes tam menſe *Novembri*, quam menſibus tribus ſubſequentibus cum motu Cometæ circa Solem in Trajectoriâ hacce Parabolicâ, atque adeo hanc eſſe veram hujus Cometæ Trajectoriam confirmant. Nam differentia inter loca obſervata

ſervata & loca computata tam ex erroribus obſervationum quam ex erroribus operationum Graphicarum in Orbe definiendo admiſſis, facilè oriri potuere.

Cæterum Trajectoriam quam Cometa deſcripſit, & caudam veram quam ſingulis in locis projecit, viſum eſt annexo ſchemate in plano Trajectoriæ opticè delineatas exhibere: obſervationibus ſequentibus in cauda definienda adhibitis.

Nov. 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* appa-



quintâ mat. in ♎ 27 *gr*. 45′. *Montenarus* in ♎ 27 *gr*. 51′. Eodem die in Inſulâ *Jamaicâ* viſus eſt prope principium Scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum Spica Virginis, id eſt 1 *gr*. 59′.

Novem. 22. Viſus eſt à *Montenaro* in ♏ 2°. 33′. *Boſtoniæ* autem in *Novâ Angliâ* apparuit in ♏ 3 *gr*. circiter, eadem fere cum latitudine ac prius.

Deinde viſus eſt à *Montenaro Novem*. 24. in ♏ 12 *gr*. 52′. & *Nov*. 25. in ♏ 17 *gr*. 45. Latitudinem *Galletius* jam ponit 2 *gr*.

ſervata & loca computata tam ex erroribus obſervationum quam ex erroribus operationum Graphicarum in Orbe definiendo admiſſis, facilè oriri potuere.

Cæterum Trajectoriam quam Cometa deſcripſit, & caudam veram quam ſingulis in locis projecit, viſum eſt annexo ſchemate in plano Trajectoriæ opticè delineatas exhibere: obſervationibus ſequentibus in cauda definienda adhibitis.

Nov. 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov.* 18. cauda 30 *gr.* longa, Solique directe oppoſita in *Nova Anglia* cernebatur, & protendebatur uſque ad ſtellam ♂, qui tunc erat in [illegible] 9 *gr.* 54′. *Nov.* 19. in *Mary-Land* cauda viſa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec.* 10. cauda (obſervante *Flamſtedio*) tranſibat per medium diſtantiæ inter caudam ſerpentis Ophiuchi & ſtellam δ in Aquilæ auſtrali ala, & deſinebat prope ſtellas *A*, ω, *b* in Tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in ♑ 19 $\frac{1}{2}$ cum lat. bor. 34$\frac{1}{4}$ *gr.* circiter. *Dec.* 11. ſurgebat ad uſque caput ſagittæ (*Bayero*, α, β,) deſinens in ♑ 26 *gr.* 43′ cum lat. bor. 38 *gr.* 34′. *Dec.* 12. tranſibat per medium Sagittæ, nec longe ultra protendebatur, deſinens in ♒ 4°, cum lat. bor. 42 $\frac{1}{2}$ circiter. Intelligenda ſunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obſcuriore, in cœlo forſan magis ſereno, cauda *Dec.* 12. hora 5, 40′ *Romæ* (obſervante *Ponthæo*) ſupra cygni Uropygium ad *gr.* 10. ſeſe extulit; atque ab hac ſtella ejus latus ad occaſum & boream min. 45. deſtitit. Lata autem erat cauda his diebus *gr.* 3. juxta terminum ſuperiorem, ideoque medium ejus diſtabat à Stella illa 2 *gr.* 15′ auſtrum verſus, & terminus ſuperior erat in ♓ 22 *gr.* cum lat. bor. 61 *gr.* *Dec.* 21. ſurgebat fere ad cathedram *Caſſiopeiæ*, æqualiter diſtans à β & *Schedir*, & diſtantiam ab utraque diſtantiæ earum ab invicem æqualem habens, adeoque deſinens in ♓ 24 *gr.* cum lat. 47$\frac{1}{2}$ *gr.* *Dec.* 29. tangebat *Scheat* ſitam ad ſiniſtram, & intervallum ſtellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accuratè complebat, & longa erat 54 *gr.* adeoque deſinebat in ♉ 19 *gr.* cum lat. 35. *gr.* *Jan.* 5. tetigit ſtellam π in pectore *Andromedæ*, ad latus ſuum dextrum, & ſtellam μ in ejus cingulo ad latus ſiniſtrum; & (juxta obſervationes noſtras) longa erat

40 *gr.*; curva autem erat & convexo latere ſpectabat ad auſtrum. Cum circulo per Solem & caput Cometæ tranſeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput Cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 grad. & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. *Jan.* 13. Cauda luce ſatis ſenſibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce tenuiſſima deſinebat è regione ſtellæ $\varkappa$ in latere *Perſei.* Diſtantia termini caudæ à circulo Solem & Cometam jungente erat 3 *gr.* 50′, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum $8\frac{1}{2}$ *gr.* *Jan.* 25 & 26 luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7; & ubi cœlum valde ſerenum erat, luce tenuiſſimâ & ægerrimè ſenſibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulo ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad Lucidam in humero orientali Aurigæ accuratè, adeoque declinabat ab oppoſitione Solis Boream verſus in angulo graduum decem. Denique *Feb.* 10. caudam oculis armatis aſpexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthæus* autem *Feb.* 7. ſe caudam ad longitudinem *gr.* 12. vidiſſe ſcribit.

Orbem jam deſcriptum ſpectanti & reliqua Cometæ hujus Phænomena in animo revolventi haud difficulter conſtabit quod corpora Cometarum ſunt ſolida, compacta, fixa ac durabilia ad inſtar corporum Planetarum. Nam ſi nihil aliud eſſent quàm vapores vel exhalationes Terræ, Solis & Planetarum, Cometa hicce in tranſitu ſuo per viciniam Solis ſtatim diſſipari debuiſſet. Eſt enim calor Solis ut radiorum denſitas, hoc eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à Sole. Ideoque cum diſtantia Cometæ à Sole *Dec.* 8. ubi in Perihelio verſabatur, eſſet ad diſtantiam Terræ à Sole ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud Cometam eo tempore erat ad calorem Solis æſtivi apud nos ut 1000000 ad 36, ſeu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis eſt quaſi triplo major quàm calor quem terra arida concipit ad æſtivum Solem; ut expertus ſum: & calor ferri candentis (ſi rectè conjector) quaſi triplo vel quadruplo major quam calor aquæ ebullientis; adeoque calor quem terra arida apud Cometam in perihelio verſantem ex radiis So-

Solaribus concipere poſſet; quaſi 2000 vicibus major quàm calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omniſque materia volatilis ſtatim conſumi ac diſſipari debuiſſent.

Cometa igitur in perihelio ſuo calorem immenſum ad Solem concepit, & calorem illum diutiſſimè conſervare poteſt. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem ſuum omnem ſpatio horæ unius in aere conſiſtens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conſervaret in ratione diametri, propterea quod ſuperficies (ad cujus menſuram per contactum aeris ambientis refrigeratur) in illa ratione minor eſt pro quantitate materiæ ſuæ calidæ incluſæ. Ideoque globus ferri candentis huic Terræ æqualis, id eſt pedes plus minus 40000000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50000, vix refrigeſceret. Suſpicor tamen quod duratio Caloris ob cauſas latentes augeatur in minore ratione quam ea diametri: & optarim rationem veram per experimenta inveſtigari.

Porrò notandum eſt quod Cometa Menſe *Decembri*, ubi ad Solem modò incaluerat, caudam emittebat longe majorem & ſplendidiorem quàm antea Menſe *Novembri*; ubi perihelium nondum attigerat. Et univerſaliter caudæ omnes maximæ & fulgentiſſimæ è Cometis oriuntur, ſtatim poſt tranſitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio Cometæ ad magnitudinem caudæ. Et inde colligere videor quod cauda nihil aliud ſit quam vapor longe tenuiſſimus, quem caput ſeu Nucleus Cometæ per calorem ſuum emittit.

Cæterum de Cometarum caudis triplex eſt opinio, eas vel jubar eſſe Solis per tranſlucida Cometarum capita propagatum; vel oriri ex refractione lucis in progreſſu ipſius à capite Cometæ in Terram: vel denique nubem eſſe ſeu vaporem à capite Cometæ jugiter ſurgentem & abeuntem in partes à Sole averſas. Opinio prima eorum eſt qui nondum imbuti ſunt ſcientia rerum opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroſo non cernitur niſi quatenus lux reflectitur è pulverum & fumorum particulis per aerem ſemper volitantibus: adeoque in aere fumis craſſioribus infecto ſplendidius eſt, & ſenſum

fortius ferit; in aere clariore tenuius eſt & ægrius ſentitur: in cœlis autem abſque materia reflectente nullum eſſe poteſt. Lux non cernitur quatenus in jubare eſt, ſed quatenus inde reflectitur ad oculos noſtros. Nam viſio non fit niſi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione Caudæ, ne cœlum totum luce Solis illuſtratum uniformiter ſplendeat. Opinio ſecunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum ſolent eſſe comites inſeparabiles. Lux Fixarum & Planetarum diſtinctè ad nos tranſmiſſa demonſtrat medium cœleſte nulla vi refractiva pollere. Nam quod dicitur fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam viſas fuiſſe, id quoniam rariſſimè contingit, aſcribendum eſt nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & ſcintillatio ad refractiones tum Oculorum tum aeris tremuli referendæ ſunt: quippe quæ admotis oculo Teleſcopiis evaneſcunt. Aeris & aſcendentium vaporum tremore fit ut radii facile de anguſto pupilli ſpatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi apertura neutiquam. Inde eſt quod ſcintillatio in priori caſu generetur, in poſteriore autem ceſſet: & ceſſatio in poſteriore caſu demonſtrat regularem tranſmiſſionem lucis per cœlos abſque omni refractione ſenſibili. Nequis contendat quod caudæ non ſoleant videri in Cometis cum eorum lux non eſt ſatis fortis, quia tunc radii ſecundarii non habent ſatis virium ad oculos movendos, & propterea caudas fixarum non cerni: ſciendum eſt quod lux fixarum plus centum vicibus augeri poteſt mediantibus Teleſcopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copioſior eſt, caudæ verò nullæ: Cometæ autem ſæpe caudatiſſimi ſunt, ubi capitum lux tenuis eſt & valde obtuſa: ſic enim Cometa Anni 1680, Menſe *Decembri*, quo tempore caput luce ſua vix æquabat ſtellas ſecundæ magnitudinis, caudam emittebat ſplendore notabili uſque ad gradus 40, 50, 60 longitudinis & ultra: poſtea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut ſtella ſeptimæ tantum magnitudinis, cauda verò luce quidem pertenui ſed ſatis ſenſibili longa erat 6 vel 7 gradus,& luce obſcuriſſima,

quæ

quæ cerni vix poſſet, porrigebatur ad gradum uſque duodecimum vel paulo ultra: ut ſupra dictum eſt. Sed & *Feb.* 9. & 10 ubi caput nudis oculis videri deſierat, caudam gradus duos longam per Teleſcopium contemplatus ſum. Porro ſi cauda oriretur ex refractione materiæ cœleſtis, & pro figura cœlorum deflecteretur de Solis oppoſitione, deberet deflexio illa in iiſdem cœli regionibus in eandem ſemper partem fieri. Atqui Cometa Anni 1680 *Decemb.* 28 hora $8\frac{1}{2}$ P. M. *Londini*, verſabatur in ♓ 8 *gr.* 41 cum latitudine boreali 28 *gr.* 6′, Sole exiſtente in ♑ 18 *gr.* 26′. Et Cometa Anni 1577 *Dec.* 29. verſabatur in ♓ 8 *gr.* 41′ cum latitudine boreali 28 *gr.* 40′. Sole etiam exiſtente in ♑ 18 *gr.* 26′ circiter. Utroque in caſu Terra verſabatur in eodem loco & Cometa apparebat in eadem cœli parte: in priori tamen caſu cauda Cometæ (ex meis & aliorum obſervationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppoſitione Solis Aquilonem verſus; in poſteriore verò (ex Obſervationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in auſtrum. Igitur repudiata cœlorum refractione, ſupereſt ut Phænomena Caudarum ex materia aliqua reflectente deriventur.

Caudas autem à capitibus oriri & in regiones à Sole averſas aſcendere confirmatur ex legibus quas obſervant. Ut quod in planis orbium Cometarum per Solem tranſeuntibus jacentes, deviant ab oppoſitione Solis in eas ſemper partes quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quod ſpectatori in his planis conſtituto apparent in partibus à Sole directè averſis; digrediente autem ſpectatore de his planis, deviatio paulatim ſentitur, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor eſt ubi cauda obliquior eſt ad orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propius accedit; præſertim ſi ſpectetur deviationis angulus juxta caput Cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major eſt ubi major eſt deviatio, & magis ſenſibilis ubi cauda cæteris paribus longior eſt: nam in brevioribus curvatura ægre animadvertitur. Quod deviationis angulus minor eſt juxta caput Cometæ, major juxta caudæ

extre-

extremitatem alteram, atque adeò quod cauda convexo ſui latere partes reſpicit à quibus fit deviatio, quæque in rectâ ſunt lineâ à Sole per caput Cometæ in infinitum ductâ. Et quod caudæ quæ prolixiores ſunt & latiores, & luce vegetiore micant, ſint ad latera convexa paulò ſplendidiores & limite minus indiſtincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur Phænomena caudæ à motu capitis, non autem à regione cœli in qua caput conſpicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, ſed à capite ſuppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aere noſtro fumus corporis cujuſvis igniti petit ſuperiora, idque vel perpendiculariter ſi corpus quieſcat, vel obliquè ſi corpus moveatur in latus; ita in cœlis ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores aſcendere debent à Sole (uti jam dictum eſt) & ſuperiora vel rectâ petere, ſi corpus fumans quieſcit; vel obliquè, ſi corpus progrediendo loca ſemper deſerit à quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas iſta minor erit ubi aſcenſus vaporis velocior eſt: nimirum in vicinia Solis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diverſitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior eſt, ideo etiam is ibidem aliquanto denſior erit, lucemque propterea copioſius reflectet, & limite minus indiſtincto terminabitur. De caudarum agitationibus ſubitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque deſcribunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel à mutationibus aeris noſtri, & motibus nubium caudas aliqua ex parte obſcurantium oriantur; vel forte à partibus Viæ Lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi poſſint, ac tanquam earum partes ſpectari.

Vapores autem, qui ſpatiis tam immenſis implendis ſufficiant, ex Cometarum Atmoſphæris oriri poſſe, intelligetur ex raritate aeris noſtri. Nam aer juxta ſuperficiem Terræ ſpatium occupat quaſi 850 vicibus majus quam aqua ejuſdem ponderis, ideoque aeris columna Cylindrica pedes 850 alta ejuſdem eſt ponderis cum aquæ columna pedali latitudinis ejuſdem. Columna autem aeris ad ſummitatem Atmoſphæræ aſſurgens æquat pondere ſuo columnam aquæ pedes

pedes 33 altam circiter; & propterea ſi columnæ totius aereæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua ſuperior æquabit pondere ſuo columnam aquæ altam pedes 32. Inde verò (ex Hypotheſi multis experimentis confirmata, quod compreſſio aeris ſit ut pondus Atmoſphæræ incumbentis, quodque gravitas ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum à centro Terræ) computationem per Corol. Prop. XXII. Lib. II. ineundo, inveni quod aer, ſi aſcendatur à ſuperficie Terræ ad altitudinem ſemidiametri unius terreſtris, rarior ſit quàm apud nos in ratione longe majori, quàm ſpatii omnis infra orbem Saturni ad globum diametro digiti unius deſcriptum. Ideoque globus aeris noſtri digitum unum latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine ſemidiametri unius terreſtris, impleret omnes Planetarum regiones ad uſque ſphæram Saturni & longe ultra. Proinde cum aer adhuc altior in immenſum rareſcat; & coma ſeu Atmoſphæra Cometæ, aſcendendo ab illius centro, quaſi decuplo altior ſit quàm ſuperficies nuclei, deinde cauda adhuc altius aſcendat, debebit cauda eſſe quàm rariſſima. Et quamvis, ob longe craſſiorem Cometarum Atmoſphæram, magnamque corporum gravitationem Solem verſus, & gravitationem particularum Aeris & vaporum in ſe mutuo, fieri poſſit ut aer in ſpatiis cœleſtibus inque Cometarum caudis non adeo rareſcat; perexiguam tamen quantitatem aeris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abunde ſufficere ex hac computatione perſpicuum eſt. Nam & caudarum inſignis raritas colligitur ex aſtris per eas tranſlucentibus. Atmoſphæra terreſtris luce Solis ſplendens, craſſitudine ſua paucorum milliarium, & aſtra omnia & ipſam Lunam obſcurat & extinguit penitus: per immenſam verò caudarum craſſitudinem, luce pariter Solari illuſtratam, aſtra minima abſque claritatis detrimento tranſlucere noſcuntur. Neque major eſſe ſolet caudarum plurimarum ſplendor, quam aeris noſtri in tenebroſo cubiculo latitudine digiti unius duorumve, lucem Solis in jubare reflectentis.

Quo tempore vapor à capite ad terminum caudæ aſcendit, cognoſci fere poteſt ducendo rectam à termino caudæ ad Solem, & no-

tando

tando locum ubi recta illa Trajectoriam ſecat. Nam vapor in termino caudæ, ſi rectà aſcendat à Sole, aſcendere cœpit à capite quo tempore caput erat in loco interſectionis. At vapor non rectà aſcendit à Sole, ſed motum Cometæ, quem ante aſcenſum ſuum habebat, retinendo, & cum motu aſcenſus ſui eundem componendo, aſcendit oblique. Unde verior erit Problematis ſolutio, ut recta illa quæ orbem ſecat, parallela ſit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum Cometæ) ut eadem à linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor qui erat in termino caudæ *Jan.* 25. aſcendere cœperat à capite ante *Decemb.* 11. adeoque aſcenſu ſuo toto dies plus 45 conſumpſerat. At cauda illa omnis quæ *Dec.* 10. apparuit, aſcenderat ſpatio dierum illorum duorum, qui à tempore perihelii Cometæ elapſi fuerant. Vapor igitur ſub initio in vicinia Solis celerrimè aſcendebat, & poſtea cum motu per gravitatem ſuam ſemper retardato aſcendere pergebat; & aſcendendo augebat longidinem caudæ: cauda autem quamdiu apparuit ex vapore fere omni conſtabat qui à tempore perihelii aſcenderat; & vapor, qui primus aſcendit, & terminum caudæ compoſuit, non prius evanuit quàm ob nimiam ſuam tam à Sole illuſtrante quam ab oculis noſtris diſtantiam videri deſiit. Unde etiam caudæ Cometarum aliorum quæ breves ſunt, non aſcendunt motu celeri & perpetuo à capitibus & mox evaneſcunt, ſed ſunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, à capitibus lentiſſimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere ſub initio, per cœlos una cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rurſus colligitur ſpatia cæleſtia vi reſiſtendi deſtitui; utpote in quibus non ſolum ſolida Planetarum & Cometarum corpora, ſed etiam rariſſimi caudarum vapores motus ſuos velociſſimos liberrimè peragunt ac diutiſſimè conſervant.

Aſcenſum caudarum ex Atmoſphæris capitum & progreſſum in partes à Sole averſas *Keplerus* aſcribit actioni radiorum lucis materiam caudæ ſecum rapientium. Et auram longe tenuiſſimam in ſpatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non eſt à ratione prorſus

alienum

alienum, non obſtante quod ſubſtantiæ craſſæ, impeditiſſimis in regionibus noſtris, à radiis Solis ſenſibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari poſſe exiſtimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem ſuam à Sole aſcendere. Cùm autem gravitas corporum terreſtrium ſit ut materia in corporibus, ideoque ſervata quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, ſuſpicor aſcenſum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Aſcendit fumus in camino impulſu aeris cui innatat. Aer ille per calorem rarefactus aſcendit, ob diminutam ſuam gravitatem ſpecificam, & fumum implicatum rapit ſecum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum aſcenderit à Sole? Nam radii Solares non agitant Media quæ permeant, niſi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes ea actione calefactæ calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa calore ſibi communicato rareſiet, & ob diminutam ea raritate gravitatem ſuam ſpecificam qua prius tendebat in Solem, aſcendet & ſecum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad aſcenſum vaporum conducit etiam quod hi gyrantur circa Solem & ea actione conantur à Sole recedere, at Solis Atmoſphæra & materia cœlorum vel plane quieſcit, vel motu ſolo quem à Solis rotatione acceperint, tardius gyratur. Hæ ſunt cauſæ aſcenſus caudarum in vicinia Solis, ubi orbes curviores ſunt, & Cometæ intra denſiorem & ea ratione graviorem Solis Atmoſphæram conſiſtunt, & caudas quàm longiſſimas mox emittunt. Nam caudæ quæ tunc naſcuntur, conſervando motum ſuum & interea verſus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipſibus pro more capitum, & per motum illum capita ſemper comitabuntur & iis liberrimè adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet ut caudæ poſtea decidant à capitibus Solem verſus, quam gravitas capitum efficere poſſit ut hæc decidant à caudis. Communi gravitate vel ſimul in Solem cadunt, vel ſimul in aſcenſu ſuo retardabuntur, adeoque gravitas illa non impedit, quo minus caudæ & capita poſitionem quamcunque ad invicem à cauſis jam deſcriptis aut aliis quibuſcunque facillimè accipiant & poſtea liberrime ſervent.

Caudæ igitur quæ in Cometarum periheliis naſcuntur,in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde poſt longam annorum ſeriem cum iiſdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefacti paulatim evaneſcent. Nam poſtea in deſcenſu capitum ad Solem caudæ novæ breviuſculæ lento motu à capitibus propagari debebunt, & ſubinde, in Periheliis Cometarum illorum qui aduſq; Atmoſphæram Solis deſcendunt, in immenſum augeri. Vapor enim in ſpatiis illis liberrimis perpetuò rareſcit ac dilatatur. Qua ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem ſuperiorem latior ſit quam juxta caput Cometæ. Ea autem rarefactione vaporem perpetuo dilatatum diffundi tandem & ſpargi per cœlos univerſos, deinde paulatim in Planetas per gravitatem ſuam attrahi & cum eorum Atmoſphæris miſceri rationi conſentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad conſtitutionem Terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copioſe ſatis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegitabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condenſati (ut aliqui cum ratione philoſophantur) decurrant in fontes & flumina : ſic ad conſervationem marium & humorum in Planetis Cometæ requiri videntur; ex quorum exhalationibus & vaporibus condenſatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem conſumitur & in terram aridam convertitur, continuò ſuppleri & refici poſſit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omnino creſcunt, dein magna ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuò decidit. Hinc moles Terræ aridæ indies augetur, & liquores, niſi aliunde augmentum ſumerent, perpetuò decreſcere deberent, ac tandem deficere. Porrò ſuſpicor ſpiritum illum, qui aeris noſtri pars minima eſt ſed ſubtiliſſima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipue venire.

Atmoſphæræ Cometarum in deſcenſu eorum in Solem excurrendo in caudas diminuuntur, & (ea certe in parte quæ Solem reſpicit)

ſpicit) anguſtiores redduntur: & viciſſim in receſſu eorum à Sole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur; ſi modò Phænomena eorum *Hevelius* recte notavit. Minimæ autem apparent ubi capita jam modo ad Solem calefacta in caudas maximas & fulgentiſſimas abiere, & nuclei fumo forſan craſſiore & nigriore in Atmoſphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus craſſior & nigrior eſſe ſolet. Sic caput Cometæ de quo egimus, in æqualibus à Sole ac Terrâ diſtantiis, obſcurius apparuit poſt perihelium ſuum quam antea. Menſe enim *Decem.* cum ſtellis tertiæ magnitudinis conferri ſolebat, at Menſe *Novem.* cum ſtellis primæ & ſecundæ. Et qui utrumq; viderant, majorem deſcribunt Cometam priorem. Nam Juveni cuidam *Cantabrigienſi Novem.* 19. Cometa hicce luce ſua quamtumvis plumbea & obtuſa æquabat Spicam Virginis, & clarius micabat quàm poſtea. Et *D. Storer* literis quæ in manus noſtras incidêre, ſcripſit caput ejus Menſe *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentiſſimam emittebat, parvum eſſe & magnitudine viſibili longe cedere Cometæ qui Menſe *Novembri* ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem eſſe conjectabatur quod materia capitis ſub initio copioſior eſſet & paulatim conſumeretur.

Eodem ſpectare videtur quod capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentiſſimas emiſerunt, deſcribantur ſubobſcura & exigua. Nam Anno 1668 Mart. 5. St. nov. hora ſeptima Veſp. *R. P. Valentinus Eſtancius*, *Braſiliæ* agens, Cometam vidit Horizonti proximum ad occaſum Solis brumalem, capite minimo & vix conſpicuo, cauda verò ſupra modum fulgente, ut ſtantes in littore ſpeciem ejus è mari reflexam facilè cernerent. Speciem utique habebat trabis ſplendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in auſtrum vergens, & Horizonti fere parallela. Tantus autem ſplendor tres ſolum dies durabat, ſubinde notabiliter decreſcens; & interea decreſcente ſplendore aucta eſt magnitudine cauda. Unde etiam in *Portugallia* quartam fere cœli partem (id eſt gradus 45) occupaſſe dicitur, ab occidente in orientem ſplendore cum inſigni protenſa;

tenſa; nec tamen tota apparuit, capite ſemper in his regionibus infra Horizontem deliteſcente. Ex incremento caudæ & decremento ſplendoris manifeſtum eſt quod caput à Sole receſſit, eique proximum fuit ſub initio, pro more Cometæ anni 1680. Et ſimilis legitur Cometa anni 1101 vel 1106, *cujus Stella erat parva & obſcura* (ut ille anni 1680) *ſed ſplendor qui ex ea exivit valde clarus & quaſi ingens trabs ad orientem & Aquilonem tendebat*, ut habet *Hevelius* ex *Simeone Dunelmenſi* Monacho. Apparuit initio Menſis *Feb.* circa veſperam ad occaſum Solis brumalem. Inde verò & ex ſitu caudæ colligitur caput fuiſſe Soli vicinum. *A Sole*, inquit Matthæus Pariſienſis, *diſtabat quaſi cubito uno, ab hora tertia* [rectius ſexta] *uſque ad horam nonam radium ex ſe longum emittens.* Talis etiam erat ardentiſſimus ille Cometa ab *Ariſtotele* deſcriptus Lib. I. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conſpectum eſt, eo quod ante Solem vel ſaltem ſub radiis ſolaribus occidiſſet, ſequente verò die quantum potuit viſum eſt. Nam quam minimâ fieri poteſt diſtantiâ Solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* [caudæ ſcilicet] *nondum apparebat capitis ſparſus ignis, ſed procedente tempore* (ait Ariſtoteles) *cum* [cauda] *jam minus flagraret, reddita eſt* [capiti] *Cometæ ſua facies. Et ſplendorem ſuum ad tertiam uſque cœli partem* [id eſt ad 60 gr.] *extendit. Apparuit autem tempore hyberno, & aſcendens uſque ad cingulum Orionis ibi evanuit.* Cometa ille anni 1618, qui è radiis Solaribus caudatiſſimus emerſit, ſtellas primæ magnitudinis æquare vel paulo ſuperare videbatur, ſed majores apparuere Cometæ non pauci qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem vel etiam Lunam æquaſſe traduntur.

Diximus Cometas eſſe genus Planetarum in Orbibus valde excentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum è Planetis non caudatis, minores eſſe ſolent qui in orbibus minoribus & Soli propioribus gyrantur, ſic etiam Cometas, qui in Periheliis ſuis ad Solem propius accedunt, ut plurimum minores eſſe & in orbibus minoribus revolvi rationi conſentaneum videtur. Orbium verò tranſverſas diametros & revolutionum tempora periodica ex collatione Cometa-

metarum in iiſdem orbibus poſt longa temporum intervalla redeuntium determinanda relinquo. Interea huic negotio Propoſitio ſequens Lumen accendere poteſt.

Prop. XLII. Prob. XXI.

Trajectoriam Cometæ graphicè inventam corrigere.

Oper. 1. Aſſumatur poſitio plani Trajectoriæ, per Propoſitionem ſuperiorem graphicè inventa; & ſeligantur tria loca Cometæ obſervationibus accuratiſſimis definita, & ab invicem quam maximè diſtantia; ſitque *A* tempus inter primam & ſecundam, ac *B* tempus inter ſecundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in Perigæo verſari convenit, vel ſaltem non longe à Perigæo abeſſe. Ex his locis apparentibus inveniantur per operationes Trigonometricas loca tria vera Cometæ in aſſumpto illo plano Trajectoriæ. Deinde per loca illa inventa, circa centrum Solis ceu umbilicum, per operationes Arithmeticas, ope Prop. XXI. Lib. I. inſtitutas, deſcribatur Sectio Conica: & ejus areæ, radiis à Sole ad loca inventa ductis terminatæ, ſunto *D* & *E*; nempe *D* area inter obſervationem primam & ſecundam, & *E* area inter ſecundam ac tertiam. Sitque *T* tempus totum quo area tota $D + E$, velocitate Cometæ per Prop. XVI. Lib. I. inventa, deſcribi debet.

Oper. 2. Augeatur longitudo Nodorum Plani Trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur *P*; & ſervetur plani illius inclinatio ad planum Eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus Cometæ locis obſervatis inveniantur in hoc novo plano loca tria vera (ut ſupra): deinde etiam orbis per loca illa tranſiens, & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint *d* & *e*, nec non tempus totum *t* quo area tota $d + e$ deſcribi debeat.

Oper. 3. Servetur Longitudo Nodorum in operatione prima, & augeatur inclinatio Plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur *Q*. Deinde ex ob-

ſervatis

ſervatis prædictis tribus Cometæ locis apparentibus, inveniantur in hoc novo Plano loca tria vera, Orbiſque per loca illa tranſiens, ut & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint δ & ε, & tempus totum τ quo area tota $\delta + \varepsilon$ deſcribi debeat.

Jam ſit C ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & g ad 1 ut d ad e, & γ ad 1 ut δ ad ε; ſitque S tempus verum inter obſervationem primam ac tertiam; & ſignis $+$ & $-$ probe obſervatis quærantur numeri m & n, ea lege ut ſit $G - C = mG - mg + nG - n\gamma$, & $T - S$ æquale $mT - mt + nT - n\tau$. Et ſi, in operatione prima, I deſignet inclinationem plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, & K longitudinem Nodi alterutrius: erit $I + nQ$ vera inclinatio Plani Trajectoriæ ad Planum Eclipticæ, & $K + mP$ vera longitudo Nodi. Ac denique ſi in operatione prima, ſecunda ac tertia, quantitates R, r & ρ deſignent Latera recta Trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejuſdem Latera tranſverſa reſpectivè: erit $R + mr - mR + n\rho - nR$ verum Latus rectum, & $\frac{1}{L + ml - mL + n\lambda - nL}$ verum Latus tranſverſum Trajectoriæ quàm Cometa deſcribit. Dato autem Latere tranſverſo datur etiam tempus periodicum Cometæ. *Q.E.I.*

FINIS.

Errata Senſum turbantia ſic Emenda.

Pag. 14 lin. 30 lege. *ut* O K *ad* O D *ſeu* O L. p. 18 l. 1 *recta*. p. 61 l. 22 & p. 62 l. 2 pro A C lege A B. p. 81 l. 1. *crurum* B L, C L *vel* B M, C M *interſectio, quæ jam ſit* m, *incidat ſemper in rectam illam infinitam* M N, *& crurum* BA, C A*&c.* p. 84 l. 17 poſt verba *Nam ſi* lege A *&* P *ſint Puncta contactuum ubivis in tangentibus ſita, &*. p. 91 l. ult. M L, I K. p. 95 l. 3 poſt *majori* adde, *& perpendicularia minori*. p. 96 l. 30 *&* 31 lege A B C d e f, *&* l. 32 a b c D E F. p. 104 l. 16 pro $GOq. + \overline{HG - PO}\,q.)$ lege $HPq. = GOq. + \overline{PO - HG}\,q.)$ p. 105 l. 7 pro G *ſcribe* H. p. 118 l. 17 pro C P lege P f B & l. 19 pro C P lege B P. p. 122 l. 28, pro L *ſcribe* M. p. 123 l. 13, pro D F lege D F *vel* E G. p. 125 l. 16 pro *omnibus altitudinibus*, lege *omnibus æqualibus altitudinibus*. p. 152 l. 7 *per cujus*. p. 153 l. 16 *&* L G. p. 178 l. penult. *ſit quaſi duplo major quam*. p. 209 l. 18 pro $SL \times SI^{\frac{1}{2}}$, lege $SL \times SI^{\frac{3}{2}}$. p. 226 l. 11 pro $2B^{-2}$ *ſeu* $\frac{2}{B\,cub.}$ lege $2B^3$ & dele *reciproce*.

Pag. 242 lin. 2, & p. 262 l. 13, & p. 336 l. 5, pro Q. E. D. lege Q. E. I. p. 243 l. 10 $2CDq. \times QB$. p. 246 l. 14 *proportionalia*. p. 249 l. 12 *reſiſtentia & tempus*. p. 250 l. 1 *-rum inverſe, amittent*. q. 257 l. 4 *præteriti, ſi modo Sectorem tangentes* A p *&* A P *ſint ut velocitates*. p. 274 l. 17 *datæ quadam*. p. 283 l. ult. $TQ \times PS$. p. 296 in Schemate pro O ſcribe T. p. 307 l. 9 *arcus auferantur*. p. 312 l. 26 *corpus in* D. p. 313 l. 3 *Deſcribat*. p. 314 l. 21 & 28, pro *a* B K k S lege *a* B K k T. p. 325 l. 26 B E *ad* B C. ib. l. ult. *æqualis* $\frac{BE\,quad.}{CB}$ p. 328 l. 27 *& longitudo* C Z.

Pag. 411 l. 22 *pluſquam duplicata, per Prop. LXXXV Lib. I.* p. 413 l. 28 $\frac{1}{2360}$ p. 416 l. 17 $\frac{1}{3200}$ p. 439 l. 9 *æquales pertinentium* p. 442 l. 11 $69\frac{11}{12}$ *ad* $68\frac{11}{12}$. ib. l. 18 $68\frac{11}{12}$ *ad* $69\frac{11}{12}$. p. 449 l. 5 *area* p D d m p. 450 l. 9 *ad aream* D P M d. p. 455 l. 30 *motum poſteriorem*. p. 459 l. 2 $2MP \times AT$*qu.* p. 482 l. 3 *dein* b − 2b = c *&c. & ſic pergatur ad differentiam ultimam, quæ hic eſt* f. ib. in Schemate infra *d* 2*d* 3*d* ſcribe *e* *f* 2*e* p. 494 l. 4 pro ♏ 27 lege ♐ 27.

Aleph# 2670057